الرياضيات

الجبـــــر

مؤسسة سما المجد التعليمية

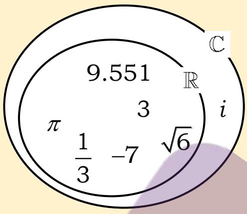
للصف الثالث الثانوي

الوحدة الرابعة: الأعداد العقدية

1. الوحدة التخيلية i:

نفترض $i = \sqrt{-1}$ فيكون

- $i^2 = -1$.
- $i^3 = i^2 i = -i$
- $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$
- بشكل عام يمكن أن نضع باقي القسمة على 4 مكان الأس.



[1] بسّط العبارات:

ⓐ $z = (2+i)^2$ ⓑ $z = (1-i)^2$ ⓒ $z = (1+i)^8$

الحل:

[2] بسّط العبارات:

ⓐ $z = i^6$ ⓑ $z = i^{13}$ ⓒ $z = i^{2026}$

الحل:

2. الشكل الجبري:

الشكل الجبري للعدد العقدي هو: $\boxed{z = a + bi}$ حيث $a, b \in R$.

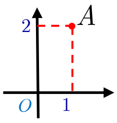
- يسمى a الجزء الحقيقي $Re(z) = a$
- يسمى b الجزء التخيلي $Im(z) = b$

[3] ليكن العدد العقدي ⓐ $z = -3 - 5i$ ⓑ $z = -3$ ⓒ $z = -i$

احسب $Im(z) = b$ و $Re(z) = a$.

الحل:

[4] ليكن x عدداً عقدياً تمثله نقطة A في المستوي. وليكن $z = x + 2i$. اكتب z بالشكل الجبري.

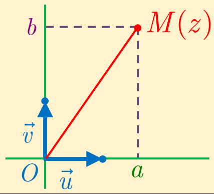


الحل:

3. تمثيل العدد العقدي

كل عدد عقدي يمثل نقطة وبالعكس:

$$z = a + b\,i \rightleftharpoons M(a, b)$$



[5] مثل هندسياً العدد العقدي

ⓐ $z_1 = 3 + 2i$ ⓑ $z_2 = -3$

ⓒ $z_3 = -i$ ⓓ $z_4 = 0$

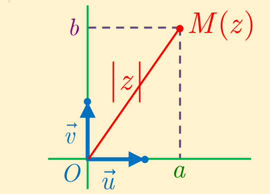
الحل:

4. الطويلة: (البعد عن مبدأ الاحداثيات)

إن طويلة العدد العقدي $z=a+bi$

يرمز لها بالشكل :

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$



[6] احسب الطويلة ⓐ $z_1=3+2i$ ⓑ $z_2=-3$ ⓒ $z_3=-i$

الحل:

5. المرافق للعدد العقدي:

المرافق للعدد العقدي $z=a+bi$ هو $\bar{z}=a-bi$.

قاعدة1: z يكون حقيقياً إذا وفقط إذا كان $\bar{z}=z$ ،

وأنّه يكون تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان $\bar{z}=-z$.

قاعدة2: $z\bar{z}=a^2+b^2$ و $z\bar{z}=|z|^2$

لأن $z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2=|z|^2$

قاعدة3: $|z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

[7] جد مرافق العدد ⓐ $z_1=3+2i$ ⓑ $z_2=-3$ ⓒ $z_3=-2i$

الحل:

[8] ليكن العدد العقدي $z=3-4i$ احسب $\bar{z}$ و $z.\bar{z}$.

الحل:

6. إزالة الوحدة التخيلية i من المقام

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام (وكذلك لإنجاز عملية القسمة)

مثال1: نضع $z_1=3+2i$ و $z_2=2-i$. اكتب بالشكل الجبري كلاً من: z_1+z_2 و z_1z_2 و $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{z_1}{z_2}$.

- $z_1+z_2=(3+2i)+(2-i)=5+i$.
- $z_1z_2=(3+2i)(2-i)=6-3i+4i-2i^2=8+i$.
- $\frac{1}{z_1}=\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{9+4}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+2i}{2-i}=\frac{(3+2i)(2+i)}{5}=\frac{6+4i+3i-2}{5}=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$

[9] بسّط العبارتين: ⓐ $z=\frac{3-i}{1+2i}$ ⓑ $z=\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$

الحل:

[10] ليكن $z=3+2i$ جد $\mathrm{Re}(\frac{1}{z})$.

الحل:

7. خواص المرافق:

- مرافق العدد العقدي $\bar{z}$ هو العدد العقدي z ذاته $\overline{(\bar{z})} = z$.
- مرافق المجموع يساوي مجموع المرافقات: $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- مرافق الجداء يساوي جداء المرافقات: $\overline{zw} = \bar{z} \times \bar{w}$.
- مرافق القسمة يساوي خارج قسمة المرافقات: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
- مرافق قوة يساوي قوة المرافق $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$
- إذا كان $z = a + ib$ كان $z + \bar{z} = 2a$ و $z - \bar{z} = 2ib$

وكان $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ و $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

[11] اكتب بدلالة $\bar{z}$ مرافق كل من الأعداد العقدية A الآتية:

ⓐ $A = (1+2iz)^3(z^2+i)$ ⓑ $A = \frac{3z^2 - 2iz + 4}{2z - 3i}$

الحل:

- لحل معادلة عقدية: اذا حوت احد المجهولين z و $\bar{z}$ نعزله، أما اذا حوت المجهولين z و $\bar{z}$ معاً نفرض $z = x + iy$ ونعوض. أو نأخذ مرافق الطرفين ونحل المعادلتين حل مشترك.

[12] حلّ كلاً من المعادلات الآتية بالمجهول z:

ⓐ $2\bar{z} = i - 1$ ⓑ $z - 2\bar{z} = 3i + 5$ ⓒ $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$

الحل:

[13] حلّ في C كلاً من جمل المعادلات الآتية بالمجهولين z و z':

ⓐ $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -\bar{z} + \overline{z'} = 1 - 2i \end{cases}$

الحل:

[14] نتأمّل عددين عقديين z و w يحققان $|z|=1$ و $|w|=1$ و $zw \neq -1$ أثبت أنّ $A=\dfrac{z+w}{1+zw}$ عددٌ حقيقي.

الحل:

[15] ليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد. أثبت أنّ $A=\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عددٌ حقيقي.

الحل:

[16] ليكن u عدداً عقدياً مختلف عن الواحد يحقق $|u|=1$. أثبت أنّ $A=\dfrac{1-u}{iz-iu\bar{z}}$ عددٌ تخيلي بحت.

الحل:

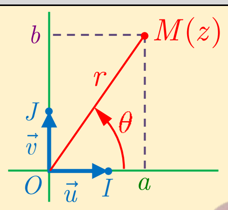
[17] عيّن مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق أن العدد z مختلف عن $4i$ و $\dfrac{z+2i}{z-4i}$ عدد حقيقي.

الحل:

8. زاويةً للعدد العقدي:

زاويةً للعدد العقدي هي الزاوية بين العدد والمحور Ox أي قياس بالراديان للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.

ونرمزها $\arg z$.



[18] مثّل الأعداد في المستوي العقدي، ثُمّ أعطِ زاوية لكل منها انطلاقاً من اعتبارات هندسية ⓐ $1+i$ ⓑ $-1-i$ ⓒ $-5i$

الحل:

9. الشكل المثلثي للعدد العقدي:

نسمّي $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ الشكل المثلثي للعدد z حيث

$\arg z = \theta\ (2\pi)$ و $r = |z|$

- ننتقل للشكل الجبري بالعلاقتين $a = r\cos\theta$ و $b = r\sin\theta$.
- ننتقل للشكل المثلثي: بإيجاد $r = |z|$، و θ من الشرطين $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ و $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$
- z حقيقي يكافئ $\arg z = 0$ أو $\arg z = \pi$ أو $z = 0$.
- z تخيلي بحت يكافئ $\arg z = \pm\frac{\pi}{2}$ أو $z = 0$.

مثال2: إذا كان $z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ كان $z = -\sqrt{3} + i$.

مثال3: ليكن $z_1 = \sqrt{3} + i$. أعط الشكل المثلثي للعدد z_1.

الحل: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$، الزاوية θ تتعين بالشرطين:

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$. إذن $\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$.

ومنه $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

مثال4: ليكن $z = 1 - i$ أعط الشكل المثلثي للعدد z.

الحل:

$r = \sqrt{2}$ و $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

ومنه $\theta = -\frac{\pi}{4}$ زاوية للعدد العقدي z.

إذن $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

[20] اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

ⓐ $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ⓑ $z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

ⓒ $z_3 = 4 - 4i$ ⓓ $z_4 = -2i$

ⓔ $z_5 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$ ⓕ $z_6 = \dfrac{4}{1-i}$

الحل:

[19] عيّن مجموعة النقاط M الذي يمثلها الشرط:

ⓐ $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$ ⓑ $\arg z = -\dfrac{2\pi}{3}$

ⓒ $\arg z = \pi$ ⓓ $|z| = 3$

ⓔ $\mathrm{Re}(z) = -2$ ⓕ $\mathrm{Im}(z) = 1$

الحل:

10. خواص الزاوية والطويلة:

- عند **ضرب** الأعداد العقدية نضرب الطويلات ونجمع الزوايا.
- عند **قسمة** الأعداد نقسم الطويلات ونطرح الزوايا.
- عند رفع العدد **للأس** n نرفع الطويلة أس n ونضرب الزاوية بالعدد n.
- خواص الطويلة:

$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$
$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\lvert z+z'\rvert \le \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$

- خواص الزاوية:

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \,(2\pi)$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \,(2\pi)$
$\arg(z^n) = n\arg z \,(2\pi)$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \,(2\pi)$

مثال5: ليكن $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

و $z' = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. عندئذ

$\lvert zz'\rvert = 2\times 3 = 6$ و $\arg(zz') = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{20}$

ومنه $zz' = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{20}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{20}\right)\right)$.

مثال6: ليكن $z = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

و $z' = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. عندئذ

$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{4}{3/2} = \frac{8}{3}$ و $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$

ومنه $\frac{z}{z'} = \frac{8}{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

مثال7: جد الشكل الجبري: $z = (1-i\sqrt{3})^5$ و $w = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$.

الحل:

- لنضع $z' = 1 - i\sqrt{3}$، نلاحظ أنّ $\lvert z'\rvert = 2$ و $\arg z' = -\frac{\pi}{3}$،

إذن $z' = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$z = z'^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2^5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 16 + 16\sqrt{3}\,i$$

- لنضع $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

ومنه $(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right) = -4$

وكذلك $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ومنه

$(\sqrt{3}+i)^3 = 2^3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 8i$

ومنه $w = -4/(8i) = \frac{i}{2}$.

[21] اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد.

ⓐ $z=(1+i)(1-i)$ ⓑ $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ ⓒ $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$

الحل:

[22] (دورة 1 – 2017) ليكن $z_1=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=1+i$.

ⓐ اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد z_1 و z_2 و $\dfrac{z_1}{z_2}$.

ⓑ اكتب بالشكل الجبري $\dfrac{z_1}{z_2}$. واستنتج أنّ $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

الحل:

[23] نعطى العددين العقديين $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1 - i$.

ⓐ اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$.

ⓑ اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$. استنتج أنّ $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

ⓒ احسب $\arg\frac{z_1}{z_2}$, $\arg z_1 z_2$, $\arg z_2$, $\arg z_1$.

الحل:

[24] اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

ⓐ $z = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^6$ ⓑ $z = (1+i)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$

الحل:

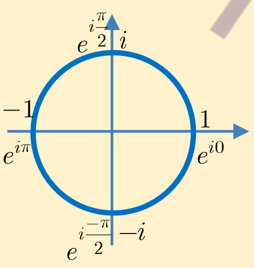
11. الشكل الأسّي لعدد عقدي:

- الشكل الأسّي لعدد عقدي غير معدوم z زاويته θ هو الصيغة:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

حيث r حقيقي وموجب تماماً

- قواعد الشكل الأسّي



$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{i0} = 1 \ , \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \ ,$$

$$e^{i\pi} = -1 \ , \quad e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i \ ,$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

- دستور دوموافر: أياً كان العدد الحقيقي θ والعدد الصحيح n كان $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$.

- علاقتا أويلر: $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ و $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

[25] اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

ⓐ $z=\sqrt{3}+i$ ⓑ $z=-\sqrt{3}+i$ ⓒ $z=-3-3i$

ⓓ $z=2\sqrt{3}+6i$ ⓔ $z=\dfrac{6}{1+i}$ ⓕ $z=\dfrac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4}$

ⓖ $z=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$ ⓗ $z=(1+i)\sqrt{3}e^{i\pi/3}$ ⓘ $z=(1+i\sqrt{3})^4 e^{4i\pi/3}$

الحل:

[26] نضع $z_1 = e^{i\pi/3}$ و $z_2 = 3e^{-i\pi/4}$.

جِد الشكل الأسي للأعداد z_1^3 , $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1 z_2$

الحل:

يجب أن تكون الطويلة موجبة تماماً وحقيقية

- اذا كانت مضروبة بعدد سالب نضيف للزاوية π .
- اذا كانت مضروبة بالعدد i نضيف للزاوية $\frac{\pi}{2}$.
- اذا كانت مضروبة بالعدد $-i$ نضيف للزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

[27] اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

ⓐ $z = -12e^{i\pi/4}$ ⓑ $z = (1-\sqrt{2})e^{i\pi/4}$ ⓒ $z = 3ie^{i\pi/3}$

الحل:

12. علاقتا أويلر:

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad و \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

[28] اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

ⓐ $z = e^{i\frac{\pi}{5}} + 1$ ⓑ $z = 1 - e^{i\frac{\pi}{7}}$ ⓒ $z = e^{i\theta} - 1 : \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

الحل:

[29] ليكن $\alpha = e^{2i\pi/5}$. و $A = \alpha + \alpha^4$ احسب A .

الحل:

[30] ليكن θ من $]-\pi,\pi[$. نعرّف $t=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$ اكتب t بالشكل الجبري.

الحل:

13. المعادلة من الدرجة الثانية:

لحل المعادلة $a\,z^2+b\,z+c=0$ حيث a و b و c ثلاثة أعداد **حقيقية** و $a\neq 0$. نوجد أولاً $\Delta=b^2-4ac$ إذا كان:

- $\Delta>0$ فنحن نعلم أنّ للمعادلة حلّين حقيقين هما
$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- $\Delta=0$ للمعادلة حل(مضاعفاً) وحيد فقط هو $z=-\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta<0$ للمعادلة حلان عقديان مترافقان هما
$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

مثال8: حل المعادلة $z^2+6z+34=0$.

الحل: $\Delta=b^2-4ac=-100<0$ ، للمعادلة حلّان عقديان:
$$z_1=\frac{-6-10i}{2}=-3-5i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-6+10i}{2}=-3+5i$$

[31] حلّ في C كلاً من المعادلات الآتية:

ⓐ $z^2-2z+3=0$ ⓑ $z^2-2(1+\sqrt{2})z+2(\sqrt{2}+2)=0$

ⓒ $2z^2-6z+5=0$ ⓓ $z^2-2(\cos\theta)z+1=0$

الحل:

ملاحظة: حلي المعادلة $a\,z^2+b\,z+c=0$ يحققان:

$$\boxed{z_1+z_2=\frac{-b}{a}},\quad \boxed{z_1 z_2=\frac{c}{a}}$$

[32] جد عددين عقديين p و q كي تقبل المعادلة $z^2+pz+q=0$ العددين $1+2i$ و $3-5i$ جذرين لها.

الحل:

[33] جد العددين الحقيقين c و b كي تقبل المعادلة $z^2+bz+c=0$ العدد $1+2i$ جذر لها.

الحل:

[34] احسب جداء $(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)$ ثُمّ حلّ في C المعادلة $z^4+4z^3+6z^2+4z-15=0$

الحل:

[35] نتأمّل كثير الحدود $P(z)=z^4-19z^2+52z-40$.

ⓐ عيّن a و b يحققان $P(z)=(z^2+az+b)(z^2+4z+2a)$.

ⓑ حلّ في C المعادلة $P(z)=0$.

الحل:

14. تحليل كثيرات الحدود العقدية

- إذا كان z_0 جذراً لكثير حدود P درجته n (أي $P(z_0)=0$) وُجد كثير حدود Q درجته $n-1$ بحيث $P(z)=(z-z_0)Q(z)$.
- لكل كثير حدود P درجته n، عدداً من الجذور n في $\mathbb{C}$ على أن نكرر كل جذر بقدر درجة مضاعفته.
- إذا كانت **أمثال** P **حقيقية**، وكان z_0 جذراً للمعادلة $P(z)=0$ كان $\bar{z}_0$ أيضاً جذراً للمعادلة $P(z)=0$.

[36] لتكن المعادلة $P(z)=z^3-3z^2+3z+7=0$

ⓐ علّل وجود كثير حدود يحقق: $P(z)=(z+1)Q(z)$.

ⓑ عيّن Q ثمّ حل المعادلة $Q(z)=0$.

ⓒ لتكن A و B و C نقاط التي تمثل حلول المعادلة السابقة أثبت أنّ ABC مثلث متساوي الأضلاع.

الحل:

15. الجذور التربيعية (حل المعادلة $z^2=w$)

الطريقة الجبرية: نفترض $z=x+iy$ فيكون: $(x+iy)^2=w$ و $|z|^2=|w|$

الطريقة الأسية: نفترض $z=re^{i\theta}$ فيكون: $(re^{i\theta})^2=w$ أي $r^2e^{i2\theta}=w$ أي: $2\theta=\arg w+2\pi k$, $r^2=|w|$

- عدد الجذور من المرتبة n هو n جذر.
- نجد الجذور التكعيبية بنفس الطريقة الأسية للجذور التربيعية.
- الجذور التكعيبية تؤلّف رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.
- نفترض $j=e^{2i\pi/3}$ عندئذ $1+j+j^2=0$ و $\bar{j}=j^2=e^{-2i\pi/3}$.
- يكون ABC مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان $a+bj+cj^2=0$

[37] حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلات $z^2=w$ في الحالات الآتية

ⓐ $w=-3+4i$ ⓑ $w=-2-i$

الحل:

[38] ⓐ أثبت أنّ حل المعادلة $(x+iy)^2=1+i$ في R . يؤول إلى

$$x^2-y^2=1,\ x^2+y^2=\sqrt{2},\ 2xy=1$$

ⓑ حل المعادلة $z^2=1+i$.

ⓒ حل $z^2=1+i$ بأسلوب ثان، واستنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{8}$.

الحل:

[39] احسب $(\sqrt{3}+3i)^2$ وحل: $2z^2+(3\sqrt{3}+i)z+4=0$

الحل:

[40] حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$ (لاحظ أنّ : $(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$)

الحل:

[41] حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-(1+2i)z+3+3i=0$.

الحل:

[42] حل في C المعادلات الآتية:

ⓐ $z^2+(1+4i)z-5-i=0$ ⓑ $2iz^2+(3+7i)z+4+2i=0$

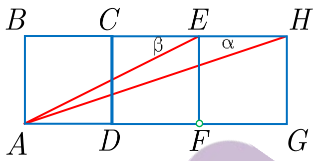
الحل:

[43] جد مجموعة حلول المعادلة $z^3=1$

الحل:

تمارين عامة

[44] بمَعْلَم متجانس مناسب. لدينا $ABCD$ و $DCEF$ و $FEGH$ ثلاثة مربّعات طولُ ضلع كلّ منها



ⓐ اكتب الاعداد العقدية التي تمثل كل من النقاط H و E و A .

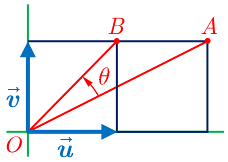
ⓑ اكتب العدد الممثل لـ $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AE}$ بالشكل الاسي والجبري بدلالة α,β .

ⓒ اكتب $z = z_{\overrightarrow{AH}} \times z_{\overrightarrow{AE}}$ بالشكل الاسي والجبري استنتج $\cos(\alpha+\beta)$.

ⓓ اكتب العدد العقدي $z = \dfrac{z_{\overrightarrow{AE}}}{z_{\overrightarrow{AH}}}$ بالشكل الاسي والجبري استنتج $\sin(\alpha-\beta)$.

الحل:

[45] مربّعين طول ضلع كل منهما يساوي الواحد.



a) أعط z_A و z_B بالشكل الجبري.

b) اكتب $z = \dfrac{z_B}{z_A}$ بالشكل الجبري.

c) اكتب z بالشكل الاسي بدلالة θ . استنتج قيم $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

الحل:

[46] نضع $w=\dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i}$ حيث $z\neq -i$ ونفترض أنّ $z=x+iy$.

a) حل المعادلة $w=i$

b) اكتب w بالشكل الجبري

c) أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها w تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل:

[47] نتأمّل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان $a=2$ و $b=2e^{3i\pi/4}$. وليكن I منتصف $[AB]$.

ⓐ ارسم شكلاً مناسباً، وبيّن طبيعة المثلث OAB .

ⓑ استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.

ⓒ احسب العدد z_I المُمَثّل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

ⓓ استنتج كلّاً من $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ و $\sin\dfrac{3\pi}{8}$.

الحل:

[48] بسّط كتابة العدد العقدي

$$Z=\frac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}$$

موضّحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً.

الحل:

[49] ليكن لدينا العددان العقديان $z=x+yi$ و $a=\alpha+\beta i$ حيث:

α,β,x,y أعداد حقيقية تحقق: $z^2-a^2=(\overline{z})^2-(\overline{a})^2$ فإذا كانت $\alpha\cdot\beta=1$

ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(x,y)$.

الحل:

تمارين عامة محلولة

[1] ليكن z و z' عددين عقديين أثبت أنّ:

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2|z|^2+2|z'|^2$$

الحل:

نريد اثبات العلاقة $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2|z|^2+2|z'|^2$

نعلم أن $|z|^2=z\overline{z}$

نبدأ من الطرف الأول

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=(z+z')\overline{(z+z')}+(z-z')\overline{(z-z')}$$
$$=(z+z')(\overline{z}+\overline{z}')+(z-z')(\overline{z}-\overline{z}')$$
$$=z\overline{z}+z\overline{z}'+z'\overline{z}+\overline{zz}'+z\overline{z}-z\overline{z}'-z'\overline{z}+z'\overline{z}'$$
$$=2z\overline{z}+2\overline{zz}'$$
$$=2|z|^2+2|z'|^2$$

[2] ليكن المثلث ABC . أثبت تكافؤ الخاصتين الآتيتين:

المثلث متساوي الساقين ورأسه A $\Leftrightarrow$ $2\sin B\cos C=\sin A$.

الحل: لدينا $\sin\hat{A}=2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$

وهذا يكافئ $\sin(\hat{B}+\hat{C})=2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$

وهذا يكافئ $\sin\hat{B}\cos\hat{C}+\cos\hat{B}\sin\hat{C}=2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$

وهذا يكافئ $\cos\hat{B}\sin\hat{C}-\sin\hat{B}\cos\hat{C}=0$

وهذا يكافئ $\sin(\hat{C}-\hat{B})=0$

وهذا يكافئ $\hat{B}=\hat{C}$

أي المثلث متساوي الساقين ورأسه A

[3] ليكن a عدداً عقدياً معطى. لتكن E مجموعة الأعداد العقدية z تحقّق: $z^2-a^2=\overline{z}^2-\overline{a}^2$ عيّن المجموعة E

الحل:

نضع $z=x+iy$ و $a=\alpha+i\beta$

حيث x و y و α و β هي أعداد حقيقية.

نعوض في المعادلة فنجد

$$(x+iy)^2-(\alpha+i\beta)^2=(x-iy)^2-(\alpha-i\beta)^2$$

بفك الاقواس نجد $xy=\alpha\beta$.

إذا $\alpha\beta=0$ كانت المجموعة E مساوية لاجتماع المحورين الإحداثيين.

وإذا كان $\alpha\beta\neq 0$ كانت المجموعة E تمثل خط التابع

$f(x)=\dfrac{\alpha\beta}{x}$.

[4] حلّ المعادلة $z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i=0$ إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

الحل:

نفرض w هو الحل التخيلي البحت أي الذي يحقق $\bar{w}=-w$. إذن

لدينا (1) $w^3-(3+4i)w^2-6(3-2i)w+72i=0$

نأخذ مرافق الطرفين $\overline{w^3-(3+4i)w^2-6(3-2i)w+72i}=\bar{0}$

$$-w^3-(3-4i)w^2+6(3+2i)w-72i=0 \qquad (2)$$

نجمع (1) و (2) ومنه $w(w-4i)=0$ ،

ولكن $w=0$ ليس حل للمعادلة (1) ومنه يكون الحل هو $4i$.

وبالتالي يقبل $P(z)=z^3-(3+4i)z^2-6(3-2i)z+72i$ القسمة على $z-4i$ وبالقسمة الإقليدية نجد

$P(z)=(z-4i)(z^2-3z-18)=(z-4i)(z-6)(z+3)$.

ومنه حلول المعادلة هي $\{4i,-3,6\}$.

[5] ليكن $\alpha=e^{2i\pi/5}$. نضع $A=\alpha+\alpha^4$ و $B=\alpha^2+\alpha^3$.

① أثبت أنّ $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$ واستنتج أنّ A و B هما جذرا المعادلة: $x^2+x-1=0$ (1).

② عبّر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

③ حلّ المعادلة (1) واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

الحل:

① أن $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$ مجموع متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها α

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}=\frac{1-e^{2i\pi}}{1-\alpha}=0$$

حيث : $\alpha^5=e^{2i\pi}=1$

$$A+B=(\alpha+\alpha^4)+(\alpha^2+\alpha^3)=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=-1$$

$$A\cdot B=(\alpha+\alpha^4)\cdot(\alpha^2+\alpha^3)=\alpha^3+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7$$
$$=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=-1$$

نجد A و B هما حلا المعادلة $x^2+x-1=0$ (1).

② لدينا $\alpha^4=\bar{\alpha}$ ومنه $A=2\operatorname{Re}(\alpha)=2\cos\frac{2\pi}{5}$.

③ باستعمال طريقة المميز Δ نجد حلول المعادلة (1) نجد الجذرين

$$\left\{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}),\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\right\}$$

إن كل من $2\cos\frac{2\pi}{5}$ و $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ هو الحل الموجب للمعادلة (1)

لذلك بالمقارنة $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

[6] اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة :

$$(z^2+3\sqrt{3}z+9)(z^2-3\sqrt{3}z+9)=0$$

ثم أثبت أنّ النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

الحل:

$$(z^2+3\sqrt{3}z+9)(z^2-3\sqrt{3}z+9)=0$$

بحل المعادلة $z^2+3\sqrt{3}z+9=0$ باستعمال المميز نجد الحلين

$$z_1=-\tfrac{3}{2}\sqrt{3}-\tfrac{3}{2}i,\ z_2=-\tfrac{3}{2}\sqrt{3}+\tfrac{3}{2}i$$

وبحل المعادلة $z^2-3\sqrt{3}z+9=0$ باستعمال المميز نجد الحلين

$$z_3=\tfrac{3}{2}\sqrt{3}-\tfrac{3}{2}i,\ z_4=\tfrac{3}{2}\sqrt{3}+\tfrac{3}{2}i$$

بالتحويل إلى الشكل الأسي نجد

$$z_1=3e^{-5i\pi/6},z_2=3e^{5i\pi/6},z_3=3e^{-i\pi/6},\ z_4=3e^{i\pi/6}$$

نلاحظ أنّ قطري الرباعي $ABCD$ متناصفان فهو متوازي الأضلاع لأن

$$z_I=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}i}{2}=0$$

$$z_I=\frac{z_B+z_D}{2}=\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2}i}{2}=0$$

نلاحظ

$$AC=\sqrt{(\tfrac{3}{2}\sqrt{3}+\tfrac{3}{2}\sqrt{3})^2+(\tfrac{3}{2}i+\tfrac{3}{2}i)^2}=\sqrt{36}=6$$

$$AC=\sqrt{(\tfrac{3}{2}\sqrt{3}+\tfrac{3}{2}\sqrt{3})^2+(\tfrac{3}{2}i+\tfrac{3}{2}i)^2}=6$$

فقطرا الرباعي $ABCD$ متساويان فهو مستطيل.

[7] ليكن θ عدداً حقيقياً من $]-\pi,\pi[$. نعرّف $t=\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}$.

① احسب $\frac{2t}{1+t^2}$ و $\frac{2t}{1-t^2}$ و $\frac{1+t^2}{1-t^2}$ بدلالة النسب المثلثية لـ θ.

② أثبت صحة العلاقات:

$$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

و $$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

و $$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

الحل: ① لدينا

$$1+t^2=\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2+(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})^2}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}$$

$$=\frac{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}$$

$$1-t^2=\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2-(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})^2}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}$$

$$=\frac{4}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}$$

$$\frac{2t}{1+t^2}=2\frac{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}\times\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}$$

$$=\frac{(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$$

$$=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=\frac{2i\sin\theta}{2\cos\theta}=i\tan\theta$$

$$\frac{2t}{1-t^2}=2\frac{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}\times\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}{4}$$

$$=\frac{(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}{2}=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=i\sin\theta$$

$$\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}\times\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}{4}=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta$$

② لدينا

$$t=\frac{2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}=i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بالتعويض في العلاقات السابقة نجد

من العلاقة $\frac{2t}{1+t^2}=i\tan\theta$ نجد $\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

من العلاقة $\frac{1+t^2}{1-t^2}=\cos\theta$ نجد $\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

من العلاقة $\frac{2t}{1+t^2}=i\tan\theta$ نجد $\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

[8] في حالة عدد عقدي $z\neq -1$ نضع $Z=\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ ونفترض أنّ $z=x+iy$ و $Z=X+iY$ حيث x و y و X و Y أعداد حقيقية.

① احسب X و Y بدلالة العددين x و y.

② أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة.

③ أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل: ① نضرب البسط والمقام بمرافق المقام نجد

$$Z=X+iY=\frac{2+x-iy}{1+x-iy}=\frac{(1+x)(2+x)+y^2+iy}{(1+x)^2+y^2}$$

$$=\frac{(1+x)(2+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2}+i\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}(Z)=X=\frac{(1+x)(2+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2},\quad \mathrm{Im}(Z)=Y=\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

② يكون Z حقيقي إذا كان $\mathrm{Im}(Z)=0$ أي $z\neq -1$ و $y=0$، وبالتالي مجموعة النقاط هي محور الفواصل ما عدا النقطة التي تحقق $z=-1$ أي $(-1,0)$.

③ يكون Z تخيلياً بحتاً إذا كان $z\neq -1$ و $\mathrm{Re}(Z)=0$ أي إذا كان $(1+x)(2+x)+y^2=0$ ومنه $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ وبالتالي مجموعة النقاط هي الدائرة التي مركزها النقطة $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ ما عدا النقطة التي تقابل العدد $z=-1$ أي النقطة $(-1,0)$.

الوحدة الخامسة: تطبيقات الأعداد العقدية

1. الأشعة والأعداد العقدية

- كل شعاع يمثل عدد عقدي وبالعكس أي $\boxed{z = a + b\,i \rightleftharpoons \vec{v}(a\,,b)}$.
- العدد العقدي الممثل لشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو $\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$.
- البعد بين نقطتين $\boxed{AB = \left|z_{\overrightarrow{AB}}\right|}$.
- z_I الممثّل لمنتصف القطعة $[AB]$ هو $\boxed{z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}}$.
- z_G الممثّل لمركز ثقل المثلث MNP هو $\boxed{z_G = \dfrac{z_M + z_N + z_P}{3}}$
- z_G الممثّل لمركز ابعاد $(M,\alpha),(N,\beta),(P,\gamma)$ هو: $\boxed{z_G = \dfrac{\alpha z_M + \beta z_N + \gamma z_P}{\alpha + \beta + \gamma}}$

[1] لتكن الأعداد: $z_A = -1+4i$ و $z_B = 2+i$ و $z_C = -2-3i$

اكتب $z_{\overrightarrow{AB}}, z_{\overrightarrow{AC}}, z_{\overrightarrow{CB}}$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

[2] لتكن الأعداد: $z_A = -1+4i$ و $z_B = 2+i$ و $z_C = -2-3i$

احسب الاطوال AB, AC, CB .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

[3] لتكن: $z_A = -1+i$ و $z_B = 2+i$ و $z_C = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

ⓐ وضّع النقاط A و B و C في شكل.

ⓑ احسب الأعداد العقدية التي تمثّل الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

ⓒ احسب أطوال أضلاع ABC وبيّن إذا كان مثلثاً قائماً في C .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[4] لتكن: $z_A = -1+4i$ و $z_B = 2+i$ و $z_C = -2-3i$ احسب z_I, z_J, z_K منتصفات $[AB],[AC],[CB]$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

[5] لتكن الأعداد: $z_A = -1+4i$ و $z_B = 2+i$ و $z_C = -2-3i$

احسب z_G مركز ثقل المثلث ABC .

الحل:

....

....

....

[6] في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن الأعداد العقدية $z_A=\sqrt{3}+i$ و $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=i$ و $z_D=2i$ تمثلها النقاط A و B و C و D بالترتيب. ما قيمة λ التي تجعل D مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-1)$ و (C,λ) .

الحل:

2. الزاوية بين شعاعين ونسبة طولين:

- الزاوية بين محور الفواصل وشعاع $(\vec{u},\overrightarrow{AB})=\arg(z_{\overrightarrow{AB}})$
- الزاوية بين شعاعين $\boxed{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)}$
- نسبة طولين $\boxed{\frac{CD}{AB}=\left\|\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right\|}$
- لإثبات تعامد (BC) و (BD) نثبت أنّ $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BD}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$.
- لإثبات أن النقاط A,B,C على استقامة واحدة نثبت أن $\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BD}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}\right)=0,\pi$.

مثال1: لتكن A و B و C و D أربع نقاط تمثلها الأعداد العقدية $a=-2$ و $b=2$ و $c=-1+i$ و $d=1-3i$. أثبت أنّ المثلثين ACD و BCD قائمان.

الحل:

أي أنّ

$$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=\arg(\frac{d-b}{c-b})=\arg(\frac{-1-3i}{-3+i})$$
$$=\arg(\frac{(-1-3i)(-3-i)}{10})=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$$
$$\frac{BD}{BC}=|i|=1$$

$DB=CB$ و $CBD=\frac{\pi}{2}$

فالمثلث CBD متساوي الساقين وقائم في B.

$$(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\arg(\frac{d-a}{c-a})=\arg(\frac{3-3i}{1+i})$$
$$=\arg(\frac{3(1-i)(1-i)}{2})=\arg(-3i)=-\frac{\pi}{2}$$

أي أنّ المثلث ACD قائم في A.

[7] لتكن الأعداد: $z_A=-1+4i$ و $z_B=2+i$ و $z_C=-1+i$ و $z_D=1+3i$ احسب $\frac{CD}{AB}$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$.

الحل:

[8] نتأمّل شعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ يمثلهما العددان العقديان u و v بالترتيب. نفترض أنّ $v=iu$ ونضع $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. أثبت أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

الحل:

[9] لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$a=1+\frac{3}{4}i \text{ و } b=2-\frac{5}{4}i \text{ و } c=3+\frac{7}{4}i$$

ⓐ وضّع النقاط A و B و C في شكل. ما العلاقة التي تربط الأعداد المُمثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$؟

ⓑ استنتج أنّ ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

ⓒ احسب العدد الممثل للنقطة A' التي تجعل $ABA'C$ مربعاً.

الحل:

[10] لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية :

$z_A = 2(1+i\sqrt{3})$ و $z_B = 2(1-i\sqrt{3})$.

ⓐ أثبت أنّ A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

ⓑ جد العدد العقدي المُمثّل للنقطة C التي تجعل O مركز ثقل المثلث ABC.

ⓒ ما طبيعة المثلث ABC؟

الحل:

[11] لتكن النقاط A و B و C و D نقاطاً تمثّل بالترتيب الأعداد العقدية $a=1$ و $b=e^{i\pi/3}$ و $c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ⓐ اكتب c بالشكل الأسي، واكتب b بالشكل الجبري.

ⓑ وضّع النقاط A و B و C في مستو مزوّد بمعلم متجانس.

ⓒ أثبت أنّ الرباعي $OACB$ معيّن.

الحل:

3. معادلة الدائرة

المعادلة العقدية للدائرة هي $|z-\omega|=R$ التي مركزها النقطة $\Omega(\omega)$ ونصف قطرها R.

المعادلة الديكارتية للدائرة هي $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ التي مركزها النقطة $\Omega(x_0,y_0)$ ونصف قطرها R.

[12] ماذا تمثّل المجموعة M التي تحقق: $|z-i|=3$.

الحل:

[13] ماذا تمثّل المجموعة M التي تحقق: $|z+4-i|=|\sqrt{3}+i|$. ثم اكتب المعادلة الديكارتية لها.

الحل:

4. معادلة محور القطعة المستقيمة:

المعادلة العقدية لمحور القطعة المستقيمة $[AB]$. هي

$$|z-a|=|z-b|$$

المعادلة الديكارتية له هي $ax+by=c$ **ونستنتجها من العلاقة** $MA=MB$ **حيث** $M(x,y)$.

[14] مثّل المجموعة M: $|z+1+3i|=|z-3+2i|$ واكتب المعادلة الديكارتية لها.

الحل:

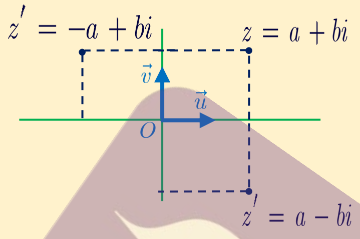
5. التحويلات الهندسية:

هنا نرمز $z \to M$ و $z' \to M'$ و $w \to \Omega \to \vec{w}$ وتكون صورة z وفق تحويل هي z'.

▪ التناظر بالنسبة الى المحور Ox:

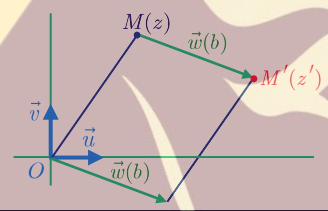
يكون $\boxed{z' = \bar{z}}$

لتناظر بالنسبة الى المحور Oy: يكون $\boxed{z' = -\bar{z}}$



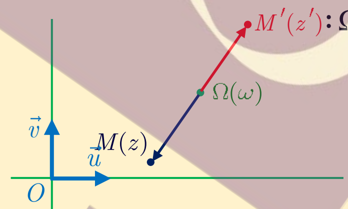
▪ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$:

يكون $\boxed{z' = z + w}$



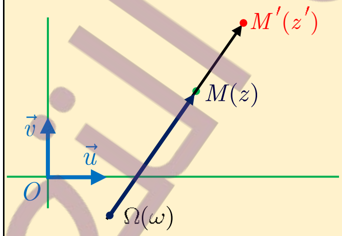
▪ التناظر بالنسبة الى النقطة Ω:

يكون $\boxed{z' - w = -(z - w)}$



▪ تحاكي مركزه Ω ونسبته k:

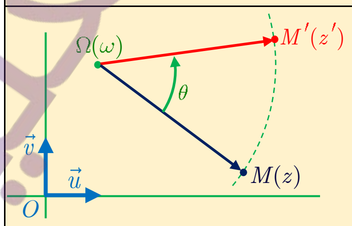
يكون $\boxed{z' - w = k(z - w)}$



▪ دوران مركزه Ω وزاويته θ:

يكون $\boxed{z' - w = e^{i\theta}(z - w)}$

والدوران الذي مركزه O وزاويته θ: يكون $\boxed{z' = e^{i\theta} z}$



[15] لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $z = 1 + i$. جد العدد العقدي z' المُمثّل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الآتي:

ⓐ T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$.

ⓑ H التحاكي الذي مركزه O ونسبته 3.

ⓒ R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ⓓ S التناظر الذي مركزه $A(1 - 3i)$.

ⓔ S التناظر المحوري الذي محوره (Ox).

ⓕ S التناظر المحوري الذي محوره (Oy).

الحل:

ملاحظة: في هذه الصيغ غالباً إذا كان أمثال العدد z :

- العدد 1 كانت الصيغة تمثل انسحاب.
- العدد -1 كانت الصيغة تمثل تناظر مركزي.
- عدد حقيقي كانت الصيغة تمثل تحاكي.
- عدد عقدي كانت الصيغة تمثل دوران.

[16] العددان العقديان a و b الممثلان للنقطتين A و B . عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A :

ⓐ $b = 2a$ ⓑ $b = a - 1 + 3i$

ⓒ $b = \bar{a}$ ⓓ $b - 1 - i = -(a - 1 - i)$

ⓔ $b = -ia$ ⓕ $b - i = e^{i\pi/3}(a - i)$

ⓖ $b - 1 = -(a - 1)$ ⓗ $b + 1 - i = e^{i\pi/4}(a + 1 - i)$

الحل:

[17] (دورة $2 - 2019$) لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية: $a = 6 - i$ و $b = -6 + 3i$ و $c = -18 + 7i$

ⓐ احسب $\dfrac{b-a}{c-a}$ واستنتج أن A و B و C على استقامة واحدة.

ⓑ بفرض $d = 1 + 6i$ حيث D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ احسب θ

ⓒ احسب العدد الممثل للنقطة N التي تجعل $OAND$ مربعاً.

الحل:

[18] (دورة $2018-1$) لتكن النقاط A و B و C و M نقاطاً تمثّل بالترتيب $a=-1-i$ و $b=1-i$ و $c=2i$ و $m=-1+i$.

ⓐ وضّع النقاط A و B و C و M في مستو مزوّد بمعلم متجانس.

ⓑ جد d يمثل D صورة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ⓒ أثبت أنّ O,B,M على استقامة واحدة.

ⓓ احسب $\arg\left(\frac{c-d}{m}\right)$ ثم استنتج $(OM)\perp(DC)$.

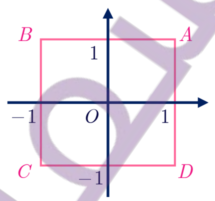
الحل:

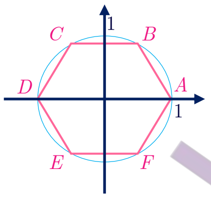
[19] لتكن النقطتان $G(3-i\sqrt{3})$ و $H(3+i\sqrt{3})$. وليكن R الدوران الذي مركزه O ويحقّق $\mathrm{R}(G)=H$. احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH})$ ، واستنتج الصيغة العقدية للدوران R .

الحل:

[20] مثّلنا في معلم متجانس مربّعاً $ABCD$ ومسدّساً $ABCDEF$.

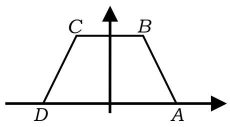
أعط الأعداد العقدية التي تمثّل كلاً من رؤوس كلّ منهما.





الحل:

[21] نصف مسدس $ABCD$ نصف قطره 4



اكتب الاعداد العقدية التي تمثل النقاط A و B و C و D احسب $\dfrac{a-c}{d-c}$ ثم استنتج قياس $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})$. واحسب $\dfrac{AC}{CD}$

الحل:

[22] تمثّل الأعداد العقدية a و b و c و d أربع نقاط A و B و C و D . أثبت أنّ الرباعي $ABCD$ يكون متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $a+c=b+d$.

الحل:

[23] نتأمّل النقاط A و B و C و D التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية $a=-1$ و $b=2+\sqrt{3}i$ و $c=\overline{b}$ و $d=3$.

a) احسب $\dfrac{c-a}{b-a}$ اسيا وجبرياً ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

b) جد n الذي يمثل مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC .

c) احسب $\dfrac{c-a}{c-d}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ADC .

d) جد m الذي يمثل مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ADC .

الحل:

6. استعمال الأعداد العقدية لحل مسائل الهندسة:

عند حل مسألة هندسية باستعمال الأعداد العقدية:

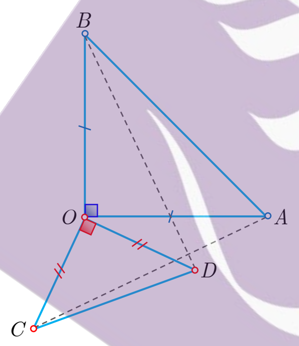
- نبحث من مثلثات متساوية الساقين لتمثل دوران.
- نختر معلم متجانس مباشر مبدؤه مراكز الدورات السابقة.
- نكتب صيغة الدوران ونبحث عن المطلوب.

ملاحظة: نقول إنّ ABC مثلث **مباشر** إذا تمت القراءة بهذا الترتيب: $A \to B \to C$ بدوران في الاتجاه الموجب.

يجب تزويد المستوي بمعلم متجانس مباشر قبل استعمال الأعداد العقدية.

[24] OAB و OCD مثلّثان قائمان ومتساويا السّاقين يشتركان بالرأس O.

ليكن الدوران ربع الدورة المباشر R الذي مركزه O. نختر معلم متجانس مباشر مبدأه O.

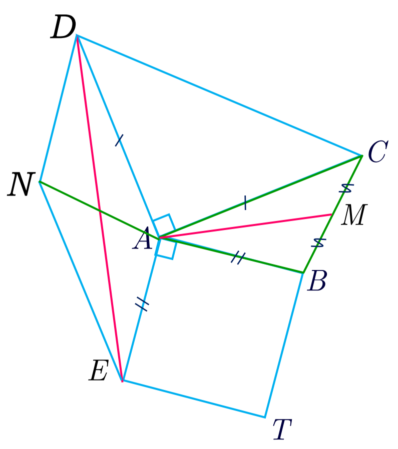


(1) جد بدلالة a و c الأعداد b و d.

(2) استنتج أنّ $AC = BD$، وأنّ $(AC) \perp (BD)$.

الحل:

[25] نتأمل في المستوي ABC مثلثاً مباشر التوجيه. لتكن M منتصف $[BC]$، وليكن $AETB$ و $ADNE$ مربع و ACD متوازي أضلاع و مثلث قائم في A ومتساوي الساقين مباشر. نختر معلم متجانس مباشر مبدأه A.



ⓐ احسب بدلالة b و c الأعداد e و d و m و n المُمثِّلة للنقاط E و D و M و N.

ⓑ احسب $\dfrac{b-c}{n-a}$ ثم استنتج $(AN) \perp (BC)$ وأنّ $AN = BC$.

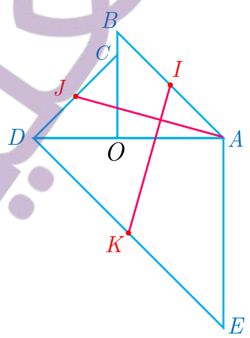
ⓒ أثبت (AM) هو ارتفاع في المثلث AED وأنّ $ED = 2AM$.

ⓓ نفترض أن A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1),(C,1),(E,3),(D,2)$ احسب $\dfrac{c}{b}$

ⓔ استنتج قياس CAB واستنتج العلاقة بين الطولين AC, AB.

الحل:

[26] نتأمّل في المستوي المثلثات OAB و OCD و ADE مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة. النقاط I و J و K هي منتصفات أوتار هذه المثلثات



ⓐ عبّر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط B و D و E .

ⓑ استنتج الأعداد العقدية z_I و z_J و z_K التي تمثّل النقاط I و J و K .

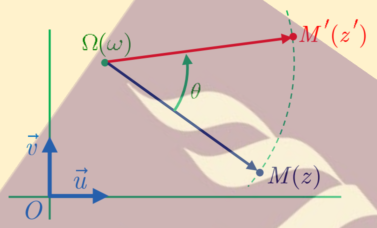
ⓒ أثبت أنّ $z_K - z_I = i(z_J - a)$.

ⓓ أثبت تعامد المستقيمين (AJ) و (IK) وأنّ $IK = AJ$.

الحل:

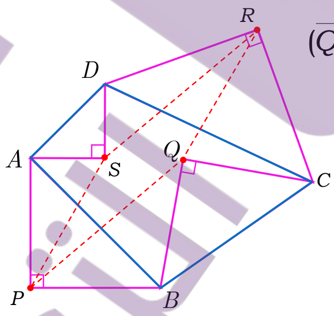
7. إيجاد مركز الدوران:

عندما يكون المطلوب يحتاج إيجاد مركز الدوران يمكن أن نتبع الأسلوب الاتي: نفترض وجود دوران مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$ وصورة M وفقه هي M' عندئذ تتحقق



$$z' - w = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - w)$$
$$z' - w = i(z - w)$$
$$z' - w = iz - iw$$
$$iw - w = iz - z'$$
$$(i-1)w = iz - z'$$
$$w = \frac{i}{i-1}z - \frac{1}{i-1}z'$$
$$w = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}z'$$

[27] بمعلم متجانس رباعياً محدباً $ABCD$. ونُنشئ عليه مثلثات قائمة ومتساوية الساقين PAB و QBC و RCD و SDA بحيث



$(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = -\frac{\pi}{2}$ و $(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{2}$

و $(\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RD}) = -\frac{\pi}{2}$ و

$(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}) = \frac{\pi}{2}$

أثبت أنّ $PQRS$ متوازي الأضلاع.

الحل:

تمارين عامة

[28] لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:
$z_A = \sqrt{3}+i$ و $z_B = \sqrt{3}-i$ و $z_C = 3\sqrt{3}+i$.

a) اكتب العدد العقدي $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي

b) استنتج طبيعة المثلث ABC .

c) عيّن $(\mathcal{E})$ النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\dfrac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً.

d) عيّن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\dfrac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً.

الحل:

[29] ليكن $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

a) اثبت أن $j^2 = \bar{j}$.

b) اكتب j و j^2 بالشكل الجبري .

c) إذا كان $a = -2+2\sqrt{3}i$ و $b = -2-2\sqrt{3}i$ و $c = 4$

احسب $a+bj+cj^2$ واستنتج نوع المثلث ABC .

الحل:

تمارين عامة محلولة

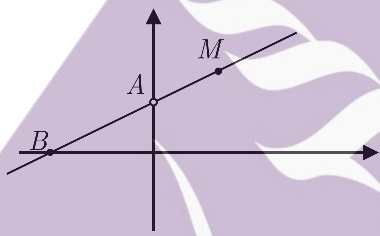
[30] نقرن $M(z)$ حيث $z \neq i$ بالنقطة $M(z')$ حيث $z' = \dfrac{z+2}{z-i}$.

① عيّن Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً حقيقيّاً.

② عيّن Γ النقاط M التي يكون عندها z' عدداً تخيليّاً بحتاً.

الحل:

① نفرض النقطتين $A \to z_A = i$ و $B \to z_B = -2$.



عندئذ تنتمي $M(z)$ إلى Δ

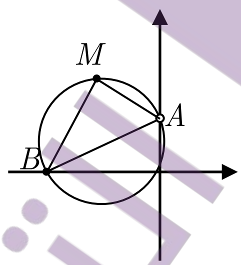
إذا وفقط إذا كان $z = z_B$

أو $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 0$

وهذا يكافئ إن $M = B$

أو $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \in \{0, \pi\}$. أي أن الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطان خطياً، أي أن النقطة M تقع على المستقيم (AB) ومختلفة عن A.

② تنتمي $M(z)$ إلى Γ إذا وفقط إذا



كان $z = z_B$ أو

$$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

وهذا يكافئ إن $M = B$ أو

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \in \{\pm\frac{\pi}{2}\}$ ، أي $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ متعامدان. فالنقطة M تنتمي إلى مجموعة النقاط التي هي رؤوس لمثلثات قائمة وترها $[AB]$ باستثناء النقطة A. أي هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ محذوفاً منها النقطة A.

[31] نتأمّل النقاط A و B و C التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية $a = 8$ و $b = -4+4i$ و $c = -4i$.

① تحقّق أنّ $b - c = i(a-c)$. واستنتج أنّ المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

② نقرن بكل نقطة $M(z)$ النقطة M' الموافقة للعدد العقدي $z' = e^{i\pi/3}z$. ما التحويل الهندسي الموافق؟

واحسب الأعداد العقدية a' و b' و c' الموافقة للنقاط A' و B' و C' صور A و B و C وفق هذا التحويل.

③ لتكن P و Q و R منتصفات القطع المستقيمة $[A'B]$ و $[B'C]$ و $[C'A]$، ولتكن p و q و r الأعداد العقدية التي توافقها. احسب p و q و r. ثم تحقّق أنّ $r - p = e^{i\pi/3}(q-p)$.

واستنتج أنّ المثلث PQR متساوي الأضلاع.

الحل:

① نحسب

$$\begin{aligned} b - c - i(a-c) &= -4+4i+4i-i(8+4i) \\ &= 8i-4-8i+4 = 0 \end{aligned}$$

ومنه $b - c = i(a-c)$.

أي B هي صورة A وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول C.

فالمثلث ABC مثلث قائم في C ومتساوي الساقين.

② M' هي صورة M وفق الدوران بزاوية $\frac{\pi}{3}$ حول O. ولكن

$e^{i\pi/3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ فيكون $a' = 4 + 4\sqrt{3}i$

و $b' = -2-2\sqrt{3}+(2-2\sqrt{3})i$ و $c' = 2\sqrt{3}-2i$

③

$$p = \frac{a'+b}{2} = \frac{4+4\sqrt{3}i+(-4+4i)}{2} = 2(1+\sqrt{3})i$$

$$q = \frac{b'+c}{2} = \frac{-2-2\sqrt{3}+(2-2\sqrt{3})i+(-4i)}{2} = -1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i$$

$$r = \frac{c'+a}{2} = \frac{2\sqrt{3}-2i+8}{2} = 4+\sqrt{3}-i$$

$$r - p = 4+\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i$$

$$q - p = -1-\sqrt{3}-3(1+\sqrt{3})i$$

$$\begin{aligned} e^{i\pi/3}(q-p) &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2}(-1-\sqrt{3}-3(1+\sqrt{3})i) \\ &= 4+\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i \end{aligned}$$

ومنه $r - p = e^{i\pi/3}(q-p)$، والنقطة R هي صورة Q وفق دوران مركزه P وزاويته $\frac{\pi}{3}$ فالمثلث PQR مثلث متساوي الأضلاع.

[32] نقرن بكل نقطة $M(z)$ من المستوي حيث $z \neq -\frac{1}{2}i$ النقطة M' التي يمثلها العدد العقدي $z' = \dfrac{z+2i}{1-2iz}$.

ولتكن Γ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1.

أثبت أنّه إذا انتمت M إلى Γ انتمت M' إلى Γ أيضاً. أيكون العكس صحيحاً؟

الحل:

تنتمي نقطة إلى الدائرة Γ إذا وفقط إذا كانت طويلتها تساوي 1 ولدينا $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1$ لذلك لدينا $z'=\dfrac{z+2i}{1-2iz}$ لنحسب $|z'|^2$

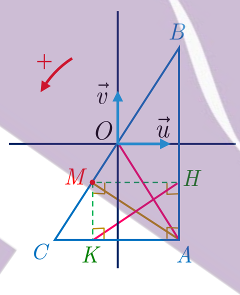
$$|z'|^2=z'\overline{z'}=\frac{z+2i}{1-2iz}\,\frac{\bar{z}-2i}{1+2i\bar{z}}$$

$$=\frac{z\bar{z}+2i\bar{z}-2iz+4}{1+2i\bar{z}-2iz+4z\bar{z}}=\frac{1+2i\bar{z}-2iz+4}{1+2i\bar{z}-2iz+4}=1 \quad : z\bar{z}=1$$

يوجد تكافؤ بين الخاصتين $|z|^2-1=0$ و $|z'|^2-1=0$،

فإذا تحققت الأولى تحققت الثانية وبالعكس. ومنه M إلى Γ (أي $|z|=1$) إذا وفقط إذا انتمت النقطة M' إلى Γ (أي $|z'|=1$).

[33] نتأمّل مثلّثاً ABC قائماً في A. النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) بالترتيب، و H و K هما المسقطان القائمان للنقطة M على (AB) وعلى (AC) بالترتيب. نختار معلماً متجانساً ومباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ بحيث تقع O في منتصف $[BC]$ ويكون $\vec{u}$ عمودياً على (AB) و $\vec{v}$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم (AB).



① علّل ما يأتي : $a=\bar{b}$ و $a-m=\overline{h-k}$.

② أثبت أنّ $\arg\left(\dfrac{a-m}{b}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\dfrac{a-m}{b}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.

واستنتج أنّ $\arg\left(\dfrac{h-k}{a}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\dfrac{h-k}{a}\right)=\dfrac{\pi}{2}$، ثُمّ أثبت تعامد المستقيمين (OA) و (HK)..

الحل:

① B نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل ومنه $a=\bar{b}$.

ولدينا الرباعي $AHMK$ مستطيل. وهو متناظر بالنسبة للمستقيم الافقي المار من منتصفي ضلعيه الشاقوليين وهذا يكافئ تناظر قطريه بالنسبة لهذا المستقيم وبإجراء انسحاب لقطريه ليصبح مبدأ الاحداثيات هو نقطة تلاقي القطرين نجد $a-m=\overline{h-k}$.

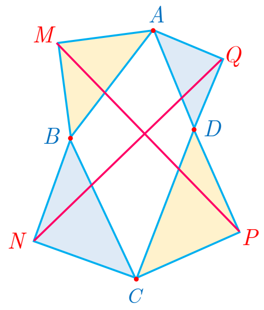
② لدينا الشعاعان $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدان

أي $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{MA})=\pm\dfrac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\dfrac{a-m}{b}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

أي $\arg\left(\overline{\left(\dfrac{h-k}{a}\right)}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$ ومن ثَم $\arg\left(\dfrac{h-k}{a}\right)=\mp\dfrac{\pi}{2}$

أي $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{KH})=\mp\dfrac{\pi}{2}$ فالمستقيمان (OA) و (HK) متعامدان.

[34] نتأمّل في المستوي الموجّه رباعياً محدباً مباشراً $ABCD$. نُنشئ خارجه النقاط M و N و P و Q التي تجعل المثلثات MBA و NCB و PDC و DQA قائمة في M و N و P و Q بالترتيب ومتساوية الساقين ومباشرة.



أثبت أنّ $MP=NQ$ وأنّ المستقيمين (MP) و (NQ) متعامدان.

الحل:

إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب مركزه $\Omega(\omega)$، كان

$$z'-\omega=e^{i\pi/2}(z-\omega)\Rightarrow\quad z'-\omega=iz-i\omega$$

$$i\omega-\omega=iz-z'\quad\Rightarrow\qquad (i-1)\omega=iz-z'$$

$$\omega=\frac{i}{(i-1)}z-\frac{1}{(i-1)}z'\Rightarrow \omega=\frac{1}{2}(1+i)z'+\frac{1}{2}(1-i)z$$

- A هي صورة B وفق دوران ربع دورة مباشرة حول M $m=\dfrac{1}{2}(1+i)a+\dfrac{1}{2}(1-i)b$.
- B هي صورة C وفق دوران ربع دورة مباشرة حول N $n=\dfrac{1}{2}(1+i)b+\dfrac{1}{2}(1-i)c$.
- C هي صورة D وفق دوران ربع دورة مباشرة حول P $p=\dfrac{1}{2}(1+i)c+\dfrac{1}{2}(1-i)d$.
- D هي صورة A وفق دوران ربع دورة مباشرة حول Q $q=\dfrac{1}{2}(1+i)d+\dfrac{1}{2}(1-i)a$.

$$p-m=-\frac{1}{2}(1+i)a-\frac{1}{2}(1-i)b+\frac{1}{2}(1+i)c+\frac{1}{2}(1-i)d$$

$$q-n=+\frac{1}{2}(1-i)a-\frac{1}{2}(1+i)b-\frac{1}{2}(1-i)c+\frac{1}{2}(1+i)d$$

$$i(p-m)=+\frac{1}{2}(1-i)a-\frac{1}{2}(1+i)b-\frac{1}{2}(1-i)c+\frac{1}{2}(1+i)d$$

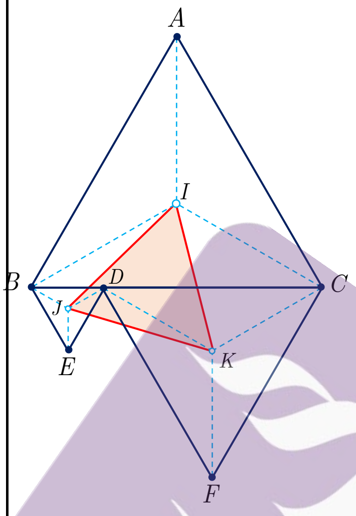
ومنه نجد $q-n=i(p-m)$.

نوجد طويلة الطرفين $|q-n|=|p-m|$

ونوجد زاوية الطرفين $\arg\left(\dfrac{q-n}{p-m}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

إذن $MP=NQ$ والمستقيمان (MP) و (NQ) متعامدان.

[35] نتأمّل في المستوى الموجّه مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً ABC مركزه النقطة I. D نقطة من داخل القطعة المستقيمة $[BC]$. نُنشئ مثلثين متساويي الأضلاع مباشرين BED و DFC. ونعرّف J و K مركزي المثلثين BED و DFC نختار معلماً متجانساً مباشراً $(B,\vec{u},\vec{v})$ بحيث $\overrightarrow{BC}=a\vec{u}$ حيث $a=BC$.



① احسب بدلالة a، العددين العقديين z_A و z_I.

② نفترض $\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}$ حيث $t\in]0,1[$. احسب بدلالة a و t، العددين z_J و z_K اللذين يمثلان J و K.

③ تحقّق أنّ $z_K-z_I=e^{i\pi/3}(z_J-z_I)$، واستنتج أنّ المثلث IJK متساوي الأضلاع.

الحل:

① A صورة C وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$، لدينا $z_B=0$, $z_C=a$ و $z_A=e^{i\pi/3}a$ فيكون:

$$z_I=\frac{1}{3}\left(z_B+z_C+z_A\right)=\frac{1+e^{i\pi/3}}{3}a$$

② من $\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}$ نستنتج أن $z_D=ta$ لأن $z_B=0$ و $z_C=a$. والنقطة E هي صورة D وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$، ومنه $z_E=e^{-i\pi/3}z_D=te^{-i\pi/3}a$ ومنه

$$z_J=\frac{1}{3}\left(z_B+z_D+z_E\right)=\frac{1+e^{-i\pi/3}}{3}ta$$

النقطة F هي صورة D وفق الدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$، إذن $z_F-z_C=e^{i\pi/3}(z_D-z_C)$ ومنه $z_F=(1-e^{i\pi/3})a+e^{i\pi/3}ta$.

$$z_K=\frac{1}{3}\left(z_C+z_D+z_F\right)=\frac{1}{3}\left((2-e^{i\pi/3})a+(1+e^{i\pi/3})ta\right)$$

$$z_K-z_I=\frac{1}{3}\left((1-2e^{i\pi/3})a+(1+e^{i\pi/3})ta\right)$$

$$z_J-z_I=\frac{1}{3}\left((1+e^{-i\pi/3})ta-(1+e^{i\pi/3})a\right)$$

$$e^{i\pi/3}(z_J-z_I)=\frac{1}{3}\left((e^{i\pi/3}+1)ta-(e^{i\pi/3}+e^{i2\pi/3})a\right)$$

$$z_K-z_I-e^{i\pi/3}(z_J-z_I)=\frac{1}{3}(1-e^{i\pi/3}+e^{i2\pi/3})a$$

لكن $e^{2i\pi/3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $e^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ومنه $1-e^{i\pi/3}+e^{i2\pi/3}=0$.

أي $z_K-z_I=\omega(z_J-z_I)$ أي إن K هي صورة J وفق الدوران الذي مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{3}$. فالمثلث IJK مثلث متساوي الأضلاع.

[36] لتكن النقاط A و A' و B و B' هي النقاط الموافقة للأعداد العقدية 1 و -1 و i و $-i$ بالترتيب. نقرن كل نقطة $M(z)$ مختلفة عن النقاط O و A و A' و B و B' النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث يكون المثلثان BMM_1 و AMM_2 قائمين ومتساويي الساقين بحيث $(\overrightarrow{M_1B},\overrightarrow{M_1M})=(\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2A})=\frac{\pi}{2}$

① ارسم شكلاً مناسباً. وعلّل صحة $z-z_1=i(i-z_1)$ و $1-z_2=i(z-z_2)$. وعبّر عن z_1 و z_2 بدلالة z.

② أثبت أنّ الشرط $OM_1=OM_2$ يُكافئ $|z+1|=|z+i|$ واستنتج Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1=OM_2$، وارسم Δ على الشكل نفسه.

③ أثبت أنّ الشرط $OM_1=M_1M_2$ يُكافئ $|z+1|^2=2|z|^2$.

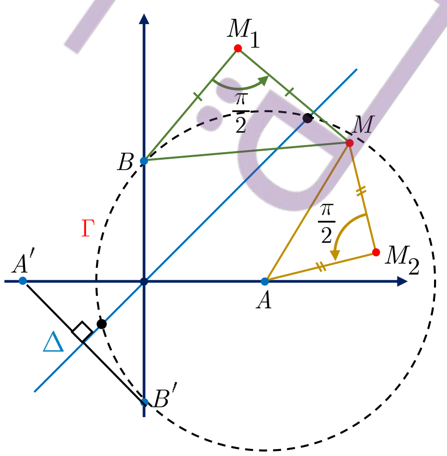
واستنتج Γ مجموعة النقاط M تحقق $OM_1=M_1M_2$، وارسم Γ.

④ استنتج النقاط M التي تجعل OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع.

الحل:

① M صورة B وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول M_1، $z-z_1=e^{i\pi/2}(i-z_1)$، أي $z-z_1=i(i-z_1)$.

ومنه $z_1=\frac{1}{2}(1+i)(z+1)$



وايضاً نجد A هي صورة M وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول M_2 أي $1-z_2=i(z-z_2)$. ومنه $z_2=\frac{1}{2}(1+i)(1-iz)$

② الشرط $OM_1=OM_2$ يكافئ

$$|z_1|=|z_2|$$
$$\Leftrightarrow |\frac{1}{2}(1+i)(z+1)|=|\frac{1}{2}(1+i)(1-iz)|$$
$$\Leftrightarrow |z+1|=|1-iz|$$
$$\Leftrightarrow |z+1|=|(-i)(i+z)|$$
$$\Leftrightarrow |z+1|=|-i||i+z|$$
$$\Leftrightarrow |z+1|=|i+z|$$
$$\Leftrightarrow |z-z_{B'}|=|z-z_{A'}|$$

ومنه Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1=OM_2$، هي مجموعة النقاط المتساوية البعد عن A' و B'، فهي إذن محور القطعة $[A'B']$، أي هي المستقيم منصف الربع الأول $\Delta : y=x$.

③ لدينا أن $z_2-z_1=-\frac{(1+i)^2}{2}z=-iz$ ومنه $M_1M_2=|z|$، و $OM_1=|z_1|=\frac{1}{\sqrt{2}}|1+z|$

أي الشرط $OM_1=M_1M_2$ يكافئ $|1+z|^2=2|z|^2$.

تنتمي $M(z)$ إلى Γ مجموعة النقاط التي تحقق $M_1M_2=OM_1$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط

$$|1+z|^2=2|z|^2$$
$$|1+x+iy|^2=2|x+iy|^2$$
$$(1+x)^2+y^2=2\left(x^2+y^2\right)$$
$$1+2x+x^2+y^2=2x^2+2y^2$$
$$x^2-2x-1+y^2=0$$
$$(x-1)^2+y^2=2$$

فالمجموعة Γ هي دائرة التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$، أي الدائرة التي مركزها A وتمر من B .

④ يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع، إذا وفقط إذا انتمت M إلى تقاطع المجموعتين Γ و Δ .

بالحل المشترك نجد

$$(x-1)^2+x^2=2$$
$$2x^2-2x-1=0$$

ومنه $x=y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ or $x=y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

ومنه OM_1M_2 متساوي الأضلاع، إذا وفقط كان العدد العقدي الممثل للنقطة M يساوي:

$z=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$ أو $z=\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$.

التحليل التوافقي

1. العاملي:

$n!$ هو جداء العدد n تنازلياً حتى نصل الى الواحد.

أي $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$

خواص: $n! = n \times (n-r)!$ ، $0! = 1,$

مثال1:

$5! = 5 \times 4!$ | $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$20! = 20 \times 19! = 20 \times 19 \times 18!$ | $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$(n+1)! = (n+1) \times n!$ | $1! = 1 \quad ,0! = 1$

[1] اختزل المقادير : ⓐ $\dfrac{21!}{20!}$ ⓑ $\dfrac{17!}{15!}$

الحل:

[2] اختزل المقادير :

ⓐ $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ ⓑ $\dfrac{(n-1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n+1)!}$

ⓒ $\dfrac{(2n)! - (2n-1)!}{2(n!) - (n-1)!}$ ⓓ $\dfrac{(2n)!}{1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n-1)}$

الحل:

2. الترانيب:

P_n^r هو جداء العدد n تنازلياً r مرة. أي

$P_n^r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$

خواص: $P_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

مثال2: $P_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ ، $P_5^2 = 5 \times 4 = 20,$

[3] اختزل المقادير :

ⓐ P_7^3 ⓑ $\dfrac{P_6^3}{P_5^3}$ ⓒ $\dfrac{6!}{(4!)^2} \times P_5^2$

الحل:

3. التوافيق:

يعطى بالعلاقة: $\binom{n}{r}=\frac{P_n^r}{r!}$

خواص: $\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$

و $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ ، $\binom{n}{1}=n,$ ، $\binom{n}{n}=1,$ ، $\binom{n}{0}=1,$

مثال3:

$\binom{6}{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20,\qquad \binom{7}{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21,$

$\binom{100}{98}=\binom{100}{2}=\frac{100\times99}{2\times1}=4950$

ملاحظة: إذا كانت r معلومة نستعمل $\binom{n}{r}=\frac{P_n^r}{r!}$ وإلا نستعمل

$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$

مثال4: أثبت صحة العلاقة $\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1}$.

$\ell_1=\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{(n+1)!}{(n-r)!(r+1)!}\times\frac{(n-r)!r!}{n!}$

$=\frac{(n+1)\times n!}{(n-r)!(r+1)\times r!}\times\frac{(n-r)!r!}{n!}=\frac{n+1}{r+1}=\ell_2$

مثال5: أثبت صحة المساواة $r\binom{n}{r}=n\binom{n-1}{r-1}$ في حالة $n\geq 2$ و $1\leq r\leq n$.

$\ell_1=n\binom{n-1}{r-1}=n\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}=\frac{n!}{(n-r)!(r-1)!},$

$\ell_2=r\binom{n}{r}=r\frac{n!}{(n-r)!r!}=r\frac{n!}{(n-r)!r(r-1)!}$

$=\frac{n!}{(n-r)!(r-1)!}$

[4] اختزل المقادير : ⓐ $\binom{12}{8}$ ⓑ $4!\times\binom{6}{2}$ ⓒ $\binom{6}{3}\times P_6^3$

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

ملاحظة: شرط التوافيق والتراتيب أن n,r اعداد طبيعية و $n\geq r$.

خاصة: $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ تكافئ $p=q$ أو $p+q=n$.

[5] عين الأعداد الطبيعية n التي تحقّق الشرط المعطى :

ⓐ $\binom{n}{2}=36$ ⓑ $3\binom{n}{4}=14\binom{n}{2}$

ⓒ $P_{n+2}^4=14P_n^3$ ⓓ $8\binom{n+1}{2}=P_{n+2}^4$ ⓔ $\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[6] احسب قيمة r إذا علمت أن $\frac{1}{\binom{4}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r}}+\frac{1}{\binom{6}{r}}$.

الحل:

4. عدد التبديلات:

عدد التبديلات n عنصر مختلف هو $R=n!$.

عدد تبديلات n عنصر مكونة من صنفين متكررين تكرار احدهما هو r هو $\binom{n}{r}$

$AAB \to \{AAB,\ ABA, BAA\}\ :R=\binom{3}{1}=3$

$ABC \to \{ABC,\ ACB, BAC, BCA, CBA, CAB\}:R=3!=6$

$AABBBB: R=\binom{6}{2}=15$

[7] بكم طريقة يمكن تبديل عناصر المجموعة $E=\{a,b,c,d\}$

الحل:

[8] بكم طريقة يمكن وقوف 6 اشخاص في صف واحد.

الحل:

5. مسائل العمليات:

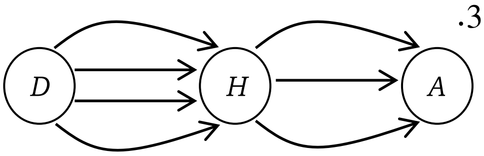
نستعمل فيها المبدأ الأساسي للعد:

عدد طرق انجاز **عدة مهام** يساوي عدد طرق انجاز المهمة الأولى × عدد طرق انجاز المهمة الثانية وهكذا.

ملاحظة: عدد طرق انجاز **مهمة من عدة مهام** متاحة يساوي عدد طرق انجاز المهمة الأولى + عدد طرق انجاز المهمة الثانية وهكذا.

هنا نرسم خانات بعدد العمليات ونضع في الخانات الشروط أن وجدت وتحت كل خانة عدد طرق إنجازها (حيث يصبح و ×، أو +)

مثال6: بكم طريقة يمكن الذهاب من دمشق إلى حلب. علماً إن عدد طرق الذهاب من دمشق إلى حمص هي 4 وعدد طرق الذهاب من حمص إلى حلب هي 3.



عدد الطرق الذهاب من دمشق إلى حلب هو عدد طرق الذهاب من دمشق إلى حمص مضروب بعدد طرق الذهاب من حمص إلى حلب.

أي $4\times 3=12$

[9] لتكن المجموعة $S=\{1,2,5,8,9\}$.

ⓐ كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر S؟

ⓑ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلف من منزلتين من المجموعة S؟

ⓒ كم عدداً زوجياً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من المجموعة S؟

الحل:

[10] $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ ما عدد الاعداد المؤلفة من ثلاث منازل

ⓐ من A.

ⓑ متمايزة من A.

ⓒ وهي الاعداد الفردية

ⓓ من الاعداد الفردية والاصغر من 300.

الحل:

[11] لتكن المجموعة $S=\{1,2,3,4,5\}$ ما هو عدد عناصر H من الأعداد التي تتميَّز بالخصائص التالية:

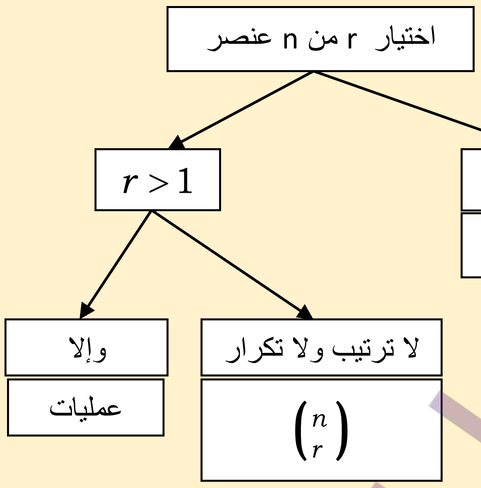
ⓐ أرقامها مختلفة ومأخوذة من S ، مؤلفة من 5 عناصر ولا يوجد أي عدد منها من مضاعفات 5.

ⓑ أرقامها مختلفة ومأخوذة من S ، كل منها أكبر من 30000 .

ⓒ أرقامها مختلفة ومأخوذة من S ، لا يوجد أي عدد منها من مضاعفات 5 ، كل منها أكبر من 30000 .

الحل:

6. مسائل الاختيار:



- إذا كان الاختيار على التتالي فالترتيب مهم.
- عند تشكيل الاعداد والكلمات والمناصب والمسابقات يكون الترتيب مهم.

مثال7: بكم طريقة يمكن اختيار حرفان من المجموعة $\{A,B,C\}$ في كل من الحالات الآتية:

ⓐ الاختيار معاً: $\{AB,BC,AC\}$. عدد الطرق هو $\binom{3}{2}=3$

ⓑ الاختيار على التتالي دون إعادة:

$\{AB,BC,AC,BA,CB,CA\}$. عدد الطرق هو $3\times2=6$

ⓒ الاختيار على التتالي مع إعادة:

$\{AB,BC,AC,BA,CB,CA,AA,BB,CC\}$

عدد الطرق $3\times3=9$

[12] يتألف مجلس إدارة من سبعة أعضاء، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس، ونائب للرئيس، وأمين سرٍ للنادي؟

الحل:

[13] اشترك 10 متسابق في سباق للدراجات، يجري فيه توزيع ثلاث ميداليات (ذهبية، فضية، برونزية) كم نتيجة ممكنة لهذا السباق؟

الحل:

[14] كم كلمة من ثلاثة حروف يمكننا تكوينها انطلاقاً من حروف كلمة SYRIA.

الحل:

[15] في أحد مراكز الهاتف مهندسان، وأربعة عمال، والمطلوب كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الصيانة في المركز قوامها:

ⓐ مهندس واحد وعامل واحد؟

ⓑ مهندس واحد وعاملين ؟

الحل:

[16] (دورة 2 – 2018) في أحد مراكز الهاتف 3 مهندس، و5 عمال، والمطلوب كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الصيانة في المركز قوامها مهندس واحد وعاملين ؟

الحل:

[17] نريد تأليف لجنة مكوّنة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي 7 رجل و 6 امرأة.

ⓐ كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها؟

ⓑ كم لجنة مختلفة مكوّنة من رجلين وامرأتين يمكننا تأليفها؟

الحل:

- عند اختيار مجموعة جزئية نختار بلا ترتيب وبلا تكرار (أي توفيقاً).
- عدد القوائم فتكون مع ترتيب و تكرار.
- عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n عنصراً : 2^n.

[18] لتكن المجموعة $A = \{1,2,3,4,5\}$ ما عدد المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين في A.

الحل:

[19] لتكن المجموعة $A = \{1,2,3,4,5\}$ ما عدد جميع المجموعات الجزئية المؤلفة من A.

الحل:

[20] لتكن المجموعة $A = \{1,2,3,4,5\}$ ما عدد القوائم المؤلفة من عنصرين في A.

الحل:

[21] في أحد الامتحانات يُطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة. بكم طريقة يمكن للطالب

ⓐ أن يختار الأسئلة؟

ⓑ إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية؟

الحل:

[22] (دورة $1-2017$) في أحد الامتحانات يُطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية. بكم طريقة يمكن للطالب

ⓐ أن يختار الأسئلة؟

ⓑ إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية؟

الحل:

[23] بكم طريقة يمكن وقوف ثلاث إناث وأربع ذكور في صف وفق

ⓐ عدم وجود شروط.

ⓑ كل جنس جنباً إلى جنب.

ⓒ عدم وجود اثنان من نفس الجنس جنباً إلى جنب.

ⓔ أسعد في طرف وسعيد في الطرف الآخر.

الحل:

[24] 7 كتب مختلفة 4 منها للمؤلف A و 3 منها للمؤلف B. بكم طريقة يمكن ترتيبها على رف على أن

ⓐ يكون كل مؤلف كتبه معاً.

ⓑ يكون ثلاث كتب للمؤلف A على أحد الطرفين.

ⓒ يكون ثلاث كتب للمؤلف A على الطرف الأول.

الحل:

[25] يريد طالب أن يدرس مواده السبعة بشكل متتابع.

a) بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد لدراستها.

b) بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد إذا كانت المادة الأولى هي الرياضيات والأخيرة هي الفيزياء.

الحل:

[26] فريق فيه 3 مدرسين و4 طلاب بكم طريقة يمكن ترتيبهم في صف

a) المدرسين أولاً ثم الطلاب.

b) الطلاب معا والمدرسين معاً.

c) مدرس في البداية ومدرس في والنهاية.

الحل:

[27] كتابين كيمياء و 4 كتاب رياضيات و 3 كتاب فيزيا:

a) ما عدد طرق ترتيب كنت كل اختصاص متجاور؟

b) ما عدد طرق ترتيبها علماً أن كتابين الكيمياء يجب أن يبقيا معاً ؟

الحل:

[28] يريد معلّم توزيع جوائز مختلفة على عدد من التلاميذ وبحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل. ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية في كل حالة آتية؟

ⓐ عدد الجوائز هو 5 وعدد التلاميذ هو 5.

ⓑ عدد الجوائز هو 6 وعدد التلاميذ هو 5.

الحل:

[29] لتكن $S = \{1,2,3,\ldots,19,20\}$. كم عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 ؟

الحل:

ملاحظة: في مسائل العمليات إذا أمكن التبديل وكان الترتيب مهم نضرب بعدد التبديلات R.

[30] صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة. كم عدد النتائج المختلفة

ⓐ لهذا السحب؟	ⓑ التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟
ⓒ التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟	ⓓ تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟
ⓔ التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل؟	ⓕ تشتمل على الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء؟

الحل:

[31] صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة. كم عدد النتائج المختلفة

ⓐ لهذا السحب؟	ⓑ التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟
ⓒ التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟	ⓓ تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟
ⓔ التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل؟	ⓕ تشتمل على الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء؟

الحل:

[32] صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء. نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً. كم عدد النتائج المختلفة

ⓐ لهذا السحب؟	ⓑ التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟
ⓒ التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟	ⓓ تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟

الحل:

[33] (دورة 2 – 2020) صندوق يحوي الكرات المرقمة $\{1,2,3,4,5\}$. نسحب كرتين **على التتالي مع الإعادة**، والمطلوب:

ⓐ كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

ⓑ كم عدد النتائج الممكنة بحيث مجموع رقمي الكرتين فردي؟

الحل:

[34] صندوق يحوي الكرات المرقمة $\{6,7,8,9\}$. نسحب ثلاث كرات **على التتالي مع الإعادة**، والمطلوب: كم عدد النتائج الممكنة

ⓐ لهذه التجربة ؟	ⓑ الكرة الأولى تحمل الرقم 6، والثانية 9 والثالثة 7 ؟
ⓒ الكرات تحمل الرقم 6 والرقم 9 والرقم 7 ؟	ⓓ الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7 ؟

الحل:

[35] أعد السؤال السابق بافتراض السحب على التتالي ودون إعادة.

الحل:

[36] صندوق يحوي الكرات المرقمة $\{6,7,8,9\}$. نسحب ثلاث كرات **في آن معاً**، والمطلوب:

ⓐ كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

ⓑ كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العدد 7 ؟

ⓒ كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العددان 8 و 9 ؟

الحل:

[37] أراد صف فيه 5 طالب و6 طالبات تأليف لجنة نشاط للصف مؤلفة من خمسة أشخاص. بكم لجنة مختلفة يمكن تأليفها إذا كان في اللجنة:

ⓐ ثلاثة طلاب وطالبتين

ⓑ طالب على الأكثر

ⓒ طالبة على الأقل.

الحل:

[38] هاتف ذو قفل مكون من أربع خانات من القيم $0,1,\dots,9$.

ⓐ ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل؟

ⓑ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل ومكوّنة من خانات متمايزة

ⓒ الرماز الصحيح مكوّن من 1 و 5 و 9 و 9 ولكنه نسي ترتيبها. كم رمّازاً مختلفاً يمكن أن يكوّن ؟

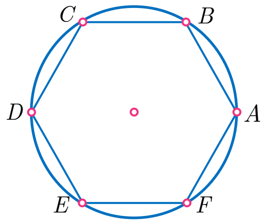
الحل:

[39] (دورة 1 – 2020) مزياع ذو قفل يفتح عند إدخال رمّاز (كود) مكون من ثلاث خانات من القيم $0,1,\dots,5$.

ⓐ ما عدد الرمّازات التي تصلح للقفل؟

ⓑ ما عدد الرمازات التي تصلح للقفل وخاناتها مختلفة مثنى مثنى.

الحل:



[40] لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F موزّعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدّس منتظم.

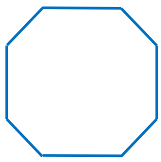
ⓐ ما عدد القطع المستقيمة التي يمكن أن نحصل عليها من الرؤوس؟

ⓑ ما عدد الأشعة غير الصفرية التي نحصل عليها من الرؤوس؟

ⓒ ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها من الرؤوس؟

ⓓ ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

الحل:

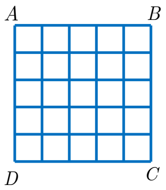


[41] مضلع محدب عدد رؤوسه 8 والمطلوب

ⓐ جد عدد أقطار المضلع. ثم عمّم النتيجة السابقة إلى حالة n

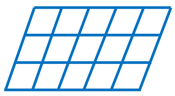
ⓑ جد عدد نقاط تقاطع أقطار المضلع (في حال عدم انطباق نقطتي تقاطع).

الحل:



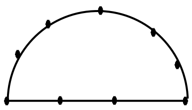
[42] في الشكل المجاور نتأمّل شبكة منتظمة مرسومة في مربّع $ABCD$. ونرغب بحساب عدد المستطيلات المرسومة في الشكل. علماً أن المربع مستطيل خاصٌ.

الحل:



[43] (دورة $1-2018$) في الشكل المجاور كم عدد متوازيات الاضلاع.

الحل:



[44] ما عدد المثلثات التي رؤوسها من النقاط التسعة.

الحل:

7. منشور ذي الحدين:

▪ منشور ذي الحدين هو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

[45] انشر العبارات الآتية:

ⓐ $(2+x)^4$ ⓑ $(1-x)^5$ ⓒ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ ⓓ $(1+2i)^3$

الحل:

▪ الحد ذي الدليل r في $(a+b)^n$ هو $T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$، ويحوي $n+1$ حداً هي T_0 و T_1 و … و T_n.

[46] عيّن في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحدّ الذي يحوي x^2 .

الحل:

[47] (دورة $2019-1$) عيّن الحدّ المستقل عن x في $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$

الحل:

[48] ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي منشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ على حدّ ثابت مستقل عن x.

الحل:

[49] ما الحد الثابت في منشور $(x^2 - \frac{i}{x})^9$ ؟

الحل:

8. التحويل إلى مجموع نسب مثلثية لمضاعفات الزاوية:

لتحويل عبارة $\sin^n x$ أو $\cos^n x$ إلى مجموع حدود من الصيغة $a\cos(qx)$ أو $a\sin(qx)$.

الخطوات: نستعمل علاقتي أويلر : (أويلر – نشر – تجميع – أويلر)

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ أو $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

ثُمَّ ننشر $(e^{ix} - e^{-ix})^n$ ثُمَّ نستعمل علاقتي أويلر

مثال8: اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x ، ثم أجب

① $\sin^3 x$ ، واستنتج قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$.

الحل: ① بتطبيق دستور أويلر $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ ثم منشور ذي الحدين نجد

$$\sin^3 x = -\frac{1}{8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3\times\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$$\frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x} = -\frac{4\sin^3 x}{\tan^3 x} = -4\cos^3 x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x} = -4 .$$

[50] حوّل إلى مجموع نسب مثلثية لمضاعفات x :

ⓐ $\cos^4 x$ ⓑ $\sin^4 x$ ⓒ $\sin^5 x$.

الحل:

تمارين عامة

[51] أثبت $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$. ثم جد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$.

الحل:

[52] انشر $(e^{ix}+e^{-ix})^3$ ثم استنتج $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. ثم جد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos x}{x\sin x}$.

الحل:

[53] اكتب بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات x للعبارة $\cos^4 x$ ، واستنتج $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4 x\,dx$.

الحل:

[54] أثبت صحة المساواة $\cos^2 x\sin^2 x = \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4x$ ، ثم احسب $\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\sin^2 x\,dx$.

الحل:

تمارين عامة محلولة

[55] اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x ، ثُم أجب

① $\sin^4 x$ ، واستنتج قيمة $\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx$.

② $\cos x\sin^4 x$ ، واحسب $F(x)=\int_0^x \cos t\sin^4 t\,dt$ بطريقتين

الحل: ① بمثل ما سبق نجد

$$\sin^4 x=\frac{1}{16}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4$$
$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}-4\times\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+3\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(\cos 4x-4\cos 2x+3\right)$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x\right]_0^{\pi/2}=\frac{3\pi}{16}$$

② نطبق دستوري أويلر

$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ و $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$ نجد

$$\cos x\sin^4 x=\frac{1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4$$
$$=\frac{1}{32}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3$$
$$=\frac{1}{32}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}-3\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+2\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{16}\left(\cos 5x-3\cos 3x+2\cos x\right)$$

ومنه : $F(x)=\frac{1}{80}\sin 5x-\frac{1}{16}\sin 3x+\frac{1}{8}\sin x$.

ولكن $F(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x$. ومنه

$\sin^5 x=\frac{1}{16}\sin 5x-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{5}{8}\sin x$.

[56] يريد معلّم توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على n تلميذاً وبحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل. ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية ؟

الحل: يزيد عدد الجوائز على عدد الطلاب بمقدار واحد. أي هناك تلميذ واحد ينال جائزتين وينال كل واحد من باقي الطلاب جائزة واحدة فقط.

نرمز للهدايا بالرمز $\boxed{1},\boxed{2},\boxed{3},\dots\boxed{n},\boxed{n+1}$

نرمز للطلاب بالرمز $\boxed{T_1},\boxed{T_2},\boxed{T_3},\dots\boxed{T_n}$

عملية التوزيع تتضمن مرحلتين:

<u>المرحلة الأولى:</u> اختيار الجائزتين اللتين ستوزعان معاً. وهنا نختار مجموعة مؤلفة من جائزتين من مجموعة جميع الجوائز التي عناصرها $n+1$.

أي عدد الطرق الاختيار هي $\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$

<u>المرحلة الثانية:</u> باعتبار الجائزتين المختارتين جائزة واحدة وبالتالي أصبح عدد الجوائز هو n جائزة لكل واحد من الطلاب جائزة. وهنا عدد الطرق الاختيار هو عدد تباديل n جائزة: $P_n^n=n!$.

وبحسب المبدأ الأساسي في العد أن العدد الكلي للنتائج المختلفة يساوي عدد النتائج الممكنة للمرحلة الأولى × عدد النتائج الممكنة للمرحلة الثانية

$$\binom{n+1}{2}\cdot n!=\frac{n\cdot(n+1)!}{2}$$

[57] احسب قيمة كل من n و r علماً : $3\cdot\binom{n}{r}=8\cdot\binom{n}{r-1}$ و $2\cdot\binom{n+1}{r+1}=5\cdot\binom{n+1}{r}$

الحل:

من العلاقة $3\cdot\binom{n}{r}=8\cdot\binom{n}{r-1}$ نجد

$$3\binom{n}{r}=8\binom{n}{r-1}$$
$$3\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=8\frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r+1)!}$$
$$\frac{3}{r(r-1)!\cdot(n-r)!}=\frac{8}{(r-1)!\cdot(n-r+1)(n-r)!}$$
$$\frac{3}{r}=\frac{8}{(n-r+1)}$$
$$3n+3=11r$$

من العلاقة $2\cdot\binom{n+1}{r+1}=5\cdot\binom{n+1}{r}$ نجد

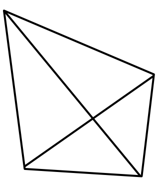
$$2\cdot\binom{n+1}{r+1}=5\cdot\binom{n+1}{r}$$
$$2\frac{(n+1)!}{(r+1)!\cdot(n-r)!}=5\frac{(n+1)!}{r!\cdot(n-r+1)!}$$
$$\frac{2}{(r+1)r!\cdot(n-r)!}=\frac{5}{r!\cdot(n-r+1)(n-r)!}$$
$$\frac{2}{r+1}=\frac{5}{n-r+1}$$
$$2n=7r+3$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين

$$11r-3n=3,\ 7r-2n=-3$$

نجد $(n,r)=(54,15)$.

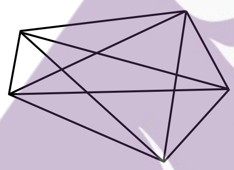
[58] نتأمّل مضلّعاً محدّباً مؤلفاً من n ضلعاً $(n\geq 4)$. نسمّي قطراً في المضلّع كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين في



المضلع. نفترض أننا في الحالة العامّة حيث لا تتلاقى أي ثلاثة أقطار في نقطة واحدة إلا إذا كانت هذه النقطة أحد رؤوس المضلع. احسب D_n عدد نقاط تقاطع أقطار المضلّع بدلالة n. يمكن البدء بتعيين D_4 و D_5.

الحل: في حالة مضلع رباعي D_4: يتقاطع قطرا أي رباعي محدب في نقطة واحدة داخله أي $D_4=1$ أي كل أربع نقاط تمثل رؤوس رباعي تعطي نقطة تقاطع واحدة لقطري هذا الرباعي.

في حالة مضلع خماسي D_5: نجد أن الرؤوس هي نقاط تقاطع للأقطار فمن كل رأس قطران للمضلع ويضاف إلى ذلك نقاط التقاطع الواقعة داخل المضلع وهنا كل أربعة رؤوس لها قطرين متقاطعين في نقطة واحدة إذن $D_5=5+5=10$.



في الحالة العامة: عدد نقاط التقاطع داخل المضلع هي عدد الرباعيات التي رؤوسها من رؤوس المضلع وعددها $\binom{n}{4}$ ويضاف إليها في حالة $n\ge 5$ رؤوس المضلع فمن كل رأس أكثر من قطر للمضلع وعدد هذه الرؤوس n. فالعدد الكلي لنقاط تقاطع الأقطار في حالة $n\ge 5$ يساوي $\binom{n}{4}+n$.

[59] ليكن كثير الحدود $F(x)=(1+ax)^5(1+bx)^4$ حيث a و b عددان طبيعيان، فإذا علمت أن أمثال x تساوي 62، فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$؟

الحل: ليكن كثير الحدود $x\mapsto F(x)$ يكون أمثال x هي $F'(0)$.

لدينا $F(x)=(1+ax)^5(1+bx)^4$ ومنه

$$F'(x)=5a(1+ax)^4(1+bx)^4+4b(1+ax)^5(1+bx)^3$$

ومنه أن $F'(0)=5a+4b$. أي $5a+4b=62$ ولكن a و b موجبان إذن

$$4a+4b\le 5a+4b\le 5a+5b$$
$$4(a+b)\le 5a+4b\le 5(a+b)$$
$$4(a+b)\le 62\le 5(a+b)$$
$$4\le \frac{62}{(a+b)}\le 5$$
$$\frac{4}{62}\le \frac{1}{(a+b)}\le \frac{5}{62}$$
$$\frac{62}{5}\le a+b\le \frac{62}{4}$$
$$12.4\le a+b\le 15.5$$

ولكن لدينا فرضاً $a+b$ عدد طبيعي أي $a+b\in\{13,14,15\}$

وبالتجريب نجد $(a,b)=(10,3)=(6,8)=(2,13)$

أي $a+b\in\{13,14,15\}$

[60] لتكن $S=\{1,2,3,\ldots,29,30\}$. كم عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 ؟

الحل: لاحظ الاعداد

$$1,2,3,\ \ldots\ldots,\ n,\ n+1,\ n+2,$$
$$n+3,\ n+4,\ n+5,\ldots\ldots,28,\ 29,\ 30$$

نختار ثلاثة أعداد منها فنكون أمام الحالات التالية:

① $3n,3n',3n''$ فإن المجموع

$3n+3n'+3n''=3(n+n'+n'')$ مضاعف للعدد 3.

② $3n-1,3n'-1,3n''-1$ فإن المجموع

$$(3n-1)+(3n'-1)+(3n''-1)=3(n+n'+n''-1)$$

مضاعف للعدد 3.

③ $3n+1,3n'+1,3n''+1$ فإن المجموع

$$(3n+1)+(3n'+1)+(3n''+1)=3(n+n'+n''+1)$$

مضاعف للعدد 3.

④ $3n+1,3n'+1,3n''-1$ فإن المجموع

$(3n+1)+(3n'+1)+(3n''-1)=3(n+n'+n'')+1$ ليس مضاعف للعدد 3.

⑤ $3n+1,3n'-1,3n''-1$ فإن المجموع

$(3n+1)+(3n'-1)+(3n''-1)=3(n+n'+n'')-1$ ليس مضاعف للعدد 3.

⑥ $3n,3n'+1,3n''-1$ فإن المجموع

$(3n)+(3n'+1)+(3n''-1)=3(n+n'+n'')$ مضاعف 3.

⑦ $3n,3n'-1,3n''-1$ فإن المجموع

$(3n)+(3n'-1)+(3n''-1)=3(n+n'+n'')-2$ ليس مضاعف للعدد 3.

⑧ $3n,3n'+1,3n''+1$ فإن المجموع

$(3n)+(3n'+1)+(3n''+1)=3(n+n'+n'')+3$ ليس مضاعف للعدد 3.

نلاحظ أن المجموع في الحالات ①,②,③,⑥ هو مضاعف للعدد 3.

عدد الاعداد $3n$ هو 10 وعدد الاعداد $3n'+1$ هو 10 وعدد الاعداد $3n''+1$ هو 10

عدد النتائج الممكنة للحالة ① هو $\binom{10}{3}=120$

عدد النتائج الممكنة للحالة ② هو $\binom{10}{3}=120$

عدد النتائج الممكنة للحالة ③ هو $\binom{10}{3}=120$

عدد النتائج الممكنة للحالة ⑥ هو $\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}=1000$

عدد النتائج الممكنة الكلية $120+120+120+1000=1360$

[61] A_n المعرّف بالصيغة : $A_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

① تحقّق أنّ A_3 و A_4 هما عددان طبيعيان.

② أثبت أنّ A_n عددٌ طبيعي أياً كانت قيمة العدد الطبيعي n.

الحل: ① لدينا $A_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$

$$A_1=\left(2+\sqrt{3}\right)^1+\left(2-\sqrt{3}\right)^1=4$$

$$A_2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2=14$$

$$A_3=\left(2+\sqrt{3}\right)^3+\left(2-\sqrt{3}\right)^3=52,$$

$$A_4=\left(2+\sqrt{3}\right)^4+\left(2-\sqrt{3}\right)^4=194$$

② نرمز T_r إلى الحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدين للمقدار $(2+\sqrt{3})^n$ فنجد $T_r=\binom{n}{r}2^{n-r}(\sqrt{3})^r$

ونرمز T'_r إلى الحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدين للمقدار $(2-\sqrt{3})^n$ فنجد $T'_r=\binom{n}{r}2^{n-r}(-\sqrt{3})^r$

نلاحظ أن
$$T_r+T'_r=\binom{n}{r}2^{n-r}(\sqrt{3})^r+\binom{n}{r}2^{n-r}(-\sqrt{3})^r=(1+(-1)^r)\binom{n}{r}2^{n-r}(\sqrt{3})^r$$

فإذا كان r عدد زوجي أي $r=2k$ كان $T_r+T'_r=2\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k$ وهذا عدد طبيعي

وإذا كان r عدد فردي أي $r=2k+1$ كان $1+(-1)^r=0$ ومن ثم $T_r+T'_r=0$ وهذا عدد طبيعي أيضاً.

ولكن A_n يساوي مجموع جميع هذه الحدود ولكنها أعداد طبيعية كان مجموعها عدداً طبيعياً أي $A_n\in\mathbb{N}$.

[62] في حالة n عدد طبيعي. ادرس كيف تتغيّر الحدود المتتالية $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n}$، واستنتج أنّ المساواة $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ تُكافئ $p=q$ أو $p+q=n$.

الحل: ① ندرس الحدود $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n}$ عند القيم الصغيرة للعدد n.

في حالة $n=3$ نجد $(1,3,3,1)$. وفي حالة $n=4$ نجد $(1,4,6,4,1)$.

في حالة $n=5$ نجد $(1,5,10,10,5,1)$.

نخمن أن حدود المتتالية تتزايد في البداية ثُم تتناقص.

لنثبت ذلك نقارن حدّين متتاليين بأن نحسب نسبتهما ونقارن هذه النسبة مع الواحد.

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{\frac{n!}{(r+1)!\cdot(n-r-1)!}}{\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}}=\frac{n!}{(r+1)!\cdot(n-r-1)!}\times\frac{r!\cdot(n-r)!}{n!}$$
$$=\frac{r!\cdot(n-r)!}{(r+1)!\cdot(n-r-1)!}=\frac{r!\cdot(n-r)(n-r-1)!}{(r+1)r!\cdot(n-r-1)!}=\frac{n-r}{r+1}$$

② لمقارنة هذه النسبة مع الواحد ندرس حالتين: في حالة $n=2m$ لدينا

$\binom{n}{r+1}<\binom{n}{r}$	$\binom{n}{r+1}>\binom{n}{r}$
$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}<1$ $\frac{n-r}{r+1}<1\quad :n=2m$ $\frac{2m-r}{r+1}<1$ $2m-r<r+1$ $2m<2r+1$ $m\le r$	$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}>1$ $\frac{n-r}{r+1}>1\quad :n=2m$ $\frac{2m-r}{r+1}>1$ $2m-r>r+1$ $2m>2r+1$ $m>r$

ومنه جدول التغيرات

r	0		m		$2m$
$\binom{2m}{r}$	1	$\nearrow$	$\binom{2m}{m}$	$\searrow$	1

ومنه $\binom{2m}{m}$ هو أكبر قيم التابع أي أكبر قيم أعداد التوافيق $\left(\binom{2m}{r}\right)_{0\le r\le 2m}$.

في حالة $n=2m+1$ لدينا

$\binom{n}{r+1}<\binom{n}{r}$	$\binom{n}{r+1}>\binom{n}{r}$
$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}<1$ $\frac{n-r}{r+1}<1\quad :n=2m+1$ $\frac{2m+1-r}{r+1}<1$ $2m<2r$ $m<r$	$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}>1$ $\frac{n-r}{r+1}>1\quad :n=2m+1$ $\frac{2m+1-r}{r+1}>1$ $2m>2r$ $m>r$

ومنه جدول التغيرات

r	0		m	$m+1$		$2m+1$
$\binom{2m+1}{r}$	1	$\nearrow$	$\binom{2m+1}{m}$	$\binom{2m+1}{m+1}$	$\searrow$	1

ومنه $\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m+1}$ أكبر أعداد التوافيق $\left(\binom{2m+1}{r}\right)_{0\le r\le 2m}$.

نستنتج أن المتتالية $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n/2}$ متزايدة تماماً. فإذا تحققت المساواة $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ وكان p و q أصغر من $n/2$ كان $p=q$. وإذا كان أحدهما أكبر من $n/2$ مثلاً q أكبر تماماً من $n/2$ والآخر أصغر منه كان $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-q}$ أي $p=n-q$ أما إذا كان كلا العددين p و q أكبر من $n/2$ كان $\binom{n}{n-p}=\binom{n}{n-q}$ أي $n-p=n-q$ أو $p=q$.

فالمساواة $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ تعني أن $p=q$ أو $p+q=n$.

الاحتمالات

1. مسائل الإلقاء :

نستعمل هذا النوع عند القاء قطع نقود ونرد (اقل من 4 اربع قطع)

الطريقة: نكتب فضاء العينة ثم نكتب الحدث ونستعمل الدستور :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

- فضاء العينة : مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة ونرمزها Ω.
- يكون الحدثان A,B مستقلان احتمالياً إذا كان:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

مثال 1: نلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة، ونتأمّل الحدث A : «العدد الظاهر زوجي» والحدث B : «العدد الظاهر أوّلي».

ⓐ احسب $P(A)$ و $P(B)$ و $P(A\cap B)$

ⓑ أيكون هذان الحدثان مستقلَّين احتمالياً؟

الحل: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)==\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap B)==\frac{1}{6}$$

$$P(A)\ .\ P(B)==\frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B)\neq P(A).P(B)$$

فالحدثان غير مستقلَّين احتمالياً.

[1] نلقي قطعة نقود مرتين متتاليتين. احسب احتمال ظهور شعارين.

الحل:

2. مسائل الجدول :

نستخدم الجدول عند وجود عمليتين مستقلتين ولكل عملية خيارات متعددة.

الطريقة: نرسم جدول نضع فيه نتائج عملية عمود والأخرى سطر ونستعمل $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

مثال 2: صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة الصندوق (I) يحتوي كرات مرقمة بالأعداد $1,2,3$.

الصندوق (II) يحتوي كرات مرقمة بالأعداد $2,3,4,5$. نسحب عشوائياً كرتين من الصندوق (I)، وكرة من الصندوق (II) احسب احتمال أن يكون مجموع الأرقام المسحوبة زوجياً .

	2	3	4	5
1,2	1,2,2	$\boxed{1,2,3}$	1,2,4	$\boxed{1,2,5}$
1,3	$\boxed{1,3,2}$	1,3,3	$\boxed{1,3,4}$	1,3,5
2,3	2,3,2	$\boxed{2,3,3}$	2,3,4	$\boxed{2,3,5}$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

[2] صندوقان متماثلان الصندوق (I) يحتوي بطاقات مرقمة بالأعداد A,A,B . الصندوق (II) يحتوي بطاقات مرقمة بالأعداد A,B .

نسحب عشوائياً بطاقة من الصندوق (I)، وبطاقة من الصندوق (II) احسب احتمال أن تكون البطاقتين متماثلتين.

الحل:

3. مسائل المخطط الشجري:

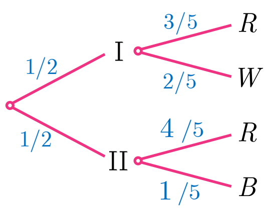
نستعمل المخطط الشجري عند وجود عمليات متتالية.

الطريقة: نرسم شجرة الإمكانات ونضع على فروعها الاحتمالات الموافقة مع مراعاة أن مجموع احتمالات فروع كل عقدة هي 1.

مثال 3: صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة. الصندوق (I) يحوي ثلاث كرات حمراء واثنتان بيضاوان ويحوي الصندوق (II) أربع كرات حمراء وكرة سوداء.

نختار صندوق ونسحب عشوائياً منه كرة

ⓐ احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

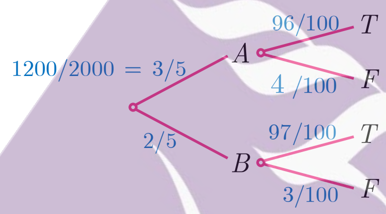


$$P(W)=P(I)\times P(W\mid I)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

ⓑ احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

$$P(R)=P(I)\times P(R\mid I)+P(II)\times P(R\mid II)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{7}{10}$$

مثال4: يضمّ مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح. ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 ، صنّعت الورشة A منها 1200 وصنّعت البقية الورشة B . هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة A معطوبة، وتكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة. نسحب عشوائياً مصباحاً.

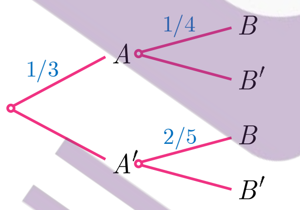


ⓐ أعط تمثيلاً شجرياً.

ⓑ احسب احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

$$P(R)=P(A)\times P(F\mid A)+P(B)\times P(F\mid B)$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{4}{100}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{100}=\frac{18}{500}$$

[3] استناداً إلى التمثيل الشجري المبين في الشكل المجاور.

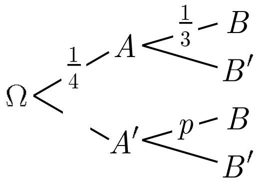


ⓐ عيّن الاحتمالات $P(A')$ و $P(B'|A)$ و $P(B'|A')$.

ⓑ استنتج قيمة كل من $P(A\cap B)$ و $P(A'\cap B)$ و $P(B)$.

الحل:

[4] ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور. كيف نختار قيمة p حتى يكون A و B مستقلين احتمالياً؟



الحل:

[5] في مدرستنا 30% من الطلاب يلعبون كرة المضرب. المدرسة تضم 60% من الذكور، وأنّ 55% من هؤلاء لا يلعبون كرة المضرب. ما احتمال أن تكون طالبة عشوائياً لا تلعب كرة المضرب؟

الحل:

4. مسائل يكون فيها الاحتمال معلوم:

نستعمل هذا النوع عند وجود احتمالات ناتجها معلوم مثل $P(A)=\frac{1}{2}$

الطريقة: نستعمل دساتير الاحتمال:

- $P(A')=1-P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$
- $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- $A'\cap B'=(A\cup B)'$
- إذا كان A,B مستقلان فإن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

- A' يقرأ عدم حصول A
- $A\cap B$ يقرأ حصول A و B أي وقوع الحدثين معاً
- $A\cup B$ يقرأ حصول A أو B أي وقوع أحد الحدثين على الأقل.
- $A\cap B'$ يقرأ حصول A بدون B.

$\boxed{\times}\xleftrightarrow{\text{استقلال}}\boxed{\text{و}}\longleftrightarrow\boxed{\cap}$ ، $\boxed{+}\xleftrightarrow{\text{تنافي}}\boxed{\text{أو}}\longleftrightarrow\boxed{\cup}$

- ناتج الاحتمال يقع في المجال $[0,1]$.
- إذا كان الحدثان A و B مستقلين احتمالياً كان الحدثان A و B' مستقلين احتمالياً أيضاً.

مثال: إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ فاحسب $P(A\cup B)$ و $P(A|B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{13}{20}$$
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{10}$$

[6] إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{3}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$ فاحسب $P(A')$ و $P(A\cup B)$ و $P(A\cap B')$ و $P(B|A)$ و $P(A'\cap B')$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

- إذا علم ناتج قاعدة نعوض فيها.

[7] إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ فاحسب $P(B|A)$ و $P(A\cap B')$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[8] إذا $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(B|A)=\frac{1}{4}$ و $P(B|A')=\frac{4}{5}$ فاحسب $P(B)$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

▪ **ملاحظة:** في حالة تصويب شخصان على هدف أو تقدم طالبان لامتحان يكون الحدثان مستقلان احتمالياً.

[9] يطلق كل من الراميين A و B طلقةً واحدة على هدف. احتمال أن يصيب A الهدف $\frac{6}{10}$ واحتمال أن يصيب B الهدف $\frac{7}{10}$.

ⓐ ما احتمال أن يصيب الراميان الهدف معاً ؟

ⓑ ما احتمال أن يصيب أحدهما على الأقل الهدف؟

ⓒ ما احتمال عدم إصابة الهدف؟

ⓓ ما احتمال أن يصيب أحدهما فقط الهدف؟

الحل:

5. مسائل سحب الكرات أو البطاقات:

عندئذ نميز الحالات:

اختيار r عنصر من n

معاً	على التتالي دون اعادة	على التتالي مع اعادة
$\binom{n}{r} / \binom{n}{r}$	كسور متناقصة	كســـور ثابتة

مثال5: يحتوي صندوق على خمس كرات: ثلاث كرات سوداء اللون، وكرتان بيضاوان. نسحب عشوائياً كرتين.

(1) في حالة السحب معاً:

ⓐ احسب احتمال سحب كرتين بيضاوين.

$\boxed{W}\boxed{W}$

$$P(A)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

ⓑ احسب احتمال سحب كرتين مختلفتين باللون.

$\boxed{W}\boxed{B}$

$$P(B)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$$

ⓒ احسب احتمال سحب كرتين لهما نفس اللون.

$\boxed{W}\boxed{W}$ $\boxed{B}\boxed{B}$

$$P(C)=\frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}$$

ⓓ احسب احتمال احداها على الأقل سوداء.

$\boxed{B}\boxed{W}$ $\boxed{B}\boxed{B}$

$$P(D)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{9}{10}$$

(2) في حالة السحب على التتالي دون اعادة:

ⓐ احسب احتمال سحب كرتين مختلفتين باللون.

$\boxed{W}\boxed{B}$

$$P(E)=\frac{2}{5}\frac{3}{4}(2!)=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}$$

ⓑ احسب احتمال الأولى بيضاء والثانية سوداء.

$\boxed{W}\boxed{B}$

$$P(F)=\frac{2}{5}\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

ⓒ احسب احتمال احداها على الأكثر سوداء.

$\boxed{W}\boxed{B}$ $\boxed{W}\boxed{W}$

$$P(R)=\frac{2}{5}\frac{3}{4}(2!)+\frac{2}{5}\frac{1}{4}=\frac{7}{10}$$

(3) أعد الحل في حالة السحب على التتالي مع إعادة.

$\boxed{W}\boxed{B}$

ⓐ $P(E)=\frac{2}{5}\frac{3}{5}(2!)=\frac{12}{25}$

$\boxed{W}\boxed{B}$

ⓑ $P(F)=\frac{2}{5}\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$

$\boxed{W}\boxed{B}$ $\boxed{W}\boxed{W}$

ⓒ $P(R)=\frac{2}{5}\frac{3}{5}(2!)+\frac{2}{5}\frac{2}{5}=\frac{16}{25}$

مثال6: يحتوي صندوق على خمس كرات. ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق. يتكون فضاء العينة إذن من مجموعة المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين والمأخوذة من بين خمسة عناصر. ما احتمال الحدث

ⓐ A : «للكرتين اللون ذاته» ⓑ B : «مجموع رقمي الكرتين يساوي 3» ⓒ B علماً أنّ A قد وقع

الحل: ⓐ هنا السحب كرتين حمراوين أو كرتين سوداوين

$$\mathbb{P}(A)=\frac{\binom{3}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3+1}{10}=\frac{2}{5}$$

ⓑ هنا النتيجة تضم كرة تحمل الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2

$$\mathbb{P}(B)=\frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}$$

ⓒ $\mathbb{P}(B\cap A)=\frac{2}{10}$ ومنه $\mathbb{P}(B\mid A)=\frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{1}{2}$.

[10] يحتوي صندوق على ثلاثة حروف A وحرفين اثنين B. ما احتمال الحصول على AA في الحالات:

ⓐ نسحب عشوائياً حرفاً من الصندوق ثُمّ نُعيده ونسحب حرفاً ثانياً.

ⓑ نسحب عشوائياً على التتالي حرفين من الصندوق دون إعادة.

ⓒ نسحب عشوائياً معاً حرفين من الصندوق .

الحل:

[11] يحتوي صندوق على ثلاثة حروف A وحرفين اثنين B. ما احتمال الحصول على A و B في الحالات:

ⓐ نسحب عشوائياً حرفاً من الصندوق ثُمّ نُعيده ونسحب حرفاً ثانياً.

ⓑ نسحب عشوائياً على التتالي حرفين من الصندوق دون إعادة.

ⓒ نسحب عشوائياً معاً حرفين من الصندوق .

الحل:

[12] لدينا الأعداد $\{0,0,1,1,2\}$ نسحب رقمين معاً والمطلوب

ⓐ احسب احتمال أن يكون الرقمين زوجيان.

ⓑ احسب احتمال أن يكون الرقمين مجموعها زوجي.

ⓑ احسب احتمال أن يكون الرقمين مجموعها فردي.

الحل:

[13] أعد حل السؤال السابق في حالة السحب دون إعادة.

الحل:

[14] أعد حل السؤال السابق في حالة السحب مع إعادة.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

6. مسائل الاحتمال الشرطي :

يستعمل عند وجود جملتين احداها معلومة والأخرى مطلوبة.

- اغلب الكلمات الدالة على الاحتمال الشرطي هي (علماً أن، إذا علمت، بشرط أن، إذا كانت).
- طريقة الحل: ⓐ نفرض الحدثين N المطلوب و G المعلوم ⓑ نعوض $P(N\mid G)=\dfrac{P(N\cap G)}{P(G)}$.

مثال7: يحتوي صندوق على خمس كرات: ثلاث كرات سوداء اللون، وكرتان بيضاوان. نسحب عشوائياً على التتالي دون اعادة كرتين.

ⓐ احسب احتمال الأولى بيضاء والثانية سوداء.

$$\boxed{W}\boxed{B}$$

$$P(E)=\frac{2}{5}\,\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

ⓑ احسب احتمال الأولى سوداء علماً أن الثانية بيضاء.

G : « الكرة الثانية بيضاء » N : «الكرة الأولى سوداء »

$$\boxed{B}\boxed{W}\quad \boxed{W}\boxed{W}$$

$$P(G)=\frac{3}{4}\,\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\,\frac{1}{4}=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$$

$$\boxed{B}\boxed{W}$$

$$P(G\cap N)=\frac{3}{4}\,\frac{2}{5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

ومنه $P(N\mid G)=\dfrac{P(N\cap G)}{P(G)}=\dfrac{3}{4}$

مثال8: تتألّف عائلة من أربعة أطفال. نقبل أنّه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفلة أنثى. ونفترض أن الولادات المتتالية هي أحداث مستقلة احتمالياً.

نرمز A و B و C إلى الأحداث: A:«للأطفال الأربعة الجنس نفسه» B: «هناك طفلان ذكران وطفلتان» C : «الطفل الثالث أنثى»

ⓐ احسب احتمال وقوع كل من الأحداث A و B و C .

ⓑ احسب $P(A\cap C)$ ثُمّ $P(C|A)$. هل A و C مستقلين احتمالياً ؟

ⓒ احسب $P(B\cap C)$ ثُمّ $P(C|B)$. أيكون B و C مستقلين ؟

الحل: ⓐ

$MMMM \quad FFFF$

$$P(A)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8},$$

$MMFF \qquad \square\square F\square$

$$P(B)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\binom{4}{2}=\frac{6}{16},\quad P(C)=\frac{1}{2}$$

ⓑ $A\cap C$ هو الحدث الموافق لكون الأطفال الأربعة جميعها إناثاً.

$$P(C\mid A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad P(A\cap C)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

نلاحظ $P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$ ومنه الحدثان مستقلان احتمالياً.

ⓒ $B\cap C$ هو الحدث (نصف الأطفال بنات والطفل الثالث أنثى):

$MM\boxed{F}F$

$$P(B\cap C)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\binom{3}{2}=\frac{3}{16}$$

$$P(C|B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}\frac{1}{2}$$

نلاحظ $P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$ ومنه B و C مستقلين احتمالياً.

[15] يحتوي الصندوق (1) على 5 زرقاء و1 حمراء والصندوق (2) على 4 زرقاء و2 حمراء والصندوق (3) على 3 زرقاء و3 حمراء، نختار عشوائياً واحداً من الصناديق الثلاثة، ثُمّ نختار منه كرة.

ⓐ احسب احتمال الحدث: «سحب كرة زرقاء اللون».

ⓑ إذا كانت الكرة المسحوبة زرقاء ما احتمال تكون من الصندوق (2)

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

[16] لدينا صندوقان يحوي الأول I ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة حمراء. و يحوي الثاني II كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء. نسحب كرة من الصندوق الأول ثم نضعها في الصندوق الثاني ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني يرمز R_i إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق i حمراء).

ⓐ احسب $\mathbb{P}(R_1)$ و $\mathbb{P}(R_2)$.

ⓑ إذا كانت الكرة الأولى زرقاء، ما احتمال تكون الثانية حمراء.

ⓒ إذا كانت الكرة الثانية حمراء، ما احتمال تكون الأولى زرقاء.

الحل:

[17] نتأمّل صندوقاً يحتوي على ثلاث كرات سوداء وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجّل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثُمّ نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق. وبعدئذ نسحب مجدداً كرة من الصندوق. لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث: «الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون»، وليكن R_1 الحدث : «الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون».

ⓐ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.

ⓑ احسب احتمال الحدث R_2.

ⓒ إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون؟

الحل:

7. مسائل المتحول العشوائي:

جدول القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي $X = \{x_1, x_2, x_3\}$:

x_i	x_1	x_2	x_3
p_i	p_1	p_2	p_3
$x_i p_i$	$x_1 p_1$	$x_2 p_2$	$x_3 p_3$
x_i^2	x_1^2	x_2^2	x_3^2
$x_i^2 p_i$	$x_1^2 p_1$	$x_2^2 p_2$	$x_3^2 p_3$

- القانون الاحتمالي: هو $p_i = P(X = x_i)$
- التوقّع الرياضي: هو $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
- توقّع X^2 : هو $\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$
- التباين : هو $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- الانحراف المعياري هو $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

مثال9: يحتوي صندوق على خمس كرات: ثلاث كرات سوداء اللون، وكرتان بيضاوان. نسحب عشوائياً معاً كرتين من الصندوق. ونسمّي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة عدد الكرات البيضاء المسحوبة. عيّن مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الحل: مجموعة القيم للمتحول العشوائي X هي $X=\{0,1,2\}$

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10} \quad \text{و} \quad \mathrm{P}(X=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$$

و $$\mathrm{P}(X=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$
$x_i p_i$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$
x_i^2	0	1	4
$x_i^2 p_i$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{6}{10}+2^2\times\frac{1}{10}=1 \quad .$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

مثال10: نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقّمة من 1 إلى 6. نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1، ونحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه 6، ونخسر درجتين في بقية الحالات. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X، واحسب $E(X)$ و $V(X)$.

الحل: مجموعة النتائج الممكنة هي $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$،
و X يأخذ قيمه في $X=\{-2,1,6\}$

$$\mathrm{P}(X=6)=\mathrm{P}(\{6\})=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(\{1\})=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(X=-2)=\mathrm{P}(\{2,3,4,5\})=\frac{4}{6}$$

x_i	1	-2	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}-2\times\frac{4}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{-1}{6}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{4}{6}+36\times\frac{1}{6}=\frac{53}{6}$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{53}{6}-\frac{1}{36}=\frac{317}{36}$$

مثال11: يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب معاً ثلاث كرات. المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب: ثلاث كرات حمراء (الحدث R_3)، ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب: كرتان حمراوان وكرة خضراء (الحدث R_2)، وأخيراً يأخذ القيمة 0 في بقية الحالات.

ⓐ احسب $P(R_3)$ و $P(R_2)$.

ⓑ عيّن القانون الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعه الرياضي.

الحل: ⓐ $$\mathrm{P}(X=5)=\mathrm{P}(R_3)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{12}$$

و $$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(R_2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{5}{12}.$$

ⓑ قانون X:

x_i	0	3	5
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

التوقع الرياضي. $$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{2}+3\times\frac{5}{12}+5\times\frac{1}{12}=\frac{5}{3} \quad .$$

[18] يحتوي صندوق على خمس كرات: اثنتان تحملان الرقم 1 واثنتان تحملان الرقم 2 وواحدة تحمل الرقم 3. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق. ونسمّي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين. عيّن مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الحل:

[19] أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب على التتالي مع إعادة.

الحل:

[20] يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء. نسحب معاً ثلاث كرات من الصندوق. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد الألوان المختلفة بين الكرات.

ⓐ ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

ⓑ احسب كلاً من $P(X=1)$ و $P(X=3)$.

ⓒ استنتج قيمة $P(X=2)$. واحسب توقّع X .

الحل:

[21] (دورة $2-2018$) يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء و 4 كرات خضراء. نسحب معاً ثلاث كرات. المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب: ثلاث كرات حمراء ، ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب: كرتان حمراوان وكرة خضراء، وأخيراً يأخذ القيمة 0 في بقية الحالات.

عيّن القانون الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعه الرياضي.

الحل:

[22] يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء وخمس كرات سوداء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات. ليكن المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 4 إذا كانت ثلاث كرات بيضاء، ويأخذ القيمة -3 إذا كانت كرتان بيضاوان وكرة سوداء، ويأخذ القيمة n في بقية الحالات. احسب $\mathrm{P}(X=4)$ و $\mathrm{P}(X=-3)$. استنتج $\mathrm{P}(X=n)$ وعيّن القانون الاحتمالي لـ X واحسب n كي يكون توقعه الرياضي 0.

الحل:

[23] (دورة $1 - 2017$) نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاثة مرات متتالية حيث احتمال ظهور الشعار $\frac{1}{3}$. نسمّي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة عدد الشعارات الظاهرة. عيّن مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الحل:

[24] (دورة $1-2019$) يحتوي صندوق على ثلاث كرات حمراء: تحمل الارقام 0 و 1 و 2. وكرتان بيضاوان تحمل الارقام 0 و 1 نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من الصندوق.

ⓐ احسب احتمال A سحب كرتين لهما نفس اللون.

ⓑ X المتحوّل العشوائي الذي يدل على مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين. عيّن قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه.

الحل:

[25] يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$، نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التتالي دون إعادة، ليكن X المتحول العشوائي يدل على أكبر رقمي البطاقتين المسحوبتين.

a) عيّن قيم X ، واكتب جدول قانونه الاحتمالي.

b) احسب $\mathbb{E}(X)$.

الحل:

8. مسائل الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين :

ليكن مثلاً المتحول العشوائي $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ والمتحول العشوائي $Y=\{y_1,\ y_2\}$ عندئذ:

- اسفل كل عمود يساوي مجموع خانات هذا العمود.
- أيمن كل سطر يساوي مجموع خانات هذا السطر.
- نقول إنّ المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً إذا كانت كل خانة تساوي يمينها بأسفلها. أي

$$P\big((X=x_i)\cap(Y=y_j)\big)=P(X=x_i)\times P(Y=y_j)$$

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3	$P(Y=y_j)$
y_1	$P(X=x_1\cap Y=y_1)$	$P(X=x_2\cap Y=y_1)$	$P(X=x_3\cap Y=y_1)$	$P(Y=y_1)$
y_2	$P(X=x_1\cap Y=y_2)$	$P(X=x_2\cap Y=y_2)$	$P(X=x_3\cap Y=y_2)$	$P(Y=y_2)$
$P(X=x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$P(X=x_3)$	1

مثال12: صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة الصندوق (I) يحتوي كرات مرقمة بالأعداد $3,2,1$. الصندوق (II) يحتوي كرات مرقمة بالأعداد $4,2$. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق (I)، وكرة من الصندوق (II) ليكن المتحوّل X العشوائي الذي يمثل مجموع رقمي الكرتين ، وليكن المتحوّل Y العشوائي الذي يمثل أصغر هذين الرقمين. اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)، واستنتج القانون الاحتمالي لكل من X و Y، أيكون X و Y مستقلين احتمالياً؟ واحسب توقع X.

	1	2	3
2	2,1	2,2	2,3
4	4,1	4,2	4,3

$Y \backslash X$	3	4	5	6	7	$P(Y=y_i)$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{3}{6}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

نلاحظ أن

$$P\big((X=3)\cap(Y=1)\big)=\frac{1}{6}\neq P(X=3)\times P(Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{18}$$

ومنه X و Y غير مستقلين احتماليا

$$\mathbb{E}(X)=3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{2}{6}+6\times\frac{1}{6}+7\times\frac{1}{6}=\frac{30}{6}=5$$

[26] في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X,Y) من المتحولات العشوائية، أكمله وبيّن إذا كان المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً.

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

الحل:

[27] أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من متحولات العشوائية (X,Y)، علماً أنّ المتحولين العشوائيين X و Y مستقلّان احتمالياً.

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

الحل:

[28] صندوق فيه يحتوي كرات حمراء مرقمة بالأعداد $3,2,1$. وكرات بيضاء مرقمة بالأعداد $4,2$. نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل مجموع رقمي الكرتين ، وليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يمثل أصغر هذين الرقمين.
اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)، واستنتج القانون الاحتمالي لكل من X و Y، أيكون X و Y مستقلين احتمالياً؟ واحسب توقع X.

الحل:

9. مسائل برنولي: (المتحولات العشوائية الحدانية):

نرمز له بالرمز $B(n,p)$. حيث n عدد مرات تكرار التجربة.
تكون التجربة برنولية عندما:
–تهتم بوقوع نتيجة واحدة – يتكرر – بنفس الظروف.
ليكن p احتمال الحدث الذي نهتم به S
و $q=1-p$
و n عدد مرات تكرار هذا الحدث.
نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات تكرار S ويكون $X=\{0,1,\dots,n\}$.
وتكون الخطوات:
- نكتب قيم n,p,q,X.
- نستعمل القانون الحداني: $\boxed{P(X=r)=\binom{n}{r}p^r q^{n-r}}$
- ويكون $E(X)=np$ و $V(X)=npq$

مثال13: نُلقي حجر نرد متوازن 5 مرات متتالية. ما احتمال الحصول على العدد 6 مرتان فقط؟

الحل: هنا تجربة برنوليّة، لدينا $q=\frac{5}{6}$, $p=\frac{1}{6}$, $n=5$. ويتبع X قانوناً حدانياً $\mathcal{B}(5,\frac{1}{6})$.
نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات تكرار ظهور العدد 6 ويكون $X=\{0,1,2,3,4,5\}$.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$$

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=10\times\frac{125}{7776}=\frac{1250}{7776}$$

مثال14: نلقي خمس قطع نقود متوازنة في آن معاً. ما احتمال الحصول على الوجه H ثلاث مرات فقط ؟

الحل: هذه التجربة تُكافئ إلقاء قطعة النقود ذاتها خمس مرات متتالية، لدينا $n=5, p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$
نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات تكرار ظهور الشعار ويكون $X=\{0,1,2,3,4,5\}$.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$$

مثال15: يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء. عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف البيضاء.

ⓐ نسحب عشوائياً كرة. ما احتمال أن تكون حمراء اللون؟

ثلاثة أرباع عدد كرات الصندوق حمراء اللون

$$\mathrm{P}(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

n	$3n$
W	R

ⓑ نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي ومع الإعادة. ونعرّف X المتحوّل العشوائي الذي يدلّ على عدد الكرات الحمراء المسحوبة. ما القانون الاحتمالي للمتحول X.

هذه تجربة برنولية، X يدل على عدد مرات الحصول على كرة حمراء

$$\left(n = 3,\ p = \frac{3}{4}, q = \frac{1}{4}\right)$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\tfrac{3}{4}\right)^0\left(\tfrac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^1\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\tfrac{3}{4}\right)^2\left(\tfrac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)^3\left(\tfrac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

مثال16: نُلقي حجر نرد ثماني مرات متتالية. ما احتمال A «الحصول على عدد زوجي 3 مرات على الأقل».

الحل: $\left(n = 8, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}\right)$ ليكن X عدد مرات الحصول على عدد زوجي $X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \ge 3) &= 1 - \mathrm{P}(X < 3)\\
&= 1 - \left(\mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 0)\right)\\
&= 1 - \left(\binom{8}{2}\cdot p^2 \cdot q^6 + \binom{8}{1}\cdot p^1 \cdot q^7 + \binom{8}{0}\cdot p^0 \cdot q^8\right)\\
&= 1 - \left(\binom{8}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{0}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^8\right)\\
&= 1 - \frac{28 + 8 + 1}{256} = \frac{219}{256}
\end{aligned}$$

[29] نُلقي قطعة نقود 4 مرات متتالية.

ⓐ ما احتمال A «الحصول على شعار واحد فقط».

ⓑ ما احتمال A «الحصول على شعار مرة على الأقل».

ⓒ ما التوقع والتباين.

الحل:

[30] نُكرّر 5 مرات تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين، احسب احتمال

ⓐ A : «الحصول ثلاث مرات على وجهين H »

ⓑ B : «الحصول على وجهين H مرّة على الأقل».

الحل:

[31] يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من 3 أدوار. يكسب A الدور الواحد باحتمال 0.6. يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار. ما احتمال أن يربح B؟

الحل:

[32] (دورة 2 – 2021) يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء. عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة اضعاف الكرات البيضاء.

ⓐ نسحب عشوائياً كرة. ما احتمال أن تكون حمراء اللون؟

ⓑ نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي ومع الإعادة. ونعرّف X متحوّل عشوائي يدلّ على عدد الكرات الحمراء المسحوبة. عيّن قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الحل:

[33] (دورة 1 – 2018) X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية. الجدول غير المكتمل المجاور لـ X. واحتمال النجاح p

k	0	1	2	3
p	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$		

ⓐ جد $P(X=2)$ و$P(X=3)$.

ⓑ ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X؟

ⓒ ما تباين المتحول العشوائي X؟

الحل:

تمارين عامة

[34] نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع | | | | | بأحد العددين $+1$ أو -1. احسب احتمال

ⓐ أن يكون المجموع مساوياً الصفر.

ⓑ ألاّ يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين.

الحل:

[35] نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع | | | | | بأحد العددين 3 أو 0. احسب احتمال

1. أن يكون المجموع مساوياً 6.
2. ألاّ يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين.
3. نسمّي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة عدد الخانات التي تحوي 3. عيّن مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الحل:

[36] لدينا الأعداد $\{0,0,1,1,2\}$ نسحب رقمين مع اعادة والمطلوب

ⓐ احسب احتمال أن يكون الرقمين مجموعها زوجيان.

ⓑ احسب احتمال أن يكون إحداها 0 علماً أن يكون مجموعها زوجي.

ⓒ نعرّف X متحوّل عشوائي يدلّ على مجموع رقمي الكرتين المسحوبة. عيّن قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه

الحل:

[37] تتألّف عائلة من 5 أطفال. احسب احتمال :

a) A : للأطفال الخمسة الجنس نفسه

b) B : ثلاثة ذكور وانثيين.

c) C : الطفل الرابع أنثى.

d) $P(B\cap C)$ ثُمّ $P(C|B)$.

e) أيكون الحدثان B و C مستقلين احتمالياً؟

الحل:

[38] اذا كان لدينا القانون الاحتمالي

x_i	0	1	2	α
p_i	0.1	p_1	p_2	p_α

p_0 و p_1 و p_2 و p_α حدود متعاقبة في متتالية حسابية.

a) احسب كلاً من p_1 و p_2 و p_α .

b) احسب α لكي يكون التوقع 2.

الحل:

[39] ليكن a عدداً حقيقياً. نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرّفة بشرط البدء $u_1 = a$ والعلاقة $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$.

ⓐ لتكن $(v_n)_{n\ge1}$ المتتالية المعرّفة بالصيغة $v_n = 13u_n - 4$. أثبت أنّ $(v_n)_{n\ge1}$ متتالية هندسية، وعيّن أساسها، ثُمّ عبّر عن v_n بدلالة n.

ⓑ استنتج صيغة u_n بدلالة n و a. ثُمّ احسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

ⓒ غالباً ينسى مدرّس مفتاح الصف. E_n : «نسي المدرّس المفتاح في اليوم n». لنضع $p_n = P(E_n)$ نفترض أنّه إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم n، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{1}{10}$، وإذا لم ينس المدرّس المفتاح في اليوم n، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{4}{10}$. جد في حالة $n \ge 1$ p_{n+1} بدلالة p_n.

ⓓ استنتج p_n بدلالة n و p_1. أتتعلّق نهاية $(p_n)_{n\ge1}$ بقيمة p_1 ؟

الحل:

[40] لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, \dots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة حمراء. وكلّ صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء. نسحب كرة من الصندوق u_1 ثم نضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ...، نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n. يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء).

c) احسب $\mathbb{P}(R_1)$ و $\mathbb{P}(R_2)$.

d) إذا كانت الكرة الثانية حمراء، ما احتمال تكون الأولى زرقاء.

e) X متحوّل عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة في أول مرتين. عيّن قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه.

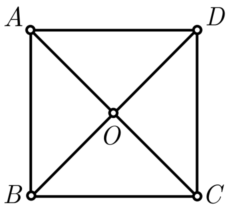
f) احسب p_{n+1} بدلالة p_n.

g) نفترض أن $t_n = p_n - \frac{1}{3}$ أثبت أن (t_n) هندسية.

h) استنتج عبارة t_n ثم عبارة p_n بدلالة n ثم جد نهايتها.

الحل:

[41] نتأمّل مربّعاً $ABCD$ مركزه O. تقفز جزيئة بأسلوب عشوائي من إحدى هذه النقاط الخمس إلى نقطة أخرى.



في البدء كانت الجزيئة في A. في حالة $n \geq 1$، نرمز بالرمز E_n إلى الحدث: «الجزيئة في O بعد القفزة رقم n»، وليكن $p_n = P(E_n)$، إذن ($p_1 = \frac{1}{3}$).

ⓐ أثبت أنّ $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$.

ⓑ أثبت أنّ $(t_n)_{n\geq1}$ المعرفة وفق $t_n = p_n - \dfrac{1}{4}$ متتالية هندسية.

ⓒ استنتج p_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

الحل:

[42] نتأمّل صندوقين. يحتوي الصندوق الأول على (3) كرات مرقمة بالأعداد $3 , 2 , 1$، ويحوي الصندوق الثاني (4) كرات مرقمة بالأعداد $5 , 4 , 3 , 2$. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم نسحب كرة من الصندوق الثاني .

1.اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار.

2.ليكن A الحدث «إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم (3) » وليكن B الحدث «مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماما من (5) » هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ؟

3.نعرف متحولاً عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين. اكتب مجموعة قيم X واكتب جدول قانونه الاحتمالي .

الحل:

[43] ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل عدد الاشخاص الذين يجرون فحص PCR في عيادة. نفترض أنّ عدد الاشخاص لا يتجاوز 2 في اليوم. والمتحوّل العشوائي X كما في الجدول:

k	0	1	2
$\mathrm{P}(X=k)$	0.1	0.5	0.4

احتمال أن يكون فحص الشخص ايجابي يساوي 0.4 .

الحدث E «في اليوم شخص واحد فقط يكون ايجابي».

a) احسب $\mathrm{P}(X=1 \cap E)$ و $\mathrm{P}(E|X=2)$ ، و $\mathrm{P}(X=2 \cap E)$.

b) استنتج مما سبق قيمة $\mathbb{P}(E)$.

c) ليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يعطي عدد الاشخاص الذين فحصهم ايجابي. ما هي القيم التي يأخذها Y ؟

d) اكتب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي Y .

e) اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) .

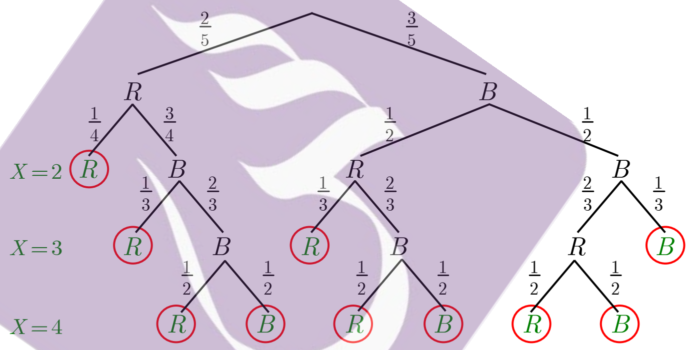
f) أيكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً ؟

الحل:

تمارين عامة محلولة

[44] لدينا صندوق يحتوي على كرتين حمراوين وثلاث كرات زرقاء. نكرّر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتّى لا يتبقّى في الصندوق إلاّ كرات من اللون ذاته. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل عدد مرّات السحب اللازمة. عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X، وعيّن قانون X، واحسب توقعه الرياضي.

الحل: لننشئ المخطط الشجري للتجربة



نلاحظ أن $X(\Omega)=\{2,3,4\}$.

x_i	2	3	4
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$\mathrm{P}(X=4)=1-\mathrm{P}(X=2)-\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{5}$$

التوقع الرياضي $E(X)=3.5$.

[45] تبيّن دراسة إحصائية أجريت على جماعة من الرياضيين أنّه أثناء فترة المسابقة يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية عند إخضاع أحد الرياضيين له مساوياً 0.02. ويمكن لتناول بعض أدوية الرشح أن يؤثر في نتيجة الاختبار السابق. يتناول 25% من الرياضيين في الجماعة أدوية الرشح في الشتاء. وبين هؤلاء يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية مساوياً 0.05. ليكن M الحدث: «الرياضي يستعمل دواء الرشح»، وليكن D الحدث: «نتيجة اختبار تعاطي المنشطات إيجابية». يجري اختيار أحد الرياضيين من الجماعة عشوائياً احسب احتمال كل من:

① «الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية»

② «الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً أنّه لا يستعمل دواء الرشح».

الحل: لدينا من معطيات المسألة ما يلي $P(D)=0.02$ و

$$P(D|M)=0.05 \text{ و } P(M)=0.25$$

ومنه $P(M\cap D)=P(D|M)\cdot P(M)=0.25\times0.05=0.0125$

① لدينا $P(D)=P(D\cap M)+P(D\cap M')$ وبالتالي

$$P(D\cap M')=0.02-0.0125=0.0075$$

② لدينا $P(M')=1-P(M)=0.75$ وبالتالي

$$P(D|M')=\frac{P(M'\cap D)}{P(M')}=\frac{0.0075}{0.75}=0.01$$

[46] يتطلّب إنجاز مهمة مرحلتين A و B على التوالي. تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يُعطى قانونه الاحتمالي:

x	1	2	3
$P(X_A=x)$	0.2	0.5	0.3

وتستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يُعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(X_B=x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان X_A و X_B مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز E إلى الحدث: «يستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل».

الحل:

$$E=\{X_A=2\cap X_B=1\}\cup\{X_A=1\cap X_B=2\}$$
$$\cup\{X_A=1\cap X_B=1\}$$

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}\left(X_A=2\cap X_B=1\right)+$$
$$\mathrm{P}\left(X_A=1\cap X_B=2\right)+\mathrm{P}\left(X_A=1\cap X_B=1\right)$$

المتحولين العشوائيْن X_A و X_B مستقلان احتمالياً فإن

$$P\left((X_A=p\cap X_B=q\right)=P(X_A=p)\cdot P(X_B=q)$$

ومنه $P(E)=0.04+0.06+0.1=0.2$

[47] يضم ناد رياضي 80 سبّاحاً، و 95 لاعب قوى، و 125 لاعب جمباز. يمارس كل رياضيّ لعبة واحدة.

① نطلب من ثلاثة لاعبين نختارهم عشوائياً ملء استبانة. احسب احتمال وقوع الحدثين الآتيين:

الحدث A : «يمارس اللاعبون الثلاثة ألعاب القوى».

الحدث B : «يمارس اللاعبون الثلاثة الرياضة ذاتها».

② نسبة الفتيات بين الذين يمارسون السباحة تساوي 45% وبين الذين يمارسون ألعاب القوى 20%، وهي تساوي 68% بين الذين يمارسون لعبة الجمباز.

نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي. احسب p_1 : احتمال أن يكون فتاة تمارس إحدى ألعاب القوى. احسب أيضاً p_2 : احتمال أن يكون فتاة.

نختار عشوائياً فتاة من أعضاء النادي. احسب p_3 احتمال أن تكون لاعبة جمباز.

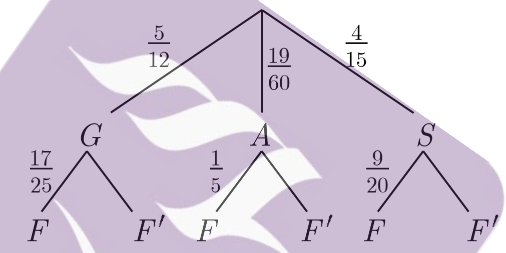
الحل: ①

$$P(A)=\frac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}}=\frac{138415}{4455100}=\frac{27683}{891020}$$

$$P(B)=\frac{\binom{95}{3}+\binom{125}{3}+\binom{80}{3}}{\binom{300}{3}}=\frac{21533}{178204}$$

② S : اللاعب سباح. A : اللاعب لاعب قوى.

G : اللاعب لاعب جمباز. F : اللاعب أنثى.



والمطلوب حساب $p_1=P(F\cap A)$ و $p_2=P(F)$. من التمثيل الشجري نجد

$$p_1=P(F\cap A)=\frac{1}{5}\times\frac{19}{60}=\frac{19}{300}$$

$$p_2=P(F)=\frac{4}{15}\times\frac{9}{20}+\frac{19}{60}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{12}\times\frac{17}{25}=\frac{3}{25}+\frac{19}{300}+\frac{17}{60}=\frac{7}{15}$$

$$p_3=P(G|F)=\frac{P(G\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{5}{12}\cdot\frac{17}{25}}{\frac{7}{15}}=\frac{17}{28}$$

[48] نُلقي حجري نرد متوازنين ونرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2، وليكن Y المتحوّل الذي يمثل باقي قسمة S على 4.

① عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S.

② عيّن القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y.

③ عيّن القانونين الاحتمالي للزوج (X,Y).

④ أيكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً؟

الحل: ① هنا $S=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. والقانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S هو:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

② ومنه $X(\Omega)=\{0,1\}$ أما جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X فهو:

x	0	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

و $Y(\Omega)=\{0,1,2,3\}$ أما جدول القانون الاحتمالي للمتحول Y فهو:

x	0	1	2	3
$P(Y=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$

③ القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

$X \backslash Y$	0	1	2	3	قانون X
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{2}$
قانون Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	1

④ المتحولان X و Y غير مستقلين احتمالياً لأن $P(X=0\cap Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$.

[49] يجري تزويد طائرات ذات محركين وطائرات ذات أربعة محركات بالنوع ذاته من المحركات. إنّ احتمال حدوث عطل في أحد هذه المحركات يساوي p وهو عددٌ موجب وأصغر تماماً من 1. نفترض أنّ الأعطال التي يمكن أن تصيب المحركات مستقلّة عن بعضها. ليكن X المتحوّل الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات محركين، وليكن Y المتحوّل الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات أربعة محركات.

① عيّن القيم التي يأخذها X، وقانونه الاحتمالي. وعيّن القيم التي يأخذها Y، وقانونه الاحتمالي.

② يمكن لطائرة أن تتابع طيرانها إلى نقطة الوصول إذا كان نصف عدد محركاتها على الأقل غير معطّل. احسب p_2 احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرّك طيرانها، واحسب p_4 احتمال أن تتابع طائرة رباعية طيرانها.

③ تحقّق أنّ $p_2-p_4=p^2(1-p)(3p-1)$ ، وبيّن تبعاً لقيم p أي نوع من الطائرات يعطي وثوقيّة أكبر.

الحل: ① مجموعة قيم X هي $I=\{0,1,2\}$ و X متحول حداني

$$P(X=k)=\binom{2}{k}p^k(1-p)^{2-k};\quad k=0,1,2\ :\ \mathrm{B}(2,p)$$

مجموعة قيم Y هي $J=\{0,1,2,3,4\}$ و Y متحول حداني

$$P(Y=k)=\binom{4}{k}p^k(1-p)^{4-k};\quad k=0,1,2,3,4\ :\ \mathrm{B}(4,p)$$

② احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرك طيرانها

$$p_2=1-P(X=2)=1-p^2$$

احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرك طيرانها

$$\begin{aligned}p_4&=\mathrm{P}(Y=0)+\mathrm{P}(Y=1)+\mathrm{P}(Y=2)\\&=q^4+4pq^3+6p^2q^2\\&=q^2(1-2p+p^2+4p-4p^2+6p^2)\\&=q^2(1+2p+3p^2)=(1-2p+p^2)(1+2p+3p^2)\\&=3p^4-4p^3+1\end{aligned}$$

$$p_2-p_4=1-p^2-3p^4+4p^3-1$$

$$=p^2(-3p^2+4p-1)=p^2(1-p)(3p-1)$$

ومنه إشارة p_2-p_4 هي من إشارة $(3p-1)$

- في حالة $0\le p<\frac{1}{3}$ لدينا $p_2\le p_4$ والطائرة ذات المحركات الأربعة أعلى ثقة.

- أما إذا كان $p=\frac{1}{3}$ كان للطائرتين نفس مستوى الثقة
- وعندما $\frac{1}{3}<p<1$ تكون الطائرة ذات المحركين أعلى ثقة من ذات الأربعة محركات.

[50] نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملوّنة بالأسود ووجهان ملوّنان بالأحمر نلقي الحجر خمس مرات على التوالي.

① ما احتمال أن يظهر وجه أحمر أوّل مرة عند آخر إلقاء للحجر ؟

② ما احتمال أن يظهر وجه أحمر مرة على الأقل؟

③ ما قانون المتحوّل العشوائي X الذي يعدّ عدد الوجوه السوداء اللون التي نحصل عليها.

الحل:

① ليكن A_n الحدث الموافق لظهور وجه أحمر في المرة رقم n وليكن A الحدث الموافق لظهور وجه أحمر أول مرة عند إلقاء الحجر في المرة الخامسة (الأخيرة) ومنه

$$A=A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'\cap A_5$$

ولكن الأحداث مستقلة ومنه $P(A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{16}{243}$

② ليكن B الحدث الموافق لظهور وجه أحمر مرة واحدة على الأقل.
فيكون B' الحدث الموافق لظهور اللون الأسود في المرات الخمس ومنه

$$P(B)=1-P(B')=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$$

③ احتمال الحصول على وجه أسود في المرة الواحدة هو $p=\frac{2}{3}$.
نكرر التجربة خمس مرات فيكون المتحول X الذي يمثل عدد الوجوه ذات اللون الأسود التي نحصل عليها متحولاً حدانياً $\mathrm{B}(5,\frac{2}{3})$. ومنه

$$P(X=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}=\binom{5}{k}\frac{2^k}{3^5};\quad k=0,1,\ldots,5$$

[51] نتأمّل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً. ليكن Y عدد الكرات الحمراء المسحوبة. ما هي مجموعة القيم التي يأخذها Y. واحسب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي Y. واحسب التوقع الرياضي للمتحوّل العشوائي Y وتباينه.

الحل:

$Y(\Omega)=\{1,2,3\}$.

$$P(Y=1)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{1\times4}{20}=\frac{1}{5},\quad P(Y=2)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{2\times6}{20}=\frac{3}{5}$$

$$P(Y=3)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

y_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(Y)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$$

$$E(Y^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{22}{5}$$

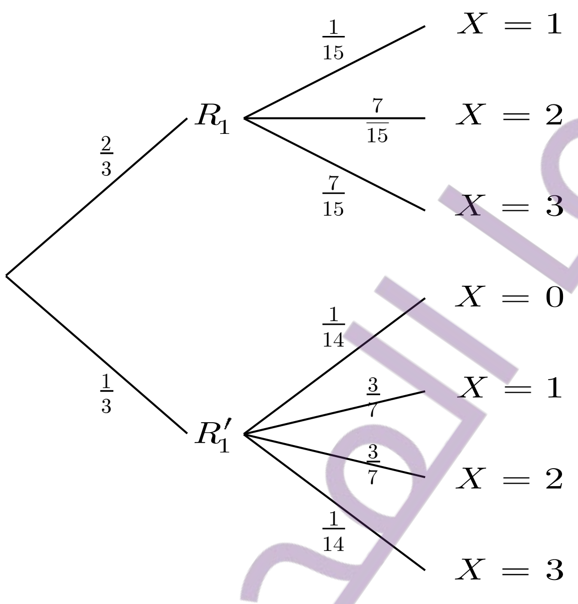
$$V(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-(\mathrm{E}(Y))^2=\frac{22}{5}-4=\frac{2}{5}$$

[52] نتأمّل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجّل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثمّ نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق. وبعدئذ نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً. ليكن X عدد الكرات الحمراء المسحوبة في المرة الثانية. نرمز بالرمز R_1 إلى الحدث: «الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون». ما هي مجموعة القيم التي يأخذها Y. واحسب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي Y. واحسب التوقع الرياضي للمتحوّل العشوائي Y وتباينه.

الحل:

$X=\{0,1,2,3\}$. نسحب ثلاث كرات معاً من صندوق يحوي أكثر من ثلاث كرات حمراء. فعدد الكرات الحمراء بين 0 و 3.

لدينا $P(R_1)=\frac{2}{3}$ و $P(R_1')=\frac{1}{3}$. والتمثيل الشجري الآتي للتجربة هو:



نلاحظ أنه إذا كانت الكرة المسحوبة أولاً سوداء أصبحت محتويات الصندوق 4 كرات سوداء و 4 كرات حمراء. أما إذا كانت الكرة المسحوبة أولاً حمراء فعندها تصبح محتويات الصندوق كرتين سوداوين و 8 كرات حمراء.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{42}$	$\frac{59}{315}$	$\frac{143}{315}$	$\frac{211}{630}$

$$E(X)=1\times\frac{59}{315}+2\times\frac{143}{315}+3\times\frac{211}{630}=\frac{21}{10}$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{59}{315}+2^2\times\frac{143}{315}+3^2\times\frac{211}{630}=\frac{3161}{630}$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{3161}{630}-\left(\frac{21}{10}\right)^2=\frac{3827}{6300}$$

[53] تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تُلقيها، تُكرّر سعاد التجربة عدداً من المرات. عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمال نجاحها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{1}{3}$، وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{4}{5}$. نفترض أنّ احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها.

نتأمّل، أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n، الحدثين الآتيين: A_n: نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n. B_n: فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n. ونعرّف $p_n = \Pi(A_n)$.

① عيّن p_1 وبرهن أنّ $p_2 = \frac{4}{15}$.

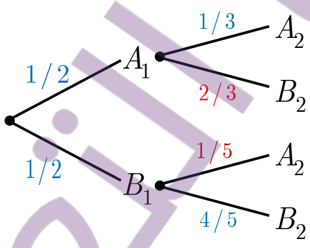
② أثبت أنّه أياً كانت $n \geq 2$ كان $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

③ نعرّف $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية وعيّن حدها الأول u_1 وأساسها q.

④ استنتج قيمة u_n ثمّ p_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

الحل:

① احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة الأولى يساوي احتمال فشلها لذلك $p_1 = \frac{1}{2}$.



ولدينا المخطط الشجري المجاور الذي يمثل نتيجة إلقاء أول حلقتين. ومنه

② $p_2 = P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{15}$ في الحالة العامة لدينا المخطط:

$$\begin{aligned} p_n &= \mathrm{P}(A_n) \\ &= p_{n-1}\cdot\frac{1}{3} + (1-p_{n-1})\cdot\frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}p_{n-1} \end{aligned}$$

③

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{p_{n+1} - \frac{3}{13}}{u_n} = \frac{\frac{2}{15}p_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13}}{u_n}$$

$$= \frac{\frac{2}{15}p_n - \frac{2}{65}}{u_n} = \frac{\frac{2}{15}(p_n - \frac{3}{13})}{u_n} = \frac{2}{15}$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ هندسية أساسها $q = \frac{2}{15}$

وحدها u_1 يساوي $u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$

④ $u_n = q^{n-1}u_1$ أي $u_n = \frac{7}{26}\cdot\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$ ومنه $p_n = \frac{3}{13} + \frac{7}{26}\cdot\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$.

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{15}\right)^n = 0$ لأنّ $\frac{2}{15} \in]-1,1[$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{13}$.

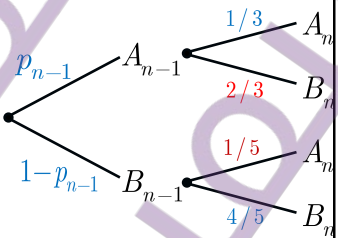
[54] نتأمّل مورثة تحمل أليلَيْن A و a. نقول إن نبتة متماثلة الألائل عندما تحتوي على الأليلين ذاتهما على زوجين من الصبغيات المتوافقة، فتكون صيغتها الوراثية عندئذ AA أو aa، ونقول إنّ النبتة متخالفة الألائل عندما تكون صيغتها الوراثية Aa. تتكاثر بعض النباتات (الترمس مثلاً) بالإلقاح الذاتي، يحدث الأمر بالنسبة إلى الخَلَف وكأنّ الإلقاح جرى بين نبتتيْن من الصيغة الوراثية ذاتها حيث يجري اختيار الألائل عشوائياً. نهدف إلى دراسة خَلَف نبتة متخالفة الألائل بالإلقاح الذاتي.

ⓐ بالإلقاح الذاتي تُعطي نبتةٌ من الصيغة AA نبتةً من الصيغة ذاتها، وكذلك تعطي نبتةٌ من الصيغة aa نبتةً من الصيغة ذاتها. اكتب احتمالات أن يكون الجيل الأوّل لنبتة صيغتها الوراثية Aa نبتةً صيغتها الوراثية AA أو aa أو Aa.

ⓑ نبدأ من نبتةٍ متخالفة الألائل (من النمط Aa في الجيل 0)، ونكوّن أجيالاً لاحقة بالتكاثر الذاتي.

سنستعمل الرموز الآتية:

- الحدث $(\mathrm{AA})_n$: «للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية AA».
- الحدث $(\mathrm{Aa})_n$: «للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية Aa».
- الحدث $(\mathrm{aa})_n$: «للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية aa».



ثمّ لنرمز x_n و y_n و z_n إلى احتمالات الأحداث $(\mathrm{AA})_n$ و $(\mathrm{Aa})_n$ و $(\mathrm{aa})_n$ بالترتيب.

① ما قيمة كل من x_0 و y_0 و z_0 ؟

② احسب كلاً من x_1 و y_1 و z_1.

③ اكتب قيمة كل من $\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{AA})_n)$ و $\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n)$ و $\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n)$. ثُمّ استعمل هذه النتائج لتثبت أنّه مهما كانت قيمة n كان

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n \quad و \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$$

وأعطِ عبارة z_{n+1}.

ⓒ احسب قيم x_n و y_n و z_n في حالة $0 \le n \le 10$، يمكن استعمال الآلة الحاسبة.

ⓓ ما طبيعة المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ ؟ عبّر عن y_n بدلالة n.

ⓔ نعرّف $t_n = x_n + \frac{1}{2}y_n$، احسب t_{n+1} بدلالة t_n. ما طبيعة المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ ؟ ثُمّ استنتج قيمة x_n بدلالة n.

ⓕ احسب نهاية كل من المتتاليات $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ و $(z_n)_{n\geq0}$.

الحل:

ⓐ $\mathbb{P}(aa)=\frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(aA)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(AA)=\frac{1}{4}$.

ⓑ ① لدينا نبتة متخالفة الألائل (من النمط Aa في الجيل 0)، ومنه

$$x_0=\mathbb{P}((AA)_0)=0 \text{ و } y_0=\mathbb{P}((Aa)_0)=1$$

و $z_0=\mathbb{P}((aa)_0)=0$.

② لدينا $x_1=\mathbb{P}((AA)_1)=\frac{1}{4}$ و $y_1=\mathbb{P}((Aa)_1)=\frac{1}{2}$

و $z_1=\mathbb{P}((aa)_1)=\frac{1}{4}$.

③ في الإلقاح الذاتي تُعطي نبتةٌ من الصيغة AA نبتةً من الصيغة ذاتها، ومنه

$$\mathbb{P}((AA)_{n+1}|(AA)_n)=1$$

أماّ إذا كان لدينا نبتة متخالفة الألائل في الجيل رقم n فعندئذ

$$\mathbb{P}((AA)_{n+1}|(Aa)_n)=\frac{1}{4} \text{ و } \mathbb{P}((Aa)_{n+1}|(Aa)_n)=\frac{1}{2}$$

وعليه

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((AA)_{n+1}) &= \mathbb{P}((AA)_{n+1}\cap(AA)_n)\\ &\quad+\mathbb{P}((AA)_{n+1}\cap(Aa)_n)\\ &\quad+\underbrace{\mathbb{P}((AA)_{n+1}\cap(aa)_n)}_{0}\\ &=\mathbb{P}((AA)_{n+1}|(AA)_n)\mathbb{P}((AA)_n)\\ &\quad+\mathbb{P}((AA)_{n+1}|(Aa)_n)\mathbb{P}((Aa)_n)\\ &=\mathbb{P}((AA)_n)+\frac{1}{4}\mathbb{P}((Aa)_n)\end{aligned}$$

ومنه $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{4}y_n$.

وكذلك

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((Aa)_{n+1}) &= \underbrace{\mathbb{P}((Aa)_{n+1}\cap(AA)_n)}_{0}\\ &\quad+\mathbb{P}((Aa)_{n+1}\cap(Aa)_n)+\underbrace{\mathbb{P}((Aa)_{n+1}\cap(aa)_n)}_{0}\\ &=\mathbb{P}((Aa)_{n+1}|(Aa)_n)\mathbb{P}((Aa)_n)\\ &=\frac{1}{2}\mathbb{P}((Aa)_n)\end{aligned}$$

ومنه $y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n$. وأخيراً

$$z_n=1-x_n-y_n$$

ⓒ باستعمال الآلة الحاسبة.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$
x_0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{127}{256}$	$\frac{255}{512}$	$\frac{511}{1024}$	$\frac{1023}{2048}$
z_0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{127}{256}$	$\frac{255}{512}$	$\frac{511}{1024}$	$\frac{1023}{2048}$

ⓓ المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية حدّها y_0 يساوي 1 وأساسها $\frac{1}{2}$

ومنه $y_n=\frac{1}{2^n}$.

ⓔ نعرّف $t_n=x_n+\frac{1}{2}y_n$، ونحسب $t_{n+1}=x_{n+1}+\frac{1}{2}y_{n+1}$

$$t_{n+1}=x_n+\frac{1}{4}y_n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y_n=x_n+\frac{1}{2}y_n=t_n$$

أي إنّ المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ متتالية ثابتة تحقّق $t_n=t_0=x_0+\frac{1}{2}y_0=\frac{1}{2}$. ومنه

$$x_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}} \text{ و } z_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

ⓕ وأخيراً

$$\lim_{n\to\infty}y_n=0 \text{ و } \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2} \text{ و } \lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{2}$$