التكامل عكس الاشتقاق

التكامل المحدد والتابع الأصلي

1. التابع الأصلي:

لإثبات أن F تابع أصلي للتابع f المعرف على D نثبت أن:

ⓐ F اشتقاقي على D.

ⓑ $F'(x) = f(x)$.

مثال1: $F: x \mapsto x^3 + 1$ تابع أصلي لـ $f: x \mapsto 3x^2$ على $\mathbb{R}$.

لأن F اشتقاقي على $\mathbb{R}$. و $F'(x) = 3x^2 = f(x)$

مثال2: $F: x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x-1} + 3$ تابع أصلي للتابع

$f: x \mapsto e^{2x-1}$ على المجال $]-\infty, 0[$.

لأن F اشتقاقي على $]-\infty, 0[$. و $F'(x) = e^{2x-1} = f(x)$

مثال3: أيكون التابعان F و G تابعين أصليين لـ f ذاته على $\mathbb{R}$؟

$F(x) = \sin(3x) - 2\sin x$ و $G(x) = \sin x - 3\sin^3 x$.

الحل: لكي يكون F و G تابعان أصليان للتابع f ذاته يجب أن يكون

$F'(x) = 3\cos(3x) - 2\cos x = f(x)$

$G'(x) = \cos x - 9\sin^2 x \cos x = f(x)$

بالتجريب نجد $F'(\frac{\pi}{6}) - G'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \neq 0$. إذن الجواب هو لا.

[1] تحقق أنّ F تابع أصلي للتابع f على I:

$f(x) = \tan^2 x, F(x) = \tan x - x, I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

الحل:

F اشتقاقي على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$F'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x = f(x)$

F تابع أصلي لـ f على $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

[2] تحقق أنّ F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I.

ⓐ $F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$, $G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$, $I =]1, +\infty[$

ⓑ $F(x) = \sin^2 x$, $G(x) = 2 - \cos^2 x$, $I = \mathbb{R}$,

الحل: F و G اشتقاقيان على $]1, +\infty[$

a. $F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ $G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$

$F'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2 + 3x - 1)}{(x-1)^2}$ $G'(x) = \frac{(2x+7)(x-1) - (x^2 + 7x - 5)}{(x-1)^2}$

$= \frac{2x^2 - 2x + 3x - 3 - x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2}$ $= \frac{2x^2 - 2x + 7x - 7 - x^2 - 7x + 5}{(x-1)^2}$

$= \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$ $= \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$

$F'(x) = G'(x)$

$\Leftarrow$ F, G توابع أصلية لنفس التابع

b. F, G اشتقاقيان على $\mathbb{R}$

$F(x) = (\sin x)^2$ $G(x) = 2 - (\cos x)^2$

$F'(x) = 2(\sin x)(\cos x)$ $G'(x) = 0 - 2(\cos x)(-\sin x)$

$= 2(\cos x)(\sin x)$

$F'(x) = G'(x)$

$\Leftarrow$ F, G توابع أصلية لنفس التابع

2. قواعد التابع الأصلي:

$0 \to k\ , a \to ax$	$x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$ah \to aH$
$h_1 \pm h_2 \to H_1 \pm H_2$	$\frac{h'}{h} \to \ln\lvert h\rvert$	$h \times h' \to \frac{(h)^2}{2}$

مثال4: $f(x) = -3$ له تابع أصلي $F(x) = -3x$

◆ $f(x) = x^3$ له تابع أصلي $F(x) = \frac{x^4}{4}$

◆ $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 5}$ له تابع أصلي $F(x) = \ln\lvert x^2 + 5\rvert = \ln(x^2 + 5)$

◆ $f(x) = 5x^2 - 5x + 7$ له تابع أصلي $F(x) = 5\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 7x$

[3] جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$:

ⓐ $f(x) = -2$ ⓑ $f(x) = x^3$ ⓒ $f(x) = 5x^6$

ⓓ $f(x) = x^{-3}$ ⓔ $f(x) = x^5 + x^3$ ⓕ $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

ⓖ $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$ ⓗ $f(x) = 2x(x^2 + 1)$ ⓘ $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$

الحل:

a. $f(x) = -2$ $F(x) = -2x$

b. $f(x) = x^3$ $F(x) = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}x^4$

c. $f(x) = 5x^6$ $F(x) = 5 \cdot \frac{x^7}{7} = \frac{5}{7}x^7$

d. $f(x) = x^{-3}$ $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

e. $f(x) = x^5 + x^3$ $F(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4$

f. $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ $F(x) = \ln\lvert x^2 + 1\rvert = \ln(x^2 + 1)$

g. $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$

$F(x)=\ln|e^x+2| = \ln(e^x+2)$

h. $f(x)=2x(x^2+1)$

$F(x)=\frac{(x^2+1)^2}{2}$

i. $f(x)=\frac{1}{x}\ln x$

$F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$

3. قواعد التابع الأصلي للتوابع:

يوجد ثلاث حالات:

1) إذا كان التابع **بسيط** (أي حشوته x) نتبع القواعد:

$(x)^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sin(x) \to -\cos(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x} \to \tan(x)$
$e^x \to e^x$	$\cos(x) \to \sin(x)$	$\frac{1}{\sin^2 x} \to -\cot(x)$

(مسكة مكنسة: مشتق الساين كوساين وتكامل الكوساين ساين)

2) إذا كانت حشوة التابع درجة أولى نكامله كأنه بسيط ونضرب الناتج بـ $\frac{1}{a}$ (حيث a أمثال x) أي:

$(ax+b)^n \to \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$e^{ax+b} \to \frac{1}{a}e^{ax+b}$
$\sin(ax+\beta) \to -\frac{1}{a}\cos(ax+\beta)$	$\cos(ax+\beta) \to \frac{1}{a}\sin(ax+\beta)$
$\frac{1}{\cos^2 ax} \to \frac{1}{a}\tan(ax)$	$\frac{1}{\sin^2 ax} \to \frac{-1}{a}\cot(ax)$

3) إذا كانت حشوة التابع شيء نشترط أن يكون التابع الذي نوجد التابع الأصلي له مضروب بمشتق حشوته عندئذ نحذف مشتق الحشوة ونكامله كأنه بسيط أي:

$h^n.h' \to \frac{h^{n+1}}{n+1}$	$h'\sin(h) \to -\cos(h)$	$h'\frac{1}{\cos^2 h} \to \tan(h)$
$h'e^h \to e^h$	$h'\cos(h) \to \sin(h)$	$h'\frac{1}{\sin^2 h} \to -\cot(h)$

مثال5: $f(x)=x^3$ له تابع أصلي $F(x)=\frac{x^4}{4}$

- $f(x)=(2x-5)^3$ له تابع أصلي $F(x)=\frac{1}{2}\frac{(2x-5)^4}{4}$
- $f(x)=10x^4(2x^5-1)^3$ له تابع أصلي $F(x)=\frac{(2x^5-1)^4}{4}$
- $f(x)=\cos x$ له تابع أصلي $F(x)=\sin x$
- $f(x)=\cos(3x+2)$ له تابع أصلي $F(x)=\frac{1}{3}\sin(3x+2)$
- $f(x)=3x^2\cos(x^3+7)$ له تابع أصلي $F(x)=\sin(x^3+7)$

[4] جد تابعاً أصلياً F للتابع f .

ⓐ $f(x)=\cos x$ ⓑ $f(x)=\cos 3x$ ⓒ $f(x)=3x^2\cos(x^3)$

ⓓ $f(x)=\sin x$ ⓔ $f(x)=\sin 2x$ ⓕ $f(x)=-\frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})$

ⓖ $f(x)=e^x$ ⓗ $f(x)=e^{2x-1}$ ⓘ $f(x)=2xe^{x^2-1}$

الحل:

a. $f(x)=\cos x$ $F(x)=\sin x$

b. $f(x)=\cos 3x$ $F(x)=\frac{1}{3}\sin 3x$

c. $f(x)=3x^2\cos(x^3)$ $F(x)=\sin(x^3)$

d. $f(x)=\sin x$ $F(x)=-\cos x$

e. $f(x)=\sin 2x$ $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

f. $f(x)=-\frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})$ $F(x)=-\cos\frac{1}{x}$

g. $f(x)=e^x$ $F(x)=e^x$

h. $f(x)=e^{2x-1}$ $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x-1}$

i. $f(x)=2x\,e^{x^2-1}$ $F(x)=e^{x^2-1}$

Add

$f(x)=\cos x+\cos(5x-1)+\overset{\text{حذف}}{5x^4}\cos(x^5-1)$

$F(x)=\sin+\frac{1}{5}\sin(5x-1)+\sin(x^5-1)$

$f(x)=e^x+e^{7x-1}+\overset{\text{حذف}}{3x^2}\,e^{x^3-6}$

$F(x)=e^x+\frac{1}{7}e^{7x-1}+e^{x^3-6}$

$f(x)=\sin x+\sin(7x-1)+\overset{\text{حذف}}{e^x}\sin(e^x)$

$F(x)=-\cos-\frac{1}{7}\cos(7x-1)-\cos(e^x)$

$f(x)=x^4+(2x-1)^5+\overset{\text{حذف}}{e^x}(e^x+1)^6$

$F(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^6}{6}+\frac{(e^x+1)^7}{7}$

♣نسمي F تابع أصلي للتابع f ونقول $x \mapsto F(x)+k$ مجموعة جميع التوابع الاصلية للتابع f

♣إذا كان التابع مستمر على مجال الدراسة I وجد التابع الأصلي.

[5] هاتِ تابعاً أصلياً F للتابع f على I حدده ويحقق الشرط.

ⓐ $f(x)=x^2+x$, $F(1)=0,$

ⓑ $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$, $F(\frac{\pi}{2})=0,$

ⓒ $f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x$, $F(\frac{\pi}{2})=0,$

الحل:

a. $f(x)=x^2+x$ $\quad F(1)=0$

$F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$

$F(1)=0$

$\frac13+\frac12+C=0 \Rightarrow C=\frac{-5}{6}$

$F(x)=\frac13 x^3+\frac12 x^2-\frac56$

b. $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ $\quad F(\frac{\pi}{2})=0$

$F(x)=-\cos(x-\frac{\pi}{4})+C$

$F(\frac{\pi}{2})=0$

$-\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+C=0 \Rightarrow C=\frac{\sqrt2}{2}$

$F(x)=-\cos(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\sqrt2}{2}$

c. $f(x)=\sin x.\cos^2 x$ $\quad F(\frac{\pi}{2})=0$

حذف

$f(x)=-(-\sin x)(\cos x)^2$

$F(x)=-\frac{(\cos x)^3}{3}+C$

$F(\frac{\pi}{2})=0 \to C=0 \to F(x)=-\frac13\cos^3 x$

4. طرق التحويل الى قاعدة: (غالباً وليس دائماً)

♣عند وجود جذر نحول الجذر الى أس: $\sqrt{x}=x^{\frac12}$, $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$.

♣عند وجود أس مقام لا يساوي 1 نرفع المقام الى البسط مع تغير اشارة الأس وإذا كان أس المقام واحد نستعمل قاعدة اللوغاريتم $\frac{h'}{h}$.

♣يمكن استعمال المطابقات التربيعية أو التكعيبية أو فك الأقواس.

♣في التابع الكسري: إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام نقسم البسط على المقام قسمة إقليدية ويمكن أن نوزع البسط على المقام في حالة أن المقام حد واحد.

♣احياناً نضرب بعدد ونقسم عليه.

♣عند وجود عدد نسحبه عامل مشترك (إذا عندك عدد زتو بره)

♣عند وجود أس على تابع مثلثي نستعمل أويلر أو يمكن نستعمل:

مثال6: أوجد تابع أصلي فيما يأتي:

◆ $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac12} \Rightarrow F(x)=\frac{x^{\frac32}}{\frac32}=\frac23\sqrt{x^3}$

◆ $f(x)=\frac{1}{(2x-3)^5}=(2x-3)^{-5}$

$\Rightarrow F(x)=\frac12\frac{(2x-3)^{-4}}{-4}=-\frac18\frac{1}{(2x-3)^4}$

◆ $f(x)=\sin 3x\cdot\cos x=\frac12[\sin(4x)+\sin(2x)]\Rightarrow$

$F(x)=\frac12[-\frac14\cos(4x)-\frac12\cos(2x)]$

◆ $f(x)=\frac{1}{x^2}\times e^{-\frac2x}=\frac12\frac{2}{x^2}\times e^{-\frac2x}\Rightarrow F(x)=\frac{e^{-2/x}}{2}$

◆ $f(x)=\frac{1-2x}{(2x^2-2x+1)^3}=(1-2x)(2x^2-2x+1)^{-3}$

$=\frac{1}{-2}(4x-2)(2x^2-2x+1)^{-3}\Rightarrow$

$F(x)=-\frac12\frac{(2x^2-2x+1)^{-2}}{-2}=\frac{1}{4(2x^2-2x+1)^2}$

♣بعد ايجاد التكامل عند وجود أس سالب يرد الى المقام وعند وجود كسر في الأس يُرد الى الجذر وعند وجود سالب في المقام نضعه أمام الكسر وعند وجود كسر في المقام نضعه أمام الكسر بعد قلبه.

[6] جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

ⓐ $f(x)=1-\frac{1}{x^2}+\frac3x$, $I=]0,+\infty[,$

ⓑ $f(x)=(2x-1)^3$, $I=\mathbb{R},$

ⓒ $f(x)=\frac{2}{\sqrt{1-2x}}$, $I=]-\infty,\frac12[,$

ⓓ $f(x)=\frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$, $I=]-1,3[,$

ⓔ $f(x)=\frac{1}{(1-3x)^2}$, $I=]-\infty,\frac13[,$

ⓕ $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$, $I=]1,+\infty[,$

الحل:

a. $f(x)=1-\frac{1}{x^2}+\frac3x$

$=1-x^{-2}+3\frac1x$

$F(x)=x-\frac{x^{-1}}{-1}+3\ln|x|$ من المجال $]0,+\infty[$

$=x+\frac1x+3\ln(x)$

b. $f(x)=(2x-1)^3$

$F(x)=\frac12\frac{(2x-1)^4}{4}=\frac{(2x-1)^4}{8}$

c. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{1-2x}}$

$=\frac{2}{(1-2x)^{\frac12}}=2(1-2x)^{-\frac12}$

$F(x)=2\cdot\frac{1}{-2}\frac{(1-2x)^{\frac12}}{\frac12}=-2\sqrt{1-2x}$

d. $f(x)=\frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$

$=(x-1)(x^2-2x-3)^{-2} = \frac{1}{2}(2x-2)(x^2-2x-3)^{-2}$

$F(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-2x-3)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-2x-3}$

e. $f(x)=\frac{1}{(1-3x)^2} = (1-3x)^{-2}$

$F(x)=\frac{1}{-3}\cdot\frac{(1-3x)^{-1}}{-1} = +\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-3x}$

f. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = (2x)(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x)=\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^2-1}$

[7] جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

ⓐ $I=\mathbb{R}, \quad f(x)=8x^3+6x^2-2x+3$

ⓑ $I=]0,+\infty[\quad f(x)=\frac{1}{x^4}$

ⓒ $I=]-\infty,0[\quad f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

ⓓ $I=]1,+\infty[\quad f(x)=\frac{1}{1-2x+x^2}$

ⓔ $I=\mathbb{R} \quad f(x)=x\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$

ⓕ $I=]1,+\infty[\quad f(x)=\frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$

ⓖ $I=]-\infty,\frac{3}{4}[\quad f(x)=\frac{5}{4x-3}$

ⓗ $I=]-\infty,2[\quad f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

ⓘ $I=]0,+\infty[\quad f(x)=\frac{3x+1}{2x}$

ⓙ $I=]\frac{1}{2},+\infty[\quad f(x)=\frac{3x+2}{2x-1}$

الحل:

a. $f(x)=8x^3+6x^2-2x+3$

$F(x)=\frac{8x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+3x$

$F(x)=2x^4+2x^3-x^2+3x$

b. $f(x)=\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

$F(x)=\frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}$

d. $f(x)=\frac{1}{1-2x+x^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$

$F(x)=\frac{1}{-1}\cdot\frac{(1-x)^{-1}}{-1} = \frac{1}{1-x}$

c. $f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$=x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$

$F(x)=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

e. $f(x)=x\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$

$=\frac{1}{2}(2x)(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$

$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{10}\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$

f. $f(x)=\frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}} = (4x-2)(x^2-x)^{-\frac{1}{2}} = 2(2x-1)(x^2-x)^{-\frac{1}{2}}$

$F(x)=2\frac{(x^2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{x^2-x}$

g. $f(x)=\frac{5}{4x-3} = \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{4x-3}$

$F(x)=\frac{5}{4}\ln|4x-3| \rightarrow]-\infty,\frac{3}{4}[$

$=\frac{5}{4}\ln(-4x+3)$

h. $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x-2 \\ \hline x-2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$f(x)=1+3\frac{1}{x-2}$

$F(x)=x+3\ln|x-2| = x+3\ln(-x+2)$

5. قواعد التابع الأصلي للتوابع المثلثية

♣عند وجود أس على تابع مثلثي نستعمل أويلر أو خواص تخفيض القوة

♣يمكن تحويل الجداء الى مجموع في التوابع المثلثية وفق الآتي:

- $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$
- (في حالة $\cos a\sin b$ نبدل $\sin b\cos a$)
- $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$
- $\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$	$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$
$\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$	$\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$

[8] جد تابعاً أصلياً للتابع $f: x \mapsto f(x)$ على المجال I.

ⓐ $f(x)=\sin 3x \cos x$, $\quad I=\mathbb{R}$

ⓑ $f(x)=\sin^2 x$, $\quad I=\mathbb{R}$

ⓒ $f(x)=\cos^2 3x$, $\quad I=\mathbb{R}$

ⓓ $f(x)=\cos^4 x$, $\quad I=\mathbb{R}$

ⓔ $f(x)=\cos 3x \cdot \cos x$, $\quad I=\mathbb{R}$

ⓕ $f(x)=\cot^2 x$, $\quad I=]0,\pi[$

ⓖ $f(x)=\tan x$, $\quad I=]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$

ⓘ $f(x)=\cot x$, $\quad I=]0,\pi[$

الحل:

a. $f(x)=\sin 3x \cdot \cos x$

$= \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$

$F(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$

b. $f(x)=\sin^2 x$

$= \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$

c. $f(x)=\cos^2 3x$

$= \frac{1}{2}(1+\cos 6x)$

$F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x\right)$

d. $f(x)=\cos^4 x$

$=(\cos^2 x)^2$

$= \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$

$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)$

$F(x) = \frac{1}{4}\left(x+\sin 2x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)$

e. $f(x)=\cos 3x \cdot \cos x$

$= \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$

$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$

f. $f(x)=\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

$F(x) = -\cot x - x$

g. $f(x)=\tan x = -\frac{-\sin x}{\cos x}$

$F(x) = -\ln|\cos x|$

$= -\ln(-\cos x)$

i. $f(x)=\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$F(x) = \ln|\sin x|$

$= \ln(\sin x)$

6. التكامل المحدد

$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$
$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

مثال 7:

ⓐ $I=\int_0^1 (2x+3)dx = \left[x^2+3x\right]_0^1 = 4$

ⓑ $I=\int_0^2 \frac{2}{x-3}dx = \int_0^2 2\frac{1}{x-3}dx = \left[2\ln(3-x)\right]_0^2 = -2\ln 3$

ⓒ $I=\int_0^2 |x^2-1|dx = \int_0^1 (1-x^2)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx$

$= \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2 = 2$

[9] احسب التكاملات الآتية:

ⓐ $I=\int_0^2 \sqrt{2x+1}\,dx$ $\qquad$ ⓑ $I=\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

ⓒ $I=\int_2^{-1} (x^2-4x+3)dx$ $\qquad$ ⓓ $I=\int_1^e \frac{1}{t}\ln t\,dt$

ⓔ $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ $\qquad$ ⓕ $I=\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

ⓖ $I=\int_2^e \frac{1}{t\ln t}dt$ $\qquad$ ⓗ $I=\int_0^1 te^{t^2-1}dt$

ⓘ $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{2-2\cos 2x}\,dx$ $\qquad$ ⓙ $I=\int_0^2 x|x-1|dx$

الحل:

a. $I=\int_0^2 \sqrt{2x+1}\,dx$

$=\int_0^2 (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2$

$= \left[\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}\right]_0^2$

$= \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3}$

b. $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

$= \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt = \int_0^3 (1+t)^{-\frac{1}{2}}dt$

$\left[\frac{(1+t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \left[2\sqrt{1+t}\right]_0^3$

$= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 4-2 = 2$

d. $I=\int_1^e \frac{1}{t}\ln t\,dt$

$\left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

$\frac{\ln e}{2}=\frac{1}{2}$

e. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$

$\left[\ln|\cos x+\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2}-0$

$\ln|\cos(0)+\sin 0| = \ln 1 = 0$

g. $I=\int_2^e \frac{1}{t\ln t}\,dt$

$=\int_2^e \frac{\frac{1}{t}}{\ln t}\,dt = \left[\ln|\ln t|\right]_2^e = 0-\ln\ln 2$

h. $I=\int_0^1 t e^{t^2-1}\,dt$

$=\int_0^1 \frac{1}{2}(2t)e^{t^2-1}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{t^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$

i. $I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2-2\cos 2x}\,dx$

$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos 2x)}\,dx = \int\sqrt{2(2\sin^2 x)}\,dx$

$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2|\sin x|\,dx = \int -2\sin x\,dx$

$=\left[2\cos x\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 2$

j. $I=\int_0^2 x|x-1|\,dx$

	1	
$-$	0	$+$

$=\int_0^1 x(-x+1)\,dx+\int_1^2 x(x-1)\,dx = \int_0^1 -x^2+x\,dx+\int_1^2 x^2-x\,dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 1$

7. التكامل المحدد بالتجزئة

نستخدم التكامل بالتجزئة لإيجاد تكامل كثير الحدود مضروب تابع حشوة درجة أولى (مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية أو جذرية) أو أحياناً جداء تابعي حشوة درجة أولى. حيث نفرض اللوغاريتم u والأخر v' وفي حال عدم وجود اللوغاريتم نفرض كثير الحدود u.

u	v'
x^n	e
x^n	$\sin,\cos$
x^n	$\sqrt{ax+b},\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$
$\ln$	$1,\sqrt{x},x^r : r\neq -1$
$\sin$	e

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

التكامل بالتجزئة = جداء التابعين الاصليين – تكامل جداء الجديدين.

مثال8: احسب التكامل المحدّد $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$.

اشتقاق

$u=x$	$v'=e^{-x}$
$u'=1$	$v=-e^{-x}$

تابع أصلي

$$I=\left[x(-e^{-x})\right]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})dx=-e^{-1}-\left[e^{-x}\right]_0^1=\frac{e-2}{e}$$

♣ في حالة خاصة نستعمل التكامل بالتجزئة لحساب تكامل $\ln x$.

♣الأولية للفرض: $\boxed{v'}: e\to\sin,\cos$, $\boxed{u}: \ln\to x$.

[10] احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

ⓐ $I=\int_1^e x\ln x\,dx$ ⓑ $J=\int_0^\pi (x-1)\cos x\,dx$

ⓒ $K=\int_0^1 (x+2)e^x\,dx$ ⓓ $J=\int_0^1 \frac{2x-1}{(x+2)^2}\,dx$

ⓔ $M=\int_0^\pi e^x\cos x\,dx$ ⓕ $I=\int_1^e \ln x\,dx$

الحل:

a. $I=\int_1^e x\ln x\,dx$

$u=\ln x$	$v'=x$
$u'=\frac{1}{x}$	$v=\frac{x^2}{2}$

$I=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{2}x\,dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]_1^e$

$=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

b. $J=\int_0^\pi (x-1)\cos x\,dx$

$u=x-1$	$v'=\cos x$
$u'=1$	$v=\sin x$

$J=\left[(x-1)\sin x\right]_0^\pi-\int_0^\pi \sin x\,dx$

$=\left[(x-1)\sin x+\cos x\right]_0^\pi$

$=(-1)-(1)=-2$

c. $K=\int_0^1 (x+2)e^x\,dx$

$u=x+2$	$v'=e^x$
$u'=1$	$v=e^x$

$=\left[(x+2)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$

$=\left[(x+2)e^x-e^x\right]_0^1$

$=(3e-e)-(2-1)=2e-1$

d. $J=\int_0^1 \frac{2x-1}{(x+2)^2}\,dx=\int_0^1 (2x-1)(x+2)^{-2}\,dx$

$u=2x-1$	$v'=(x+2)^{-2}$
$u'=2$	$v=\frac{(x+2)^{-1}}{-1}=\frac{-1}{x+2}$

$J=\left[\frac{-2x+1}{x+2}\right]_0^1+\int_0^1 2\frac{1}{x+2}\,dx$

$=\left[\frac{-2x+1}{x+2}+2\ln|x+2|\right]_0^1=-\frac{1}{3}+2\ln 3-\left(\frac{1}{2}+2\ln 2\right)$

$=-\frac{5}{6}+2\ln 3-2\ln 2.$

[11] (دورة 2 - 2021) احسب التكامل الآتي $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

الحل:

$u = x$	$v' = \sin x$
$u' = 1$	$v = -\cos x$

$$\left[-x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= \left[-x \cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1$$

♣ عند إيجاد تابع أصلي بطريقة التكامل بالتجزئة نستعمل

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \ : a \in D$$

[12] جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$

ⓐ $f(x) = x \cdot \cos x$ ⓑ $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

ⓒ $f(x) = x^2 \cdot e^x$ ⓓ $f(x) = x^2 \cdot \sin 2x$

الحل:

a. $f(x) = x \cdot \cos x$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t \cdot \cos t \, dt$$

$u = t$	$v' = \cos t$
$u' = 1$	$v = \sin t$

$$F(x) = \left[t \cdot \sin t\right]_0^x - \int_0^x \sin t \, dt$$

$$\left[t \cdot \sin t \ \cos t\right]_0^x$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x - 1$$

c. $f(x) = x^2 \cdot e^x$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_0^x t^2 \cdot e^t \, dt$$

$u = t^2$	$v' = e^t$
$u' = 2t$	$v = e^t$

$$F(x) = \left[t^2 \cdot e^t\right]_0^x - \underbrace{\int_0^x 2t \cdot e^t \, dt}_{N}$$

$u = 2t$	$v' = e^t$
$u' = 2$	$v = e^t$

$$N = \left[2t \cdot e^t\right]_0^x - \int_0^x 2 e^t \, dt$$

$$= \left[2t \cdot e^t - 2 \cdot e^t\right]_0^x$$

$$F(x) = \left[t^2 \cdot e^t - 2t e^t + 2e^t\right]_0^x$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + 2$$

e. $M = \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx$.

$u = \cos x$	$v' = e^x$
$u' = -\sin x$	$v = e^x$

$$M = \left[e^x \cos x\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx}_{N}$$

$u = \sin x$	$v' = e^x$
$u' = \cos x$	$v = e^x$

$$N = \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos dx$$

$$N = \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi} - M$$

$$M = \left[e^x \cos x\right]_0^{\pi} + \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi} - M$$

$$2M = -e^{\pi} - 1 \rightarrow M = \frac{-e^{\pi} - 1}{2}$$

$$J = \int_1^e \ln x \, dx$$

$u = \ln x$	$v' = 1$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = x$

$$J = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e 1 \, dx$$

$$= \left[x \ln x - x\right]_1^e$$

$$= (e \ln e - e) - (-1) = 1$$

8. تفريق الكسور

♣**نستخدم تفريق الكسور:** عند تحقق الشروط:

△ تابع كسري درجة بسطه أصغر تماماً من درجة مقامه.

△ المقام جداء عوامل درجة أولى غير مكررة.

♣**طريقة تفريق الكسور:**

△ نحلل المقام إلى عوامل درجة أولى.

△ نفرض $\frac{....}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

△ نوحد مقامات ثم نفرض $x = a$ ثم نفرض $x = b$.

مثال9: احسب التكامل $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx$.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a(x-2)+b(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

نضرب بالمقام المشترك: $1 = a(x-2) + b(x+1)$

نعوض $x = -1$ نجد $a = -\frac{1}{3}$ ونعوّض $x = 2$ نجد $b = \frac{1}{3}$.

أي $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln|x-2|\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\ln|x+1|\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\ln 2$$

♣**إذا كانت درجة البسط أكبر من المقام نقسم قسمة اقليدية.**

[13] جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I .

ⓐ $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$, $I =]1,+\infty[$

ⓑ $f(x) = \frac{x}{x^2-x-6}$, $I =]-2,3[$

ⓒ $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x}$, $I =]-1,0[$

ⓓ $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$, $I =]2,+\infty[$

الحل:

a. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$

$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$x+3 = a(x+1) + b(x-1)$

نفرض $x=-1$

$2 = -2b \Rightarrow b = -1$

نفرض $x = 1$

$4 = 2a \Rightarrow a = 2$

$f(x) = 2\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

$F(x) = 2\ln|x-1| - \ln|x+1| = 2\ln(x-1) - \ln(x+1)$

b. $f(x) = \frac{x}{x^2-x-6}$

$= \frac{x}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x-3)}{(x-3)(x+2)}$

$x = a(x+2) + b(x-3)$

نفرض $x=-2$

$-2 = -5b \Rightarrow b = \frac{2}{5}$

نفرض $x=3$

$3 = 5a \Rightarrow a = \frac{3}{5}$

$f(x) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x+2}$

$F(x) = \frac{3}{5}\ln|x-3| + \frac{2}{5}\ln|x+2|$

$= \frac{3}{5}\ln(-x+3) + \frac{2}{5}\ln(x+2)$

c. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+x}$

$\frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)}$

$2x-1 = a(x+1) + bx$

نعوض $x=0$

$-1 = a$

نعوض $x=-1$

$-3 = -b \rightarrow b = 3$

$f(x) = -\frac{1}{x} + 3\frac{1}{x+1}$

$F(x) = -\ln|x| + 3\ln|x+1| \rightarrow$

$= -\ln(-x) + 3\ln(x+1)$

نعوض رقم من المجال إذا طلع سالب نقلب الإشارات وإذا موجب نخليه مثل ما هو

d. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ x^2-x-2 & x^3 \\ & \underline{-x^3 \pm x^2 \pm 2x} \\ & x^2+2x \\ & \underline{-x^2 \pm x \pm 2} \\ & 3x+2 \end{array}$$

$f(x) = x+1 + \frac{3x+2}{x^2-x-2}$

$\frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)}$

$3x+2 = a(x+1) + b(x-2)$

نعوض $x=-1$

$-1 = -3b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$

نعوض $x=2$

$8 = 3a \Rightarrow a = \frac{8}{3}$

$f(x) = x+1 + \frac{8}{3}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}$

$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1|$

$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3}\ln(-x+2) + \frac{1}{3}\ln(x+1)$

[14] f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق $f(x) = \frac{4x^2-5x+1}{x+3}$.

ⓐ جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$.

ⓑ احسب $J = \int_2^0 f(x)dx$.

الحل:

a.

$$\begin{array}{r|l} & 4x-17 \\ x+3 & 4x^2-5x+1 \\ & \underline{-4x^2 \mp 12x} \\ & -17x+1 \\ & \underline{\pm 17x \pm 51} \\ & 52 \end{array}$$

$f(x) = 4x-17 + \frac{52}{x+3}$

$a = 4 \quad b = -17 \quad c = 52$

b. $J = \int_2^0 f(x)\,dx$

$= \int_2^0 4x - 17 + 52\frac{1}{x+3}\,dx$

$= \left[4\frac{x^2}{2} - 17x + 52\ln|x+3|\right]_2^0 = \left[2x^2 - 17x + 52\ln|x+3|\right]_2^0$

$= f(0) - f(2)$

$= 52\ln(3) - (8 - 34 + 52\ln 5) = 26 + 52\ln(5)$

[15] f التابع المعرف على $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$.

ⓐ جد a و b و c التي تحقق $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$.

ⓑ احسب $J = \int_{-3}^0 f(x)dx$.

الحل:

a. $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

$\frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{(x-1)^2}$

$x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

بفرض x=1 ← $\boxed{1=c}$

بفرض x=0 (1) $\boxed{0=a-b+1}$

بفرض x=2 (2) $\boxed{4=a+b+1}$

بالجمع:

$4=2a+2 \to \boxed{a=1}$

بالتعويض بـ (1): $0=1-b+1 \to \boxed{b=2}$

$f(x)=1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

b. $J=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$

$=\int_{-3}^{0} 1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_{-3}^{0} 1+2\frac{1}{x-1}+(x-1)^{-2}\,dx$

$=\left[x+2\ln|x-1|+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_{-3}^{0} = \left[x+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}\right]_{-3}^{0}$

$=F(0)-F(-3) = (0+0+1)-(-3+2\ln 4+\frac{1}{4})$

$=1+3-\frac{1}{4}-2\ln 4 = \frac{15}{4}-4\ln 2$

♣ يمكن مكاملة طرفي متراجحة بشرط أن تكون حدود التكامل من الأصغر إلى الأكبر.

أي إذا كان $a<b$، وكان $f \ge g$ على $[a,b]$ كان $\int_a^b f \ge \int_a^b g$.

مثال10: أثبت أن $\sin x \le x$ في حالة $x>0$

الحل:

نعلم أن $\cos t \le 1$ وفي حالة $x>0$

$$\int_0^x \cos t\,dt \le \int_0^x 1\,dt \Rightarrow$$

$$[\sin t]_0^x \le [t]_0^x$$

$$\sin x - \sin 0 \le x$$

$$\sin x \le x$$

[16] لدينا أن $1-\frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$، أيا يكن $x\in\mathbb{R}$.

ⓐ بين أن $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$، أيا يكن $x \ge 0$.

ⓑ استنتج نهاية $\frac{x-\sin x}{x^2}$ عندما يسعى x إلى الصفر.

الحل:

a. $1-\frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$

$\int_0^x 1-\frac{t^2}{2}\,dt \le \int_0^x \cos t\,dt \le \int_0^x 1\,dt$

$\left[t-\frac{t^3}{6}\right]_0^x \le [\sin t]_0^x \le [t]_0^x$

$x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$

b. $-x-\frac{x^3}{6} \ge -\sin x \ge -x$

$-\frac{x^3}{6} \ge x-\sin x \ge 0$

$-\frac{x}{6} \ge \frac{x-\sin x}{x^2} \ge 0$

$\lim_{x\to 0} -\frac{x}{6} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

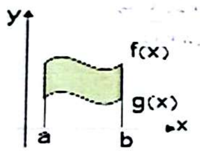
$\to \lim_{x\to 0^-} \frac{x-\sin x}{x^2} = 0$

بما أن التابع فردي

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

9. المساحة:

♣ المساحة تساوي تكامل من اليسار إلى اليمين للتابع الأعلى ناقص التابع الأدنى.



أي $S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)\,dx$

♣ ناتج المساحة والحجم دائماً موجب تماماً.

♣ عند إيجاد المساحة يجب معرفة اليمين واليسار والأعلى والأدنى.

♣ عند عدم معرفة اليمين أو اليسار نجد الحل المشترك للأعلى والأدنى.

♣ عند عدم معرفة الأعلى والأدنى نضع قيمة مطلقة أي:

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

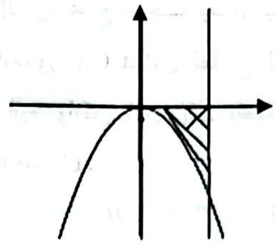
مثال11: ليكن التابع $f(x)=x^2$ احسب المساحة للسطح المحصور بين الخط C والمحور Ox والمستقيمين $x=1$ و $x=2$.

الحل:

$$S=\int_1^2 f(x)-0\,dx = \int_1^2 x^2\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

مثال12: ليكن التابع $f(x) = -x^2$ احسب المساحة بين الخط البياني والمحور Ox والمستقيم $x = 1$



الحل:

$$S = \int_0^1 0 - f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

مثال13: ليكن $C: f(x) = x^2$ و $\Delta:\ y = 2x + 3$ احسب المساحة المحصورة بين C و Δ؟

الحل: نوجد نقاط التقاطع بالحل المشترك للمعادلتين

$$y = 2x + 3 \text{ و } y = x^2$$

$$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

او $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$S = \int_{-1}^{3} \left|x^2 - 2x - 3\right| dx = \int_{-1}^{3} -x^2 + 2x + 3\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

[17] ليكن التابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ احسب المساحة للسطح المحصور بين الخط C والمحور Ox والمستقيمين $x = 2$ و $x = 5$.

الحل:

$S = \int_2^5 f(x) - 0\,dx$

$= \int_2^5 \sqrt{x-1}\,dx$

$= \int_2^5 (x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

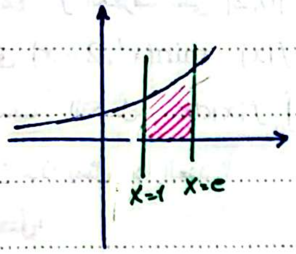
$= \left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] dx$

$= \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x-1)^3}\right]_2^5$

$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

[18] ليكن التابع $f(x) = e^x$ احسب المساحة للسطح المحصور بين الخط C والمحور Ox والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$.

الحل:



$S = \int_1^e f(x) - 0\,dx$

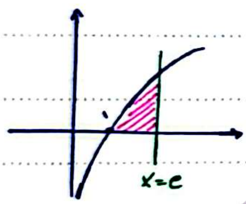
$= \int_1^e e^x\,dx$

$= [e^x]_1^e$

$= e^e - e$

[19] ليكن التابع $f(x) = \ln x$ احسب المساحة بين الخط البياني والمحور Ox والمستقيم $x = e$.

الحل:



$S = \int_1^e f(x) - 0\,dx$

$= \int_1^e \ln x\,dx$

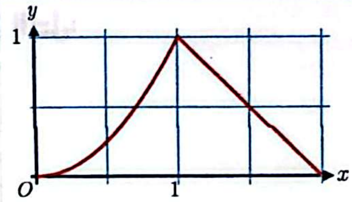
$u = \ln x$	$v' = 1$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = x$

$= [\ln x . x]_1^e - \int_1^e x . \frac{1}{x}\,dx$

$= [\ln x . x - x]_1^e = e - e - (-1) = +1$

♣ نرمز $\min(a,b)$ إلى أصغر العددين a و b.
نرمز $\max(a,b)$ إلى أكبر العددين a و b.

[20] f المعرّف على $[0,2]$ وفق $f(x)=\min(x^2,2-x)$.
احسب التكامل $\int_0^2 f(x)dx$ ، وقل ماذا يمثل هذا العدد ؟



الحل:

$f_1 = x^2 \qquad f_2 = 2-x$

$f_1 - f_2 = x^2 - 2 + x = x^2 + x - 2$

$f_1 - f_2 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2 \quad x = 1$

x	$-\infty$		-2		1		2	$+\infty$
$f_1 - f_2$ x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$		

$x \in [0,1]$

$f_1 - f_2 < 0 \longrightarrow f_1 < f_2$

$x \in [1,2]$

$f_1 - f_2 > 0 \longrightarrow f_1 > f_2$

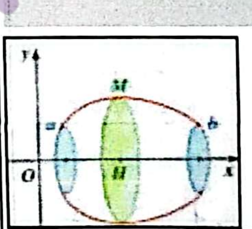
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1] \\ 2-x & x \in [1,2] \end{cases}$$

$S = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 2-x\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left(4 - 2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

ويمثل مساحة السطح المحصور بين $x=0$ و $x=2$ والخط البياني والمحور ox

10. الحجم:



♣ يعطى الحجم بالقاعدة:

$$\boxed{V = \int_a^b A(t)\,dt} \qquad V = \int_a^b \pi (f(x))^2\,dx$$

حيث

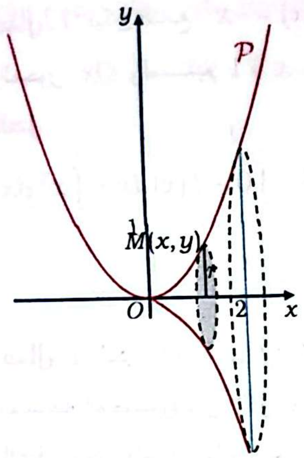
△ a,b مسقط طرفي المجسم على أحد المحاور.

△ t مجهول المحور الذي اسقطنا عليه.

△ $A(t)$ مساحة مقطع المجسم بمستو يعامد المحور الذي اسقطنا عليه.
وهو غالباً دائرة مساحتها $S=\pi r^2$.

مثال14: احسب الحجم الناتج عن دوران الخط البياني C حول محور Ox دورة كاملة على المجال $[0,2]$

$f(x) = x^2$



الحل: نقطع المجسم بمستوٍ يعامد المحور Ox فيكون المقطع الناتج دائرة ولتكن $M(x,y)$ نقطة من الخط C.

$A(x) = \pi r^2 = \pi y^2$
$= \pi (x^2)^2 = \pi x^4$

$V = \int_a^b A(t)dt = \int_0^2 \pi x^4\,dx$

$= \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$

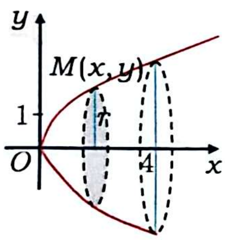
مثال15: f التابع المعرف على $D=[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x}$

ⓐ احسب الحجم الناتج عن دوران الخط البياني C حول محور Ox دورة كاملة على المجال $[0,4]$.

ⓑ احسب الحجم الناتج عن دوران السطح المحصور بين الخط البياني C والمحور Oy والمستقيم $y=1$ حول Oy دورة كاملة .

الحل:

ⓐ نقطع المجسم بمستوٍ يعامد المحور Ox فينتج مقطع هو دائرة.
لتكن $M(x,y)$ نقطة من الخط C.

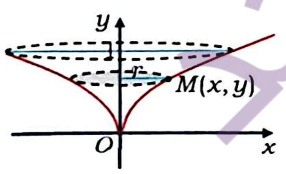


$A(x) = \pi r^2$
$= \pi y^2 = \pi (\sqrt{x})^2$
$= \pi x$

$V = \int_a^b A(t)dt = \int_0^4 \pi x\,dx$

$= \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$

ⓑ نقطع المجسم بمستوٍ يعامد المحور Oy فيكون المقطع الناتج دائرة ولتكن $M(x,y)$ نقطة من الخط C.

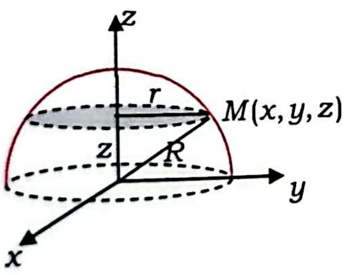


$A(y) = \pi r^2 = \pi x^2$
$= \pi (y^2)^2 = \pi y^4$

حيث $y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$

$V = \int_a^b A(t)dt = \int_0^1 \pi y^4\,dy = \pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$

مثال16: احسب حجم كرة نصف قطرها R .



الحل: نقطع المجسم بمستوٍ يعامد المحور Oz فيكون المقطع الناتج دائرة ولتكن $M(x,y)$ نقطة من الخط C.

$A(z)=\pi r^2$ بحسب مبرهنة فيثاغورث : $r^2+z^2=R^2$

ومنه $r^2=R^2-z^2$ أي $A(z)=\pi\left(R^2-z^2\right)$

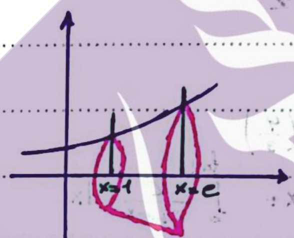
$$V=\int_a^b A(z)dz=\int_0^R \pi\left(R^2-z^2\right)dx$$

$$=\left[\pi\left(R^2z-\frac{z^3}{3}\right)\right]_0^R=\frac{2\pi}{3}R^3$$

وهو حجم نصف الكرة فيكون حجم الكرة $V=\frac{4\pi}{3}R^3$

[21] ليكن التابع $f(x)=e^x$ احسب الحجم الناتج عن دوران السطح المحصور بين الخط C والمحور Ox والمستقيمين $x=1$ و $x=e$. حول المحور Ox دورة كاملة.

الحل:



$V=\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$

$=\int_1^e \pi(e^x)^2\,dx$

$=\int_1^e \pi e^{2x}\,dx$

$\left[\pi\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^e=\left[\frac{\pi}{2}\cdot e^{2x}\right]_1^e$

$=\frac{\pi}{2}\cdot e^{2e}-\frac{\pi}{2}\cdot e^{2}$

[22] ليكن التابع $f(x)=\sin x$

ⓐ ارسم الخط البياني على المجال $[0,\pi]$

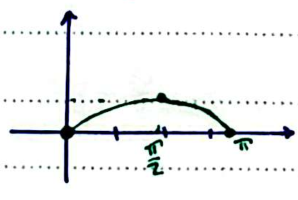
ⓑ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني والمحور Ox.

ⓒ احسب الحجم الناتج عن دوران الخط البياني C حول محور Ox دورة كاملة على المجال $[0,\pi]$.

الحل:

a.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	0	1	0



b. $S=\int_0^\pi (f(x)-0)\,dx$

$=\int_0^\pi \sin x\,dx$

$=\left[-\cos x\right]_0^\pi=1+1=2$

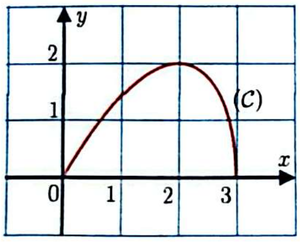
c. $V=\int_0^\pi \pi(f(x))^2\,dx$

$=\int_0^\pi \pi\sin^2 x\,dx$

$=\int_0^\pi \pi\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$

$=\left[\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}$

[23] في الشكل المجاور (C) هو الخط للتابع f المعرف على المجال $[0,3]$ بالصيغة: $f(x)=x\sqrt{3-x}$. عندما يدور (C) دورة كاملة حول محور الفواصل يولّد مجسماً دورانياً S.



1. ما طبيعة مقطع المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ حيث $x\in]0,3[$؟

2. عيّن $A(x)$ مساحة المقطع، ثمّ استنتج V حجم المجسم S.

الحل:

$f(x)=x\sqrt{3-x}$ $[0,3]$

1- صيغة المقطع هي دائرة

2- $A(x)=\pi f^2(x)=\pi x^2(3-x)$

$V=\int_0^3 \pi x^2(3-x)\,dx$

$=\int_0^3 \pi(3x^2-x^3)\,dx=\left[\pi\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)\right]_0^3$

$=\left[\pi\left(27-\frac{81}{4}\right)\right]$

$=27\pi-\frac{81\pi}{4}$

[25] (دورة 1-2018) ليكن $I=\int_0^{\ln 2}\frac{2}{2+e^x}dx$.

احسب $J=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{2+e^x}dx$ ، ثم $I+J$ ، واستنتج I .

الحل:

$J=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{2+e^x}dx$

$=\left[\ln|2+e^x|\right]_0^{\ln 2}$

$=\ln 4-\ln 3=\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

$J+I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{2+e^x}dx+\int_0^{\ln 2}\frac{2}{2+e^x}dx$

$=\int_0^{\ln 2}\frac{2+e^x}{2+e^x}dx$

$=\int_0^{\ln 2}1\,dx=[x]_0^{\ln 2}=\ln 2$

وجدنا أن:

$I+J=\ln 2$

$I=\ln 2-J$

$=\ln 2-\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

$=\ln\left(\frac{6}{4}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

تمارين عامة

[24] أثبت أن $\underbrace{\frac{1}{1+e^x}}_{L_1}=\underbrace{1-\frac{e^x}{1+e^x}}_{L_2}$ ، واستنتج $I=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$.

الحل:

ط2

$L_1=\frac{1}{1+e^x}$

$=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}=L_2$

ط1

$L_2=1-\frac{e^x}{1+e^x}$

$\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}=L_1$

$I=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$

$=\int_0^1 1-\frac{e^x}{1+e^x}dx$

$=\left[x-\ln|1+e^x|\right]_0^1$

$=1-\ln(1+e)-(-\ln 2)=1+\ln 2-\ln(1+e)$

$=1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$

اذا سالب المجالات
نقلبه ونأخذ سالب بينهما

[26] ليكن $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$ و $J=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ ،

احسب J ثُم $I+J$ ، واستنتج I

الحل:

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos x}{1+2\sin x}dx$

$=\left[\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}\ln 3-0=\ln\sqrt{3}$

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{1+2\sin x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x.\cos x+\cos x}{1+2\sin x}dx \qquad \sin 2x=2\sin x.\cos x$

$\cos 2x=\begin{cases}\cos^2 x-\sin^2 x\\ 2\cos^2 x-1\\ 2\sin^2 x\end{cases}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x(2\sin x+1)}{1+2\sin x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$I+J=1 \qquad I=1-J$

$I=1-\ln\sqrt{3}$

[27] نضع: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x\,dx$ و $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 x\,dx$

ⓐ احسب $I+J$. ⓑ تحقق أن $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos(2x)dx$

ⓒ احسب $I-J$ ثم استنتج قيمة كل من I و J .

الحل:

a. $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x+x\sin^2 x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}$

b. $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x-x\sin^2 x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\cos 2x\,dx$ وهو المطلوب

c. $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x.\cos 2x\,dx$

$u=x$	$v'=\cos 2x$
$u'=1$	$v=\frac{1}{2}\sin 2x$

$=\left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$=\left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left[\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(0-\frac{1}{4}\right)-\left(0+\frac{1}{4}\right)=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

$I+J=\frac{\pi^2}{8}$

$I-J=-\frac{1}{2}$

$2I=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}$ بالجمع

$I=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$

$2J=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}$ بالطرح

$J=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$

[28] ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^{2x}\cos x$.

ⓐ احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

ⓑ عيّن عددين a و b يحققان المساواة $f(x)=af'(x)+bf''(x)$

ⓒ استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل:

a. $f'(x)=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x$

$f''(x)=4e^{2x}\cos x-2e^{2x}\sin x-(2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x)$

$f''(x)=3e^{2x}\cos x-4e^{2x}\sin x$

b. $f(x) = a f'(x) + b f''(x)$

$e^{2x}\cos x = a(2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x) + b(3e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\sin x)$

نقسم الطرفين على e^{2x}

$\cos x = a(2\cos x - \sin x) + b(3\cos x - 4\sin x)$

$\cos x = 2a\cos x - a\sin x + 3b\cos x - 4b\sin x$

$\cos x = (2a+3b)\cos x + (-a-4b)\sin x$

بالمقارنة: $2a+3b = 1$ ---- (1)

$-a-4b = 0$ ---- (2)

من (2) $* \; \boxed{a = -4b}$

نعوض بـ (1)

$-8b+3b = 1 \quad -5b = 1 \quad b = -\frac{1}{5}$

نعوض بـ $*$

$a = -4(-\frac{1}{5}) \rightarrow a = +\frac{4}{5}$

$f(x) = \frac{4}{5} f'(x) - \frac{1}{5} f''(x)$

c. نوجد التابع الأصلي للطرفين:

$F(x) = \frac{4}{5} f(x) - \frac{1}{5} f'(x)$

$F(x) = \frac{4}{5} e^{2x}\cos x - \frac{1}{5}(2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x)$

$F(x) = \frac{2}{5} e^{2x}\cos x + \frac{1}{5} e^{2x}\sin x$

[29] ليكن التابع f المعرفة على $]0,\infty[$ وفق $f(x) = x - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

ⓐ برهن $g(x) = \frac{x^2}{2} - x + x\ln x$ تابع أصلي على $]0,+\infty[$

ⓑ جد ناتج $I = \int_1^e x - \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$

الحل:

a. g اشتقاقية على $]0,+\infty[$

$g'(x) = x - 1 + \ln x + 1 = x + \ln x = x - (-\ln x)$

$= x - \ln(\frac{1}{x}) = f(x)$

g تابع أصلي لـ f على $]0,+\infty[$

b. $I = \int x - \ln(\frac{1}{x})\, dx$

$g(x)$ هو تابع أصلي لـ $x - \ln(\frac{1}{x})$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x + x\ln x\right]_1^e$

$= (\frac{e^2}{2} - e + e) - (\frac{1}{2} - 1 + 0)$

$= \frac{e^2+1}{2}$

$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

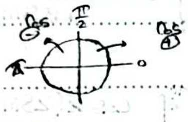
$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

$\cos, \sin$ لـ من اصغر قيمة لاكبر قيمة • بالاتجاه الموجب للدوران

[30] احسب $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$

الحل:

$\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2 x}\, dx$



$\int_0^{\pi} \sqrt{2}\,|\cos x|\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sqrt{2}\cos x\, dx$

$= [\sqrt{2}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\sqrt{2}\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= (\sqrt{2} - 0) + (0 - (-\sqrt{2})) = 2\sqrt{2}$

[31] ليكن f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (2-x)e^x$

ⓐ ادرس تغيرات f وارسم C.

ⓑ احسب مساحة S الجزء المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=2$، والخط C ومحور الفواصل.

ⓒ عيّن الأعداد a و b و c حتى يكون التابع $G : x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x \mapsto (f(x))^2$.

ⓓ عندما يدور السطح S حول محور الفواصل فإنّه يولّد مجسماً دورانياً حجمه V استنتج قيمة V.

الحل:

a. f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

عند $-\infty$:

$f(x) = 2e^x - xe^x$

لأن $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

$y=0$ مقارب أفقي للخط G في جوار $-\infty$

عند $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

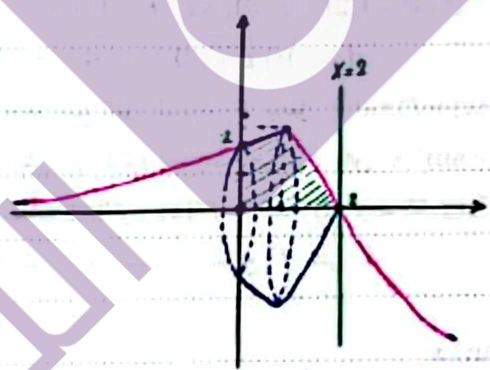
$f'(x) = -e^x + e^x(2-x)$

$= e^x(-1+2-x) = e^x(+1-x)$

$f'(x) = 0 \to 1-x = 0 \to x = 1 \to f(1) = e$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = e$ قيمة حدية كبرى محلية .



تقاطع مع $y'y$:

$f(0) = 2$

تقاطع مع $x'x$:

$f(x) = 0 \quad x = 2$

b. $S = \int_0^2 f(x)\,dx$

$= \int_0^2 (2-x)e^x\,dx$

$u = 2-x$	$v' = e^x$
$u' = -1$	$v = e^x$

$= \left[(2-x)e^x\right]_0^2 + \int_0^2 e^x\,dx$

$= \left[(2-x)e^x + e^x\right]_0^2$

$= e^2 - 3$

c. $G : x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$

تابع أصلي لـ $x \mapsto (f(x))^2$

$G(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$

تابع أصلي لـ $(f(x))^2$

$(G(x))' = (f(x))^2$

$(2ax+b)e^{2x} + 2e^{2x}(ax^2+bx+c) = (2-x)^2e^{2x}$

$2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 4 - 4x + x^2$

$2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c = x^2 - 4x + 4$

بالمطابقة:

$2a = 1$ ... (1)

$2a + 2b = -4$ ... (2)

$b + 2c = 4$ ... (3)

من (1) $a = \frac{1}{2}$ نعوض بـ (2) $b = -\frac{5}{2}$

نعوض بـ (3) :

$-\frac{5}{2} + 2c = 4 \to 2c = 4 + \frac{5}{2} \to 2c = \frac{13}{2} \Rightarrow c = \frac{13}{4}$

$G(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$

d. $V = \int_a^b A(t)\,dt$

$= \int_0^2 A(x)\,dx = \int_0^2 \pi f^2(x)\,dx$

$= \left[\pi\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}\right]_0^2$

$= \frac{\pi}{4}e^4 - \frac{13\pi}{4}$