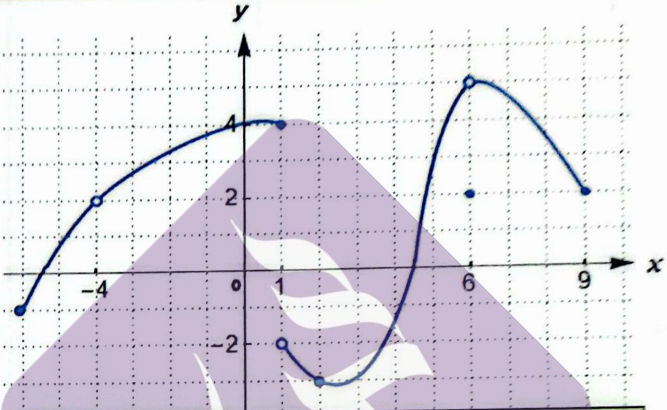
النهايات

1. النهاية عند عدد بيانيا:

نقول إن نهاية f عند a هي ℓ إذا تجمعت قيم $f(x)$ قرب ℓ عندما تصبح x قريبة بما يكفي من a. ونكتب $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.



عند 1	عند 2
$f(1)=4$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ لا يوجد نهاية لأن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=4$	$f(2)=-3$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-3$
عند -4	**عند 6**
$f(-4)=$ غير موجود غير معرف $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=2$	$f(6)=2$ $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=$ لا يوجد نهاية
عند -6	**عند 9**
$f(-6)=-1$ $\lim\limits_{x\to -6} f(x)=-1$	$f(9)=2$ $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=2$

قواعد على $\pm\infty$:

$$\frac{a}{\pm\infty}=0\,,\ \frac{1}{0^+}=+\infty,\ \frac{1}{0^-}=-\infty,\ \frac{+\infty}{0^+}=+\infty,\ \frac{+\infty}{0^-}=-\infty,$$

$$+\infty+\infty=+\infty,\ +\infty\pm a=+\infty,\ \infty\times\infty=\infty$$

2. النهاية عند عدد a:

♣ في التوابع (كثير الحدود والكسري والمرجعية) نعوض مكان كل x بـ a أي $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

♣ في حال وجود صفر في المقام ندرس إشارة المقام.

مثال1: جد نهاية كل من التوابع الآتية:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x-1)=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{-2x+7}{x-1}\right)=\dfrac{5}{0^+}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{-2x+7}{x-1}\right)=\dfrac{5}{0^-}=-\infty$ حيث

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

لا يوجد نهاية عند 1

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{-2x+7}{(x-1)^2}\right)=\dfrac{5}{0^+}=+\infty$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{-2x+7}{\sqrt{x-1}}\right)=\dfrac{5}{0^+}=+\infty$

♣ إذا كان الناتج للنهاية عدد حقيقي نقول ان للتابع نهاية حقيقية. أما اذا كان الناتج $+\infty$ او $-\infty$ نقول ان للتابع نهاية ولكنها غير حقيقية. واما اذا كانت النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار أو وجد عدة نتائج عندئذ نقول انه ليس للتابع نهاية.

[1] ادرس نهاية التابع f عند a.

ⓐ $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1},\quad a=1$ ⓑ $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2},\quad a=2$

ⓒ $f(x)=\dfrac{2x-1}{-x+1},\quad a=1$ ⓓ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}\quad a=-2$

ⓔ $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-2)^2},\quad a=2$ ⓕ $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}},\quad a=-2$

الحل:

a. $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}\quad a=1$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$

لا يوجد لـ f نهاية عند 1.

b. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}\quad a=2$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{6}{0^-}=-\infty\quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{6}{0^+}=+\infty$

لا يوجد لـ f نهاية عند 2

c. $f(x) = \dfrac{2x-1}{-x+1}$ $\quad a = 1$

$-x+1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

لا يوجد لـ f نهاية عند 1 .

d. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4}$ $\quad a = -2$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \,<\,^{-2}_{2}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty$

لا يوجد لـ f نهاية عند 2- .

$a = 2$ Add

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{5}{0^-} = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

لا يوجد لـ f نهاية عند 2

e. $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ $\quad a = 2$

$(x-2)^2 = 0 \qquad x-2=0 \qquad x = 2$ $\quad$ ط1

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$(x-2)^2$		$+$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{4}{0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$ $\quad$ ط2

f. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}}$ $\quad a = -2$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

3. النهاية عند $\pm\infty$:

نعوض مكان كل x بقيمة النهاية $\pm\infty$ وفي الحالات التالية:

♣ حالة كثير الحدود: $a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ نعوض في الحد الأعلى درجة أي الحد المسطر.

♣ حالة التابع الكسري: (كسر بسطه ومقامه كثيرا حدود) نوجد نهاية قسمة الحد المسيطر في البسط والمقام.

صحيح = حلاحظة صحيح كسري

مثال1: جد نهاية كل من التوابع الاتية:

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x+7}{3x+5} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x}{3x} \right) = \dfrac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3+6}{x^2-3x+1} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x+6}{x^2-3x+1} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x}{x^2} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2}{x} \right) = 0$

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3\sqrt{x} \right) = +\infty + \infty = +\infty$.

سالب: فردي: أعدد سالب
زوجي: أعدد سالب
لما نخرج شي فيك lim

[2] احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

ⓐ $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$ $\quad$ ⓑ $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

الحل:

a. $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3) = -(-\infty)^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b. $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ملاحظة: عند وجود مقدار وجذره نضرب البسط والمقام بالجذر.

[3] ادرس نهاية التابع f عند a.

ⓐ $a=+\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

ⓑ $a=\mp\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{-x^2-1}{x^2+x-2}$

ⓒ $a=-\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$

ⓓ $a=+\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x-3}$

الحل:

a. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ $\quad a=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

b. $f(x)=\dfrac{-x^2-1}{x^2+x-2}$ $\quad a=\mp\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1$

c. $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $\quad a=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$

d. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x-3}$ $\quad a=+\infty$

$=\dfrac{\sqrt{x-3}\,\sqrt{x-3}}{x-3\,\sqrt{x-3}}=\dfrac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x-3})}=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{\infty}=0$

التوابع المرجعية: هي $|x|, \dfrac{1}{x}, x^2, e^x, \ln x, \sqrt{x}, \cos x, \sin x$

إذا كانت حشوة التابع غير x نسميه مركب مثل تابع $x\mapsto\sqrt{x}$ تابع مرجعي و $x\mapsto\sqrt{x^2+1}$ تابع مركب و $x\mapsto f(x^2+x)$ تابع مركب.

4. نهاية التابع المركب:

نوجد نهاية مضمون التابع فينتج b ثم نكتب نهاية التابع تساوي نهاية التابع المرجعي عندما x تسعى الى b.

مثلاً: لإيجاد $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}$ نوجد $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ثم نكتب $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\lim\limits_{X\to b}\sqrt{X}=\sqrt{b}$.

مثال2: جد نهاية كل من التوابع الاتية:

(1) $f(x)=\sqrt{x^3-x}$ $\quad a=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x)=\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3-x})=\lim\limits_{X\to\infty}(\sqrt{X})=\sqrt{\infty}=\infty$

(2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{8x+1}{2x+3}}$ $\quad a=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{8x+1}{2x+3})=4$ ومنه $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{\dfrac{8x+1}{2x+3}})=\lim\limits_{X\to4}(\sqrt{X})=\sqrt{4}=2$

[4] ليكن f معرفا على مجموعة D احسب نهاية f عند a.

ⓐ $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$, $a=-\infty$ $\quad D=]-\infty,1[$

ⓑ $f(x)=\sqrt{-x^3+x^2+x}$, $a=-\infty$ $\quad D=\left]-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

ⓒ $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$, $a=+\infty$ $\quad D=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

الحل:

a. $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$ $\quad a=-\infty$

$X=\dfrac{-x+1}{x^2+1}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} X=\lim \dfrac{-1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to0}\sqrt{X}=0$

b. $f(x)=\sqrt{-x^3+x^2+x}$ $\quad a=-\infty$

$X=-x^3+x^2+x$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} X=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

c. $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$ $\quad a=+\infty$

$X=\dfrac{\pi x+1}{x+2}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} X=\pi$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{X\to\pi}\cos(X)=\cos\pi=-1$

[5] ليكن f التابع المعرف على $]-5,+\infty[$ وفق $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$.

ⓐ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

ⓑ اكتب $f(f(x))$ بدلالة x ثم جد $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$.

الحل:

a. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=$

نهاية تابع مركب .

$X=f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} X=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{X\to 1} f(X)=\frac{1-3}{1+5}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

b. $f(f(x))=\frac{f(x)-3}{f(x)+5}=\frac{\frac{x-3}{x+5}-3}{\frac{x-3}{x+5}+5}$

$=\frac{\frac{x-3-3x-15}{x+5}}{\frac{x-3+5x+25}{x+5}}=\frac{-2x-18}{6x+22}$

$\Rightarrow \lim f(f(x))=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

[6] ليكن g التابع المعرف على $]3,+\infty[$ وفق $g(x)=\frac{3x-1}{x-3}$.

اكتب $g(g(x))$ بدلالة x ثم جد $\lim_{x\to+\infty} g(g(x))$.

الحل:

$g(g(x))=\frac{3(g(x))-1}{g(x)-3}=\frac{3\left(\frac{3x-1}{x-3}\right)-1}{\frac{3x-1}{x-3}-3}$

$=\frac{\frac{9x-3-x+3}{x-3}}{\frac{3x-1-3x+9}{x-3}}=\frac{8x}{8}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(g(x))=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{8}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

5. مبرهنة الإحاطة

♣ لتكن $g(x)\le f(x)\le h(x)$ وكان $\lim g(x)=\lim h(x)=\ell$ عندئذ $\lim f(x)=\ell$.

♣ **غالبية:** نستعملها في $\sin(\pm\infty),\ \cos(\pm\infty),\ E(\pm\infty)$.

♣ وفي مبرهنة الإحاطة نستعمل المحدوديات الاتية:

$-1\le\sin x\le 1,-1\le\cos x\le 1,\quad 0\le\sin^2 x\le 1,$

$0\le\cos^2 x\le 1,\ (\ )^2\ge 0,\ \sqrt{\ }\ge 0,\ |\ |\ge 0$

مثال3: جد النهاية $\lim_{x\to 0} x^2.\cos\frac{1}{x}$.

الحل: إن $-1\le\cos\frac{1}{x}\le +1$ أيا كانت $x\in\mathbb{R}^*$ نضرب بـ x^2 :

$$-x^2\le x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\le x^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} -x^2=\lim_{x\to+\infty} x^2=0$$

وحسب مبرهنة الإحاطة $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

[7] f المعرف وفق $f(x)=\frac{3x+\cos x}{x}$. أيا يكن $x>1$.

ما نهاية f عند $+\infty$.

الحل:

$-1\le\cos x\le 1$

$3x-1\le 3x+\cos x\le 3x+1$ نقسم على $0<x$

$\frac{3x-1}{x}\le\frac{3x+\cos x}{x}\le\frac{3x+1}{x}$

$\frac{3x-1}{x}\le f(x)\le\frac{3x+1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x}=3 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x}=3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

[8] f المعرف وفق $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$. أيا يكن $x>1$.

ⓐ أثبت أن $\dfrac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\dfrac{2x+1}{x-1}$ ⓑ ما نهاية f عند $+\infty$.

الحل:

a. $-1 \le \sin x \le 1$

$2x-1 \le 2x+\sin x \le 2x+1$ $\qquad x>1$, $x-1>0$

$\dfrac{2x-1}{x-1} \le \dfrac{2x+\sin x}{x-1} \le \dfrac{2x+1}{x-1}$

$\dfrac{2x-1}{x-1} \le f(x) \le \dfrac{2x+1}{x-1}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

[9] جد نهاية $f: x\mapsto \dfrac{\cos x}{x+1}$ عند $-\infty$.

الحل:

$-1 \le \cos x \le 1$

$\dfrac{-1}{x+1} \ge \dfrac{\cos x}{x+1} \ge \dfrac{1}{x+1}$ $\qquad$ عند $-\infty$: $x+1<0$

$\dfrac{-1}{x+1} \ge f(x) \ge \dfrac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x+1}=0$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

[10] لدينا $\dfrac{3x+\cos x}{x}\le f(x)\le\dfrac{3x+7}{x-1}$ ما نهاية f عند $+\infty$؟

الحل:

$\dfrac{3x-1}{x} \le f(x) \le \dfrac{3x+7}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-1}{x}=3$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+7}{x-1}=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

ملاحظة: يمكن تصغير الصغير او تكبير الكبير .

6. مبرهنة (المقارنة): متراجحتين احاطة . متراجحة واحدة احاطة

لتكن المترجحة $g(x)\le f(x)$.

♣ إذا كان $\lim g(x)=+\infty$ ، عندئذ $\lim f(x)=+\infty$.

♣ إذا كان $\lim f(x)=-\infty$ ، عندئذ $\lim g(x)=-\infty$.

مثال4: جد نهاية التابع $f: x\mapsto 2x+\cos x$ عند $+\infty$.

الحل: لدينا $-1\le\cos x\le 1$

نضيف $2x$: $2x-1\le 2x+\cos x\le 2x+1$ أي

$2x-1\le f(x)\le 2x+1$

وحسب مبرهنة المقارنة نجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

[11] f يحقق $f(x)\ge\dfrac{1}{4}x^2$ ، $x<0$. ما نهاية f عند $-\infty$؟

الحل:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{4}x^2=+\infty \rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

[12] f يحقق $f(x)\le -x^2$ ، $x<0$. ما نهاية f عند $-\infty$؟

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty \rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

[13] ادرس نهاية التابع f عند a.

ⓐ $f(x)=2x^2-5\sin x \quad a=-\infty$ ⓑ $f(x)=2x+\sin^2 x \quad a=+\infty$

ⓒ $f(x)=x^3(2+\cos x) \quad a=-\infty$ ⓓ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x} \quad a=-\infty$

ⓔ $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x} \quad a=0$ ⓕ $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{x} \quad a=+\infty$

الحل:

a. $f(x)=2x^2-5\sin x \qquad a=-\infty$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نضرب بـ -5

$$5 \ge -5\sin x \ge -5$$

$$2x^2+5 \ge 2x^2-5\sin x \ge 2x^2-5$$

$$2x^2+5 \ge f(x) \ge 2x^2-5$$

$$\underbrace{\lim_{x\to-\infty} 2x^2+5 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} 2x^2-5 = +\infty}_{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

b. $f(x)=2x+\sin^2 x \qquad a=+\infty$

$$0 \le \sin^2 x \le 1$$

$$2x \le 2x+\sin^2 x \le 2x+1$$

$$2x \le f(x) \le 2x+1$$

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty}_{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

c. $f(x)=x^3(2+\cos x) \qquad a=-\infty$

$$-1 \le \cos x \le 1$$

$$1 \le 2+\cos x \le 3$$

نضرب بـ $x^3<0$

$$x^3 \ge x^3(2+\cos x) \ge 3x^3$$

$$x^3 \ge f(x) \ge 3x^3$$

$$\underbrace{\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty}_{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

d. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x} \qquad a=-\infty$

$$-1 \le \sin x \le 1$$

نقسم على $x<0$

$$\frac{-1}{x} \ge \frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{x}$$

$$\frac{-1}{x} \ge f(x) \ge \frac{1}{x}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0}_{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$$

e. $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{1}{x} \qquad a=0$

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$$

$x<0$

$$-x \ge x\sin\frac{1}{x} \ge x$$

$$-x \ge f(x) \ge x$$

$$\lim_{x\to0^-} -x = 0 \qquad \lim_{x\to0^-} x = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$$

$x>0$

$$-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x$$

$$-x \le f(x) \le x$$

$$\lim_{x\to0^+} -x = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$$

$$\lim f(x) = 0$$

f. $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{x} \qquad a=+\infty$

$$-1 \le \cos x \le 1$$

$$-1+\frac{1}{x} \le \cos x+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{x}$$

$$\frac{-x+1}{x} \le f(x) \le \frac{x+1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x+1}{x} = -1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

لا يمكن تعيين النهاية

[14] (دورة 1 – 2018) g معرف وفق $g(x) = \dfrac{1}{3+\cos x}$.

ⓐ أثبت أن g محدود. ⓑ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{3+\cos x}$.

الحل:

a. $-1 \le \cos x \le 1$

$2 \le 3+\cos x \le 4$

$\frac{1}{2} \ge \frac{1}{3+\cos x} \ge \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} \le g(x) \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ g محدودة

b. لدينا $\frac{1}{4} \le \frac{1}{3+\cos x} \le \frac{1}{2}$

نضرب بـ $0<x^2$ $\quad \frac{x^2}{4} \le \frac{x^2}{3+\cos x} \le \frac{x^2}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$

حسب مبرهنة المقارنة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+\cos x} = +\infty$

مبرهنة 3: إذا كان $|f(x)-\ell| \le g(x)$. وكان $\lim g(x) = 0$، عندئذ $\lim f(x) = \ell$.

[15] لدينا $|f(x)-3| \le \dfrac{1}{x+1}$، $x \ge 0$. ما نهاية f عند $+\infty$؟

الحل:

$g(x) = \frac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

[16] لدينا $|f(x)+3| \le \dfrac{\sin^2 x}{x^2+1}$. ما نهاية f عند $-\infty$؟

الحل:

$g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2+1}$

$0 \le \sin^2 x \le 1$

نقسم على $0 < x^2+1$

$0 \le g(x) \le \frac{1}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

حسب الإحاطة

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

حسب مبرهنة المقارنة:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

7. حالات عدم التعيين:

هي: $\pm\infty\times 0$ ، $+\infty-\infty$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

أي النتيجة غير معروفة وهنا نتبع أسلوب أخر

حالة $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$:

- في الحالة العامة نخرج من البسط والمقام عامل مشترك.

مثال5: جد نهاية f المعرف وفق $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+3}$ عند $+\infty$.

الحل:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+3}=\frac{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}{x(1+\frac{3}{x})}=\frac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{3}{x}}=1$$

[17] ادرس في كل حالة نهاية التابع f، عند a.

ⓐ $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ $a=+\infty$ ⓑ $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ $a=+\infty$

ⓒ $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ $a=+\infty$ ⓓ $f(x)=\frac{x^2+x+\sqrt{x}}{x^2+1}$ $a=+\infty$

ⓔ $f(x)=\frac{-x-\sqrt{x}}{x-1}$ $a=+\infty$ ⓕ $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $a=+\infty$

الحل:

a. $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ $a=+\infty$

$f(x)=\frac{\cancel{x}(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0}{1+0}=1$

b. $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ $a=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$

c. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ $a=+\infty$

$f(x)=\frac{\sqrt{x}(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty+0}{1-0}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$

d. $f(x)=\frac{x^2+x+\sqrt{x}}{x^2+1}$ $a=+\infty$

$f(x)=\frac{\cancel{x^2}(1+\frac{x}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2})}{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x^2})}=\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0+0}{1+0}=1$

e. $f(x)=\frac{-x-\sqrt{x}}{x-1}$ $a=+\infty$

$f(x)=\frac{\cancel{x}(-1-\frac{\sqrt{x}}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}=\frac{-1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{-1-0}{1-0}=-1$

f. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $a=+\infty$

$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}=\frac{x+1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$|x|=+x$ لأن $x\to+\infty$

$=\frac{x+1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0}{\sqrt{1-0}}=1$

$f(x)=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+1}}$ $a=-\infty$ Add

$f(x)=\frac{2x+4}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}=\frac{2x+4}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$|x|=-x$ لأن $x\to-\infty$

$f(x)=\frac{x(2+\frac{4}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2+\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{2+0}{-\sqrt{1+0}}=\frac{2}{-1}=-2$

حالة $+\infty-\infty$:

في الحالة العامة نخرج عامل مشترك.

وفي حالة الجذر (أي حالة وجود حدين أحدهما جذر والآخر جذر أو كثير حدود): نربع الحدين إذا كان مسيطر = مسيطر نضرب البسط والمقام بالمرافق وإلا نخرج من داخل الجذر x^2 عامل مشترك.

مثال6: جد نهاية $f(x)=\sqrt{x^2+3}-x$ عند $+\infty$.

$$f(x)=\sqrt{x^2+3}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x}$$

$$f(x)=\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}=\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$$

مثال7: جد نهاية f المعرف وفق $f(x)=\sqrt{x+3}-x$ عند $+\infty$.

$$f(x)=\sqrt{x+3}-x=\sqrt{x^2(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})}-x=|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x$$

$$=x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-x=x(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-1)$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-1)=\infty(0-1)=-\infty$$

[18] ادرس في كل حالة نهاية التابع f، عند a.

ⓐ $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$ $\quad a=+\infty$ ⓑ $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ $\quad a=-\infty$

ⓒ $f(x)=\sqrt{1+x^2}-2x$ $\quad a=+\infty$ ⓓ $f(x)=\sqrt{1-2x}+x$ $\quad a=-\infty$

ⓔ $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ $\quad a=+\infty$ ⓕ $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$ $\quad a=-\infty$

الحل:

a. $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$ $\quad a=+\infty$

$$=\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}=\frac{x-1-x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{-1}{\infty+\infty}=\frac{-1}{\infty}=0.$$

b. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ $\quad a=-\infty$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{+\infty}=0$$

c. $f(x)=\sqrt{1+x^2}-2x$ $\quad a=+\infty$

$$=\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}-2x=|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-2x$$

$$=x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-2x=x\left[\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-2\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty[1-2]=\infty[-1]=-\infty$$

d. $f(x)=\sqrt{1-2x}+x$ $\quad a=-\infty$

$$=\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x})}+x=|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}+x$$

$$-x\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}+x=x\left[-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}+1\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty[+1]=-\infty$$

e. $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ $\quad a=+\infty$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}+x}$$

$$=\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}=\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$$

$$=\frac{2x}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right]}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

f. $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x$ $\quad a=-\infty$

$$=\frac{(\sqrt{4x^2+x}+2x)(\sqrt{4x^2+x}-2x)}{\sqrt{4x^2+x}-2x}=\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}-2x}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}-2x}=\frac{x}{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x})}-2x}$$

$$=\frac{x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2x}=\frac{x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2x}$$

$$=\frac{x}{x(-\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2)}=\frac{1}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{-2-2}=-\frac{1}{4}$$

حالة $\frac{0}{0}$: يوجد تمارين اضافية p.205

الطريقة	الدلالة	الحالة
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\sin 0$	$\frac{0}{0}$
مرافق أو $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$	$1-\cos 0$	
مرافق	جذر	
مطابقات أو تحليل	عامة	

مثال8: جد نهاية f المعرف وفق $f(x)=\frac{\sin(3x)}{x}$ عند 0.

$$f(x)=\frac{\sin(3x)}{x}=3\frac{\sin(3x)}{3x}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\3x\to0}}3\frac{\sin(3x)}{3x}=3\times1=3$$

مثال9: جد نهاية f المعرف وفق $f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ عند 0.

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos(x))}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos(x))}$$

$$=\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos(x))}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=(1)^2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال10: جد نهاية f معرف وفق $f(x)=\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$ عند 2.

$$f(x)=\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}=\frac{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}$$

$$f(x)=\frac{3x-2-4}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}=\frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}=\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}=\frac{3}{4}$$

حالة $\pm\infty\times0$:

في الحالة العامة فك أقواس وإلا مثل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

مثال11: جد نهاية f معرف وفق $f(x)=\frac{1}{x}(2x-\sin x)$ عند 0.

$$f(x)=\frac{1}{x}(2x-\sin x)=2-\frac{\sin x}{x}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(2-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

[19] ادرس في كل حالة نهاية التابع f، عند a .

ⓐ $f(x)=\frac{\sin(x-2)}{x-2}$ $a=2$ ⓑ $f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{x}$ $a=0$

ⓒ $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $a=3$ ⓓ $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ $a=0$

ⓔ $f(x)=\frac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ $a=1$ ⓕ $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $a=-1$

الحل:

a. $f(x)=\frac{\sin(x-2)}{x-2}$ $a=2$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x-2\to0}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=1$$

b. $f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{x}$ $a=0$

$$f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\\sqrt{x}\to0}}f(x)=1\times\frac{1}{0^+}=+\infty$$

c. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $a=3$

$$=\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\frac{1}{4}$$

d. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$ $a=0$

$$f(x)=\frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}$$

$$=\frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=2(\sqrt{x+1}+1)$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=2(2)=4$$

تحليل من الدرجة الثالثة او اكثر نقسم على x او عدد يعدمه

[20] ادرس في كل حالة نهاية التابع f .

ⓐ $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ $a=0$ ⓑ $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $a=0$

ⓒ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ $a=1,-2$ ⓓ $f(x)=\dfrac{\sin^2(x-2)}{x^2-4x+4}$ $a=2$

ⓔ $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $a=-2,1$ ⓕ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $a=1$

ⓖ $f(x)=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-9}$ $a=-3$ ⓗ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $a=0$

الحل:

a. $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ $a=0$

$f(x)=\dfrac{x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\dfrac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$=\dfrac{x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}=\dfrac{x(1+\cos x)}{\sin x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1(1+1)=2$

b. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $a=0$

$f(x)=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}=\dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$

$=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{0}{2}=0$

c. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ $a=1$

$f(x)=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x+2)\cancel{(x-1)}}=\dfrac{x+1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{2}{3}$

d. $f(x)=\dfrac{\sin^2(x-2)}{x^2-4x+4}$ $a=2$

$f(x)=\dfrac{\sin^2(x-2)}{(x-2)^2}=\left(\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}\right)^2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x-2\to 0}} f(x)=(1)^2=1$

e. $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $a=1$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+x+1\\ \hline x-1 & 2x^3-x^2-1\\ & -2x^3\pm 2x^2\\ \hline & x^2-1\\ & -x^2\pm x\\ \hline & x-1\\ & -x\pm 1\\ \hline & 0\ 0 \end{array}$$

$f(x)=\dfrac{(2x^2+x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{2x^2+x+1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{2+2}{1+2}=\dfrac{4}{3}$

ملاحظة: عند تحليل مقدار من الدرجة الثالثة نبحث عن عدد يعدم المقدار ثم نقسم على (x-عدد) قسمة اقليدية

$2 \times 3 \,\big|\, 6$

e. $f(x)=\dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ $a=1$

$=\dfrac{-(x-\sqrt{x})}{x-1}=\dfrac{-(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-1)(x+\sqrt{x})}=\dfrac{-(x^2-x)}{(x-1)(x+\sqrt{x})}$

$=\dfrac{-x(x-1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})}=\dfrac{-x}{x+\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\dfrac{1}{2}$

f. $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $a=-1$

$=\dfrac{(x+1)(\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}\,\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{(x+1)(\sqrt{x^2-1})}{x^2-1}$

$=\dfrac{\cancel{(x+1)}(\sqrt{x^2-1})}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{0}{-2}=0$

8. استعمال تعريف النهاية

هنا يمكن الاستفادة من بعض الخواص:

- لحساب مجهول موجود في البسط والمقام من نفس الدرجة نقسم البسط على المقام قسمة اقليدية ثم نكتب الكسر يساوي ناتج القسمة + باقي القسمة على المقسوم عليه.
- $-a < x < a \Leftrightarrow |x| < a$ أي عند وجود مقدار بين عدد ومعكوسه نحذف الجزء السالب ونضع المقدار بالقيمة المطلقة.
- لا يمكن قلب طرفي متراجحة إلا إذا كان طرفيها من نفس الإشارة
- نغير جهة التراجح عند الضرب أو القسمة على سالب أو قلب الطرفين.

$x > A$ ← نأخذ الإشارة +∞

$x < A$ ← −∞

- مركز المجال $]a,b[$ هو $c = \dfrac{a+b}{2}$
- نصف قطر المجال $]a,b[$ هو $r = \dfrac{b-a}{2}$

مثال12: f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-3/2\}$ وفق $f(x) = \dfrac{4x-5}{2x+3}$. عين العدد A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05.

الحل: $f(x)$ ينتمي إلى المجال المفتوح I الذي مركزه 2 ونصف قطره 0.05 إذا تحققت المتراجحة

$$|f(x) - c| < r$$
$$|f(x) - 2| < 0.05$$
$$\left|\frac{4x-5}{2x+3} - 2\right| < \frac{5}{100}$$
$$\left|\frac{-11}{2x+3}\right| < \frac{1}{20}$$
$$\frac{11}{|2x+3|} < \frac{1}{20}$$
$$|2x+3| > 220$$
$$220 < 2x+3$$
$$x > 108.5 \Rightarrow A = 108.5$$

مثال13: جد نهاية للتابع $f : x \mapsto \sqrt{4x+1}$ عند 2. ثم عين مجالا I مركزه 2 يحقق الشرط: إذا كان x من المجال I، كان $f(x)$ من المجال $J =]2.99, 3.01[$.

الحل:

$$f(x) \in]2.99, 3.01[$$
$$2.99 < \sqrt{4x+1} < 3.01$$
$$2.99^2 < 4x+1 < 3.01^2$$
$$\frac{2.99^2 - 1}{4} < x < \frac{3.01^2 - 1}{4}$$
$$1.985025 < x < 2.015025$$

يمكننا أخذ المجال $I =]1.99, 2.01[$

f. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ $\quad a = 1$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x-1}}{(x-1)(\sqrt{x-1})} = \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x-1})} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

g. $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{x^2-9}$

$= \dfrac{x+3-2}{x^2-9} = \dfrac{x+1}{x^2-9}$

ندرس إشارة المقام:

$x^2 - 9 = 0 \qquad (x-3)(x+3) = 0$

$x = 3 \qquad x = -3$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		+	0	−	0	+	

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$

لا يوجد لـ f نهاية عند -3

f. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ $\quad a = 0$

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,\sin x}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}} = \sqrt{x} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = (0).(1) = 0$

Add. $f(x) = x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad a = \infty$

$f(x) = x . \dfrac{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$

$\frac{1}{x} \to 0$

مثال14: جد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1، ثم عين عددا α يحقق الشرط: إذا كان x عنصرا من المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ مختلفا عن 1، كان $f(x)>10^3$.

الحل:

$$f(x)>10^3$$
$$\frac{5x-1}{(x-1)^2}>10^3$$

لدينا $x\to1\Rightarrow 5x-1\to4\Rightarrow 5x-1>0.1$

أي $\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}>\dfrac{0.1}{(x-1)^2}$

لذلك نبحث عن x التي تجعل $\dfrac{0.1}{(x-1)^2}>10^3$

وبذلك يتحقق $\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}>10^3$

$\dfrac{0.1}{(x-1)^2}>10^3$ نضرب بـ 10 فنجد $\dfrac{1}{(x-1)^2}>10^4$

نجذر الطرفين $\dfrac{1}{|x-1|}>10^2$

ومنه $|x-1|<\dfrac{1}{10^2}$ أي $-\dfrac{1}{10^2}<x-1<\dfrac{1}{10^2}$

أي $1-\dfrac{1}{10^2}<x<1+\dfrac{1}{10^2}$

$x\in]1-\dfrac{1}{10^2},1+\dfrac{1}{10^2}[$ ومنه $\alpha=\dfrac{1}{10^2}$

[21] احسب نهاية f : $f(x)=\dfrac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$، ثم أعط عددا A يحقق: إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]4.9,5.1[$.

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$$

$$4.9<f(x)<5.1$$

$$4.9<\frac{5x-1}{x-1}<5.1$$

$$\begin{array}{r|l} x-1 & 5x-1 \\ \hline & 5 \\ & -5x\pm5 \\ \hline & 4 \end{array}$$

$$4.9<5+\frac{4}{x-1}<5.1$$

$$-0.1<\frac{4}{x-1}<0.1$$

$$\left|\frac{4}{x-1}\right|<0.1$$

$|4|=4$ $\quad|x-1|=x-1\quad$ $x-1=0\quad x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$$\frac{4}{x-1}<\frac{1}{10}$$

$\dfrac{x-1}{4}>10 \Rightarrow x-1>40 \Rightarrow x>41$

$x>A$

$\Rightarrow A=41$

[22] أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x+3}$ عند $-\infty$، ثم أوجد عددا A يحقق الشرط: إذا كان $x<A$، كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$.

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$$

$$-2.05<f(x)<-1.95$$

$$-2.05<\frac{-2x+1}{x+3}<-1.95$$

$$\begin{array}{r|l} x+3 & -2x+1 \\ \hline & -2 \\ & \pm2x\pm6 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$$-2.05<-2+\frac{7}{x+3}<-1.95$$

$$-0.05<\frac{7}{x+3}<0.05$$

$$\left|\frac{7}{x+3}\right|<0.05$$

$|7|=7$ $\quad|x+3|=-x-3$

$x+3=0$

$x=-3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$

$$\frac{7}{-x-3}<\frac{5}{100}$$

$$\frac{-x-3}{7}>20$$

$-x-3>140 \Rightarrow -x>143 \Rightarrow x<-143$

$x<A$

$\Rightarrow A=-143$

[23] f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ وفق $f(x)=\frac{3x-5}{2x+4}$. عين العدد A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ انتمى $f(x)$ إلى المجال المفتوح I الذي مركزه $\frac{3}{2}$ ونصف قطره 0.5.

الحل:

$f(x)=\frac{3x-5}{2x+4}$

$-\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}$

$f(x)\in]1,2[$

$1<f(x)<2$

$1<\frac{3x-5}{2x+4}<2$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{3}{2} \\ 2x+4 & 3x-5 \\ & -3x\mp 6 \\ & -11 \end{array}$$

$1<\frac{3}{2}+\frac{-11}{2x+4}<2$

$\frac{-1}{2}<\frac{-11}{2x+4}<\frac{1}{2}$

$\left|\frac{-11}{2x+4}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|2x+4|}{11}>2$

$|2x+4|>22$

عند $x>a$ ، $x\to+\infty$

$2x+4>22 \Rightarrow 2x>18 \Rightarrow x>9$

$\Rightarrow A=9$

[24] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

a) جد $\lim_{x\to+\infty} f\circ f(x)$.

b) أوجد مجالا I مركزه 1 يحقق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I، انتمى $f(x)$ إلى المجال $]0.4,0.6[$.

الحل:

.a

$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

$\lim f\circ f(x)$

$=\lim_{x\to\infty} f(f(x)) = \lim_{X\to 1} f(X)=\frac{1}{2}$

$f(x)\in]0,4,0,6[$

$0,4<f(x)<0,6$

$0,4<\frac{x}{x+1}<0,6$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x+1 & x \\ & x+1 \\ & -1 \end{array}$$

$\frac{4}{10}<1+\frac{-1}{x+1}<\frac{6}{10}$

$\frac{-6}{10}<\frac{-1}{x+1}<\frac{-4}{6} \Rightarrow \frac{6}{10}>\frac{1}{x+1}>\frac{4}{10}$

$\frac{10}{6}<x+1<\frac{10}{4} \Rightarrow \frac{5}{3}<x+1<\frac{5}{2}$

$\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}$

$x\in]\frac{2}{3},\frac{3}{2}[$

[25] أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$ عند 5،
ثم أوجد مجالاً I مركزه 5 يحقق الشرط إذا انتمى x إلى المجال I،
انتمى $f(x)$ إلى المجال $]3.95,4.05[$.

الحل:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \frac{8}{2} = 4$$

$$3,95 < f(x) < 4,05$$

$$3,95 < \frac{x+3}{x-3} < 4,05$$

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x-3 \\ x-3 & 1 \\ \hline 6 & \end{array}$$

$$3,95 < 1 + \frac{6}{x-3} < 4,05$$

$$2,95 < \frac{6}{x-3} < 3,05$$

$$\frac{295}{100} < \frac{6}{x-3} < \frac{305}{100}$$

$$\frac{100}{295} > \frac{x-3}{6} > \frac{100}{305} \Longrightarrow \frac{600}{295} > x-3 > \frac{600}{305}$$

$$\frac{600}{295}+3 > x > \frac{600}{305}+3$$

$$\frac{600+885}{295} > x > \frac{600+915}{305}$$

$$\frac{1485}{295} > x > \frac{1515}{305}$$

$$\Longrightarrow x \in \left]\frac{1515}{305} , \frac{1485}{295}\right[$$

[26] ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

ⓐ جد نهاية f عند 1.

ⓑ جد مجالاً مركزه 1 يحقق $f(x)>10^6$.

الحل:

a. $$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

b. $$f(x) > 10^6$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} > 10^6$$

$$(x-1)^2 < \frac{1}{10^6}$$

جذر الطرفين

عند الجذر نضع قيمة مطلقة

$$|x-1| < \frac{1}{10^3}$$

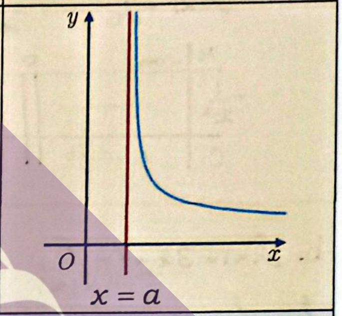
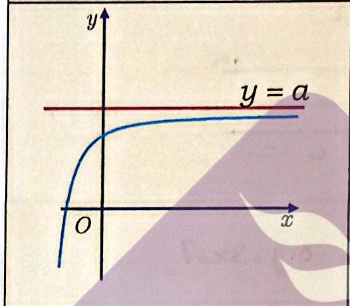
$$-\frac{1}{10^3} < x-1 < \frac{1}{10^3}$$

$$1-\frac{1}{10^3} < x < \frac{1}{10^3}+1$$

$$\frac{999}{1000} < x < \frac{1001}{1000}$$

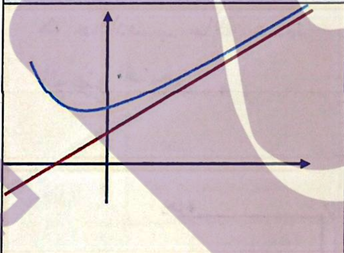
$$\Longrightarrow x \in \left]\frac{999}{1000} , \frac{1001}{1000}\right[$$

المقاربات

1. المقارب الشاقولي:	2. المقارب الأفقي:
إذا كان $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$ فإن $x=a$ مقارب شاقولي لـ C	إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$ فإن $y=a$ مقارب افقي لـ C في جوار $\pm\infty$
	

3. المقارب المائل:

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-y_{\Delta}\right]=0$ فإن $\Delta: y=ax+b$ مقارب مائل لـ C في جوار $\pm\infty$



4. الوضع النسبي مع المقارب:

مع $x=a$: $x\to a^{+}$ يكون C يقع على يمين المقارب

و $x\to a^{-}$ يكون C يقع على يسار المقارب

مع $y=a$ أو $\Delta: y=ax+b$ ندرس إشارة $f(x)-y_{\Delta}$

فإذا كان موجبا كان C فوق Δ وإذا كان سالبا كان C تحت Δ

♣ دراسة وجود المقاربات الشاقولية والأفقية تكون بإيجاد النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف.

[27] أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$، ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

الحل:

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ $\qquad a=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x)=\dfrac{3}{0^{+}}=+\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي و C يقع على يمين المقارب

$\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x)=\dfrac{3}{0^{-}}=-\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي و C يقع على يسار المقارب

$a=\mp\infty$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=2$

$y=2$ مقارب أفقي عند $\mp\infty$

الوضع النسبي مع $\Delta: y=2$

$f(x)-y_{\Delta}=\dfrac{2x+1}{x-1}-2=\dfrac{2x+1-2x+2}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\frac{3}{x-1}$	$-$	‖	$+$
C	تحت Δ	‖	فوق Δ

[28] أعد حل السؤال السابق للتابع $f(x)=\dfrac{3x}{1-x}$.

الحل:

$f(x)=\dfrac{3x}{1-x}$ $\qquad a=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x)=\dfrac{3}{0^{-}}=-\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي و C يقع على يمين المقارب

$\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x)=\dfrac{3}{0^{+}}=+\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي و C يقع على يسار المقارب

$a=\mp\infty$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=-3$

$y=2$ مقارب أفقي عند $\mp\infty$

الوضع النسبي مع $\Delta: y=-3$

$f(x)-y_{\Delta}=\dfrac{3x}{1-x}+3=\dfrac{3x+3-3x}{1-x}=\dfrac{3}{1-x}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\frac{3}{1-x}$	$+$	‖	$-$
C	فوق Δ	‖	تحت Δ

مثال15: ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$.

(1) أوجد معادلة المقارب الشاقولي أو الافقي لخطه البياني وبين وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقاربه.

(2) أثبت أن $\Delta: y=x+1$ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$.

(3) ادرس وضع C_f بالنسبة إلى Δ.

الحل: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}=-\infty$ لا يوجد مقارب.

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

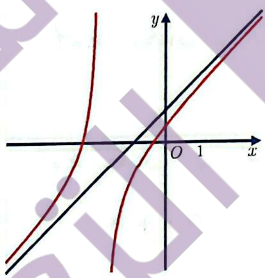
$x=-2$ مقارب شاقولي و C يقع على يمين المقارب.

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$

$x=-2$ مقارب شاقولي و C يقع على يسار المقارب.

(2) نجد الفرق

$$f(x)-y_\Delta=f(x)-(x+1)=\frac{x^2+3x+1-(x^2+3x+2)}{x+2}=\frac{-1}{x+2}$$



$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+2}=0$

Δ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$.

(3) $f(x)-(x+1)=\dfrac{-1}{x+2}$

أن الإشارة من اشارة $x+2$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$\frac{-1}{x+2}$	$+$	||	$-$
C	فوق Δ	||	تحت Δ

[29] فيما يأتي بين معللا إجابتك إذا كان المستقيم Δ مقاربا مائلا للخط البياني C_f للتابع f، عند $+\infty$ أو عند $-\infty$. ادرس بعدئذ الوضع النسبي للخط C_f و مقاربه Δ.

ⓐ $f(x)=-x+1-\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad \Delta: y=-x+1$

ⓑ $f(x)=3x+7-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$ $\qquad \Delta: y=3x+7$

ⓒ $f(x)=2x+3+\dfrac{10}{x+1}$ $\qquad \Delta: y=2x+3$

ⓓ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-3}{x-4}$ $\qquad \Delta: y=2x+1$

ⓔ $f(x)=\dfrac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}$ $\qquad \Delta: y=\dfrac{1}{2}x+1$

ⓕ $f(x)=x+\dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad \Delta: y=x$

الحل:

a. $f(x)=-x+1-\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad \Delta: y=-x+1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-1}{x^2}=0$

Δ مقارب مائل عند $\mp\infty$

الوضع النسبي :

$f(x)-y_\Delta=-\dfrac{1}{x^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\frac{1}{x^2}$	$-$	||	$-$
C	تحت Δ	||	تحت Δ

b. $f(x)=3x+7-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$ $\qquad \Delta: y=3x+7$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-5}{\sqrt{|x|}}=0$

Δ مقارب مائل عند $\mp\infty$

الوضع النسبي :

$f(x)-y_\Delta=-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\frac{5}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$-$	||	$-$
C	تحت Δ	||	تحت Δ

c. $f(x)=2x+3+\dfrac{10}{x+1}$ $\qquad \Delta: y=2x+3$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{10}{x+1}=0$

Δ مقارب مائل عند $\pm\infty$

الوضع النسبي :

$f(x)-y_\Delta=\dfrac{10}{x+1}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{10}{x+1}$	$-$	||	$+$
C	تحت Δ	||	فوق Δ

d. $f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$ $\qquad \Delta: y=2x+1$

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ x-4 & 2x^2-7x-3 \\ & -2x^2+8x \\ \hline & x-3 \\ & -x+4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$f(x)=2x+1+\frac{1}{x-4}$

$\Delta: y=2x+1$

$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=0$

$y=2x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$

الوضع النسبي:

$f(x)-y_\Delta=\frac{1}{x-4}$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$-$	||	$+$	
C		Δ تحت C	||	Δ فوق C	

e. $f(x)=\frac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}$ $\qquad \Delta: y=\frac{1}{2}x+1$

$f(x)-y_\Delta=\frac{x^2+\frac{5}{2}x+\sqrt{x}+1}{2x+1}-(\frac{1}{2}x+1)$

$=\frac{\cancel{x^2}+\cancel{\frac{5}{2}x}+\sqrt{x}+\cancel{1}-(\cancel{x^2}+\cancel{\frac{1}{2}x}+\cancel{2x}+\cancel{1})}{2x+1}=\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

$=\frac{x(\frac{\sqrt{x}}{x})}{x(2+\frac{1}{x})}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{2+\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=\frac{0}{2+0}=0$

$\Delta: y=\frac{1}{2}x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

$f(x)-y_\Delta=\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$

x	0		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	0	$+$	
C	$(0,1)$	Δ فوق C	

ملاحظة: عندما ينعدم الفرق توجد نقطة مشتركة

النقطة المشتركة: نقطة تقاطع الخط البياني مع المقارب

ولإيجادها نعوض قيمة x لها بالمقارب أو بالتابع

f. $f(x)=x+\frac{\sin x}{x}$ $\qquad \Delta: y=x$

$f(x)-y_\Delta=\frac{\sin x}{x}$

عند $+\infty$:

$-1\le \sin x\le 1$

نقسم على $0<x$

$\frac{-1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

حسب الإحاطة

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

عند $-\infty$:

$-1\le \sin x\le 1$

نقسم على $0>x$

$\frac{-1}{x}\ge\frac{\sin x}{x}\ge\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

حسب الإحاطة:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

ومنه $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$

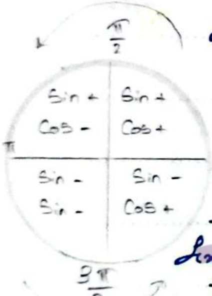
الوضع النسبي:

ندرس إشارة الفرق

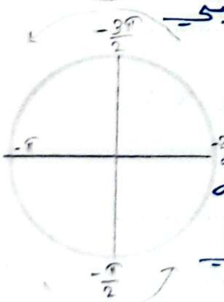
$f(x)-y_\Delta=\frac{\sin x}{x}$

ندرس على دور واحد $]0,2\pi]$

لأن $\sin$ تابع دوري



x	0		π		2π
$f(x)-y_\Delta$	||	$+$	0	$-$	0
الوضع النسبي	||	Δ فوق C	(π,π) نقطة مشتركة	Δ تحت C	$(2\pi,2\pi)$ نقطة مشتركة



لو كان الدور $[-2\pi,0[$

x	-2π		$-\pi$		0
$f(x)-y_\Delta$	0	$-$	0	$+$	||
الوضع النسبي	$(-2\pi,-2\pi)$	Δ تحت C	$(-\pi,-\pi)$	Δ فوق C	||

قلبنا + و - لأن x هنا سالب

ملاحظة: مجال الدائرة المثلثية من أقل قيمة لأكبر قيمة باتجاه الموجب للدوران.

$\sin x=0 \quad x=\pi k \qquad \cos x=0 \quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

[30] (دورة 1 – 2019) ليكن $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x^2}$

أثبت أن $\Delta : y = x + 3$ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$.

ثم ادرس وضع C_f بالنسبة إلى Δ.

الحل:

$f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{\infty} = 0$

$\Delta : y = x+3$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

ندرس اشارة الفرق

$f(x) - y_\Delta = \frac{-1}{x^2} < 0$

[31] (دورة 1 – 2022) ليكن $f(x) = x + 1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

أثبت أن $\Delta : y = x + 1$ مقارب للخط C_f في جوار $+\infty$.

الحل:

$f(x) - y_\Delta = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$\frac{-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

حسب الاحاطة

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

$\Delta : y = x+1$ مقارب مائل لـ C_f في جوار $+\infty$

[32] f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق: $f(x) = \frac{x^3 + \cos x + 2}{x^2}$

أثبت أنّ المستقيم $d : y = x$ مقاربٌ مائل للخط عند $+\infty$.

وادرس الوضع النسبي.

الحل:

$f(x) - y_d = \frac{\cos x + 2}{x^2}$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$1 \leq \cos x + 2 \leq 3$

$\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos x + 2}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$

حسب الاحاطة

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_d = 0$

$d : y = x$ مقارب مائل لـ C_f في جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

$f(x) - y_d = \frac{\cos x + 2}{x^2} > 0$

حيث $0 < x^2$ موجب ، $1 \leq \cos x + 2 \leq 3$ موجب

[33] (دورة 2 – 2021) f المعرف على $]-\infty, 0[$ وفق: $f(x) = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x}$ أثبت أنّ المستقيم $d : y = 2x$ مقاربٌ مائل للخط عند $-\infty$. وادرس الوضع النسبي.

الحل:

$f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2 + \cos^2 x}{x} - 2x = \frac{\cos^2 x}{x}$

$0 \leq \cos^2 x \leq 1$

$0 \geq \frac{\cos^2 x}{x} \geq \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to -\infty} 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

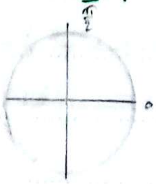
حسب الاحاطة

$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y_\Delta = 0$

$\Delta : y = 2x$ مقارب مائل لـ C_f في جوار $-\infty$

الوضع النسبي:

$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x}$



$\cos^2 x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

النقاط المشتركة:

$(\frac{\pi}{2} + \pi k , \pi + 2\pi k)$

$f(x) - y_\Delta = \frac{\cos^2 x}{x} \leq 0$

Δ فوق C

5. إيجاد المقارب المائل:

- إذا كان التابع يحوي حدين أحدهما من الدرجة الأولى والآخر نهايته صفر عند $\pm\infty$ نخمن أن مقدار الدرجة الأولى مقارب مائل عند $\pm\infty$ ونثبت ذلك بإثبات $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-y_\Delta]=0$.
- إذا كان التابع كسري نقسم قسمة اقليدية فنعود إلى الحالة السابقة.
- اذا كان $\sqrt{ax^2+bx+c}$ نتمم الحشوة الى مربع كامل ونحذف الحد الثابت فنحصل على المقارب المائل ونثبت ذلك.
- التعريف (الطريقة العامة) إذا تحقق الشرطان

$$\boxed{①\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty \quad ②\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*}$$

يوجد مقارب مائل عند $+\infty$ من الشكل $y=ax+b$ ونوجد b من العلاقة $\boxed{b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax}$ (وكذلك عند $-\infty$)

مثال16: ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$.

أوجد معادلة المقارب المائل للخط C_f في جوار $+\infty$.

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x+2}=+\infty$$

و $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x^2+2x}=1$$

يوجد مقارب مائل عند $+\infty$ من الشكل $y=ax+b$ ونوجد b

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{x+2}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1-(x^2+2x)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2}=1$$

المقارب هو $y=x+1$.

مثال17: ليكن التابع f المعطى بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$.

أوجد معادلة المقارب المائل للخط C_f في جوار $-\infty$.

الحل:

نلاحظ أن التابع كسري لذلك يمكن أن نقسم قسمة اقليدية.

$$f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+2}=x+1+\frac{-1}{x+2}$$

أن $\Delta: y=x+1$ مقارب في جوار $-\infty$. نثبت ذلك

$$f(x)-y_\Delta=f(x)-(x+1)$$

$$=\frac{x^2+3x+1-(x^2+3x+2)}{x+2}=\frac{-1}{x+2}$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+2}=0$.

ومنه Δ مقارب للخط البياني C_f في جوار $+\infty$.

[34] f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه D_f. بين، إن كان ثمة مستقيمات مقاربة مائلة للخط C.

ⓐ $f(x)=1-x+\dfrac{3x}{x^2+2}$ ⓑ $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+2}$

ⓒ $f(x)=\sqrt{x^2-4x+9}$ ⓓ $f(x)=\dfrac{x^2-3\sqrt{x}+1}{x-1}$

الحل:

a. $f(x)=1-x+\dfrac{3x}{x^2+2}$

نخمن ان $\Delta: y=1-x$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$ ولنثبت ذلك.

$$f(x)-y_\Delta=\frac{3x}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

ومنه $\Delta: y=1-x$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $\pm\infty$

b. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+2}$

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^2+2 \\ -(x^3+2x) & x \\ \hline -2x+1 & \end{array}$$

$$f(x)=x+\frac{-2x+1}{x^2+2}$$

نخمن ان $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C_f ولنثبت ذلك

$$f(x)-y_\Delta=\frac{-2x+1}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=0$$

$\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $\pm\infty$

c. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+9}$

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4-4+9} = \sqrt{(x-2)^2+5}$

نخمن ان $\Delta: y=\sqrt{(x-2)^2}$

$y=|x-2| \qquad x-2=0 \rightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

في جوار $+\infty$: $y=x-2$

لنثبت ان $\Delta: y=x-2$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x-2)^2+5}-(x-2)$

$=\dfrac{\left(\sqrt{(x-2)^2+5}-(x-2)\right)\left(\sqrt{(x-2)^2+5}+(x-2)\right)}{\sqrt{(x-2)^2+5}+(x-2)}=\dfrac{5}{\sqrt{(x-2)^2+5}+(x-2)}$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=\dfrac{5}{\infty+\infty}=\dfrac{5}{\infty}=0$

$\Delta: y=x-2$ مقارب مائل لـ C_f في جوار $+\infty$

في جوار $-\infty$ $\quad y=-x+2$

$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x-2)^2+5}-(-x+2)=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{(x-2)^2+5}-(-x+2)\right)\left(\sqrt{(x-2)^2+5}+(-x+2)\right)}{\sqrt{(x-2)^2+5}+(-x+2)}=\dfrac{5}{\sqrt{(x-2)^2+5}+(-x+2)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{5}{\infty}=0$

d. $f(x)=\dfrac{x^2-3\sqrt{x}+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim \dfrac{x\left(x-3\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\dfrac{x-\frac{3}{x}+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\dfrac{x^2-3\sqrt{x}+1}{x^2-x}=\lim\dfrac{x^2\left(1-\frac{3\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

$=\lim\dfrac{1-\frac{3}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1\in\mathbb{R}^*$

$a=1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=\lim\dfrac{x^2-3\sqrt{x}+1}{x-1}-x$

$=\lim\dfrac{x^2-3\sqrt{x}+1-x^2}{x-1}=\lim\dfrac{x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=1\in\mathbb{R}$

المقارب المائل عند $+\infty$ هو $y=ax+b$

$\rightarrow y=x+1$

[35] (دورة 1 − 2020) f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

ⓐ ادرس نهاية f عند $-\infty$. اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

ⓑ أثبت أن $\Delta: y=2x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

ⓒ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

الحل:

a. $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=0$

$y=0$ مقارب أفقي عند $-\infty$

b. $\Delta: y=2x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1}-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

$=\lim\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

Δ مقارب مائل عند $+\infty$

c. قاعدة: $\sqrt{x^2+\text{عدد موجب}}>x$

$f(x)-y_\Delta=\sqrt{x^2+1}-x>0$

C فوق Δ

[36] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

ⓐ أثبت أن $\Delta: y=x+1$ مقاربٌ للخط C في جوار $+\infty$.

ⓑ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C .

ⓒ أصحيحٌ أن $\Delta': y=x-1$ مقاربٌ للخط C في جوار $-\infty$ ؟

الحل:

a. $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ $\qquad \Delta: y=x+1$ عند $+\infty$

$$f(x)-y_{\Delta_1}=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-x-1$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{(x-\sqrt{x^2+9})(x+\sqrt{x^2+9})}{\sqrt{x^2+9}\,(x+\sqrt{x^2+9})}$$

$$=\frac{x^2-x^2-9}{\sqrt{x^2+9}\,(x+\sqrt{x^2+9})}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)-y_{\Delta_1}=0$$

Δ_1 مقارب مائل عند $+\infty$

b. $f(x)-y_{\Delta_1}=\frac{x-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}<0$

C تحت Δ

c. $\Delta: y=x-1$ عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y_{\Delta'}=\lim x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-x+1$$

$$=\lim\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+1=\lim\frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{9}{x^2})}}+1$$

$$=\lim\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1=\lim\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}+1=-1+1=0$$

[37] f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$.

ⓐ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))$.

ⓑ استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C للتابع f في جوار $+\infty$. ادرس الوضع النسبي.

ⓒ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. وأثبت وجود عدد a يحقق $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$

ⓓ استنتج وجود مقارب مائل Δ' للخط C للتابع f في جوار $-\infty$.

الحل:

عند وجود مجهول درجته نتمم له مربع كامل

$f(x)=\sqrt{x^2+2x+1-1+4}\Rightarrow f(x)=\sqrt{(x+1)^2+3}$

a. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1))=\lim\sqrt{(x+1)^2+3}-(x+1)$$

$$=\lim\frac{(\sqrt{(x+1)^2+3}-(x+1))(\sqrt{(x+1)^2+3}+(x+1))}{\sqrt{(x+1)^2+3}+(x+1)}$$

$$=\lim\frac{\cancel{(x+1)^2}+3-\cancel{(x+1)^2}}{\sqrt{(x+1)^2+3}+(x+1)}=0$$

b. $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل عند $+\infty$

$f(x)-y_{\Delta}=\sqrt{(x+1)^2+3}-(x+1)>0$

C فوق Δ

c. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{x}=\lim\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}}{x}$$

$$=\lim\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=\lim\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}}{x}=-1\in\mathbb{R}^*$$

$a=-1$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim\sqrt{x^2+2x+4}+x$

$=\lim\dfrac{(\sqrt{x^2+2x+4}+x)(\sqrt{x^2+2x+4}-x)}{\sqrt{x^2+2x+4}\quad x}=\lim\dfrac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}$

$=\lim\dfrac{x(2+\frac{4}{x})}{\sqrt{x^2(\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}-x}=\dfrac{x(2+\frac{4}{x})}{-x\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}=\dfrac{x(2+\frac{4}{x})}{x(-\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1)}$

$=\dfrac{2}{-2}=-1\in R\qquad b=-1$

المقارب المائل عند $-\infty$ هو $y=ax+b$

$y=-x-1$

[38] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$.

ⓐ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ⓑ اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية.

ⓒ استنتج وجود مقارب مائل للخط C للتابع f في جوار $+\infty$.

الحل:

a. $X=x^2+4x+5$

$\lim\limits_{x\to+\infty}X=+\infty\ \rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{\ }=+\infty$

b. x^2+4x+5 الصيغة القانونية اتمام لمربع كامل

$x^2+4x+4-4+5=(x+2)^2+1$

c. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}=\sqrt{(x+2)^2+1}$

نجد أن: $\Delta: y=\sqrt{(x+2)^2}$

$y=|x+2|$

في جوار $+\infty$: $y=x+2$ ، لنثبت ذلك:

$f(x)-y_\Delta=\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2)$

$=\dfrac{(\sqrt{(x+2)^2+1}-(x+2))(\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2))}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}=\dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+(x+2)}$

$\rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-y_\Delta=\dfrac{1}{\infty+\infty}=0$

$\Delta: y=x+2\ \leftarrow$

مقارب مائل للخط $\mathcal{G}$ في جوار $+\infty$

[39] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$.

ⓐ ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

ⓑ اكتب $4x^2-4x+3$ بالشكل القانوني.

ⓒ ادرس نهاية التابع h المعرف وفق $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$ عند $+\infty$. واستنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب إيجاد معادلتيهما. وادرس الوضع النسبي.

الحل:

a. $X=4x^2-4x+3$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}X=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

b. $4x^2-4x+3$

$=4(x^2-x)+3=4(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+3$

$=4((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})+3=4(x-\frac{1}{2})^2+2$

$=(2)^2(x-\frac{1}{2})^2+2=(2(x-\frac{1}{2}))^2+2$

$\Rightarrow\ =(2x-1)^2+2$

c. $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$

$=\sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2}$

$=\dfrac{(\sqrt{(2x-1)^2+2}-\sqrt{(2x-1)^2})(\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2})}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{(2x-1)^2+2}+\sqrt{(2x-1)^2}}$

$\rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\dfrac{2}{\infty+\infty}=0$

وجدنا أن :

$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \sqrt{(2x-1)^2} = 0$

ومنه نجد $\Delta : y = \sqrt{(2x-1)^2}$

$y = |2x-1|$

في جوار $+\infty$: $y = 2x-1$

في جوار $-\infty$: $y = -2x+1$

الوضع النسبي : ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y_\Delta = \sqrt{(2x-1)^2+2} - \sqrt{(2x-1)^2} > 0$

C فوق المقاربين

[40] f معرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2-1|}$.

1. ادرس نهاية f عند $+\infty$. وهل يوجد مقارب افقي.
2. جد $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)$ واستنتج أنَّ الخط C مقارب مائل.
3. ادرس الوضع النسبي للخط C .

الحل:

a. $x^2-1=0 \rightarrow (x-1)(x+1)=0 \rightarrow x=1 \quad x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

عند $+\infty$:

$f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2-1} = -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$

$= -\frac{1}{2}x + |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

$|x| = x$ لأن $x \to +\infty$

$= -\frac{1}{2}x + x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \rightarrow = x\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

$\rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\left(\frac{1}{2}\right) = +\infty$

لا يوجد مقارب أفقي في جوار $+\infty$

b. $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = ?$

عند $+\infty$:

$f(x) - \frac{1}{2}x$

$= -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}x = \sqrt{x^2-1} - x$

$= \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$

$\rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = 0$

وجدنا ان

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = 0$

ومنه $\Delta : y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

c. الوضع النسبي : ندرس إشارة الفرق

المقارب هو فقط عند $+\infty$ اما الوضع النسبي على مجال التعريف كاملا لذلك نأخذ التابع الموحد بالعلاقات

$f(x) - y_\Delta = \sqrt{|x^2-1|} - x$

$f(x) - y_\Delta = 0$

$\sqrt{|x^2-1|} - x = 0$

حل المعادلة الجذرية :
① نعزل الجذر في طرف
② نأخذ شرط الطرف الثاني موجب
③ نربع الطرفين ونوجد قيم x

$\sqrt{|x^2-1|} = x$

$|x^2-1| = x^2$

$x^2-1 = x^2$

$-1 = 0$ تناقض

$x^2-1 = -x^2$

$2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$

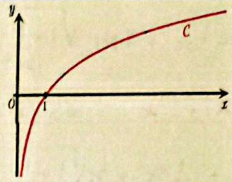
$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ مقبول $\quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ مرفوض

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C فوق Δ	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$	C تحت Δ	

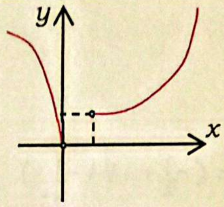
ملاحظة: $|x-a| = b$ اما $x-a=+b$ او $x-a=-b$

الاستمرار

1. الاستمرار بيانيا:



نلاحظ أن الخط البياني مستمر لأنه يتألف من قطعة وحدة



نلاحظ أن التابع غير مستمر لأن خطه البياني لا يتألف من قطعة واحدة.

ملاحظة: إذا كان العدد لا ينتمي لمجموعة التعريف فالتابع غير مستمر عند هذا العدد.

2. الاستمرار عند عدد:

يكون f مستمر عند a إذا كان $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$

أو $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = f(a)$

مثال18: ليكن f التابع المعرف وفق: $f(x) = \sqrt{x}$

هل f مستمرا عند 0 ؟

الحل: f مستمرا عند 0 لأن

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= \sqrt{0} = 0 \\ \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

مثال19: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & : \ x \neq 0 \\ 2 & : \ x = 0 \end{cases}$$

هل f مستمرا عند 0 ؟

الحل:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = 2 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2$$

أي f مستمرا عند 0.

[1] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{2x} & : \ x \neq 0 \\ 2 & : \ x = 0 \end{cases}$ هل f مستمرا عند 0 ؟

$f(0) = 2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2}\frac{\sin 3x}{3x}$$

$$= \frac{3}{2}(1) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$$

f غير مستمر عند 0

[41] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : \ x \neq 0 \\ m & : \ x = 0 \end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمرا على $\mathbb{R}$؟

الحل:

$f(0) = m$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\sqrt{x^2+1})}{x}$ $\frac{0}{0}$ ح.ع.ت

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - x^2 \cancel{-1}}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})} = 0$$

f مستمر على R فهو مستمر عند 0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$0 = m$$

[42] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \ x\neq 0 \\ 0 & : \ x=0 \end{cases}$$

ⓐ احسب نهاية f عند الصفر.

ⓑ هل f مستمر عند الصفر؟

الحل:

a. $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}$

$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$

$-x^2 \leq x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \leq x^2$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

f مستمر عند 0

[43] (دورة 2 – 2019) ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1} & : \ x\neq 0 \\ m & : \ x=0 \end{cases}$$

ⓐ احسب نهاية $x\mapsto \dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}$ عند الصفر.

ⓑ ما قيمة m التي تجعل f مستمرا على $\mathbb{R}$؟

الحل:

$x \longrightarrow \dfrac{x\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

$f(x) = \dfrac{x\sin x(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)} = \dfrac{x\sin x(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2+1-1}$

$= \dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+1)}{1}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (1)(2) = 2$

لأن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

b. حتى يكون f مستمر على R يجب ان يكون مستمر عند 0

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$2 = m$

3. مجال الاستمرار:

مجال الاستمرار هو نفس مجال التعريف الا في حالة أكثر من فرع نحذف نقطة الفصل وندرس استمرارها إذا كان مستمر نعيدها.

مثال20: عين مجال الاستمرار في كل مما يأتي:

(1) $f(x)=\sqrt{x-2}$

الحل: $D=[2,+\infty[$ أي f مستمرا على $[2,+\infty[$

(2) f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} & : \ x>1 \\ 0 & : \ x=1 \end{cases}$

الحل: f مستمر على $]1,+\infty[$ ندرس الاستمرار عند 1

$$\left.\begin{aligned} & f(1)=0 \\ & \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1}\sqrt{x-1} = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$$

أي f مستمرا عند 1 ومنه f مستمر على $[1,+\infty[$.

[44] عين مجال الاستمرار مع التعليل في كل مما يأتي:

ⓐ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ ⓑ $f(x)=f(x)=\cos x$

ⓒ $f(x)=\sqrt{x+1}$ ⓓ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$

a. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

$R\setminus\{1\}$ $\quad$ f مستمر في $R\setminus\{1\}$

b. $f(x)=\cos x$

$D_f = R$ $\quad$ f مستمر في R

c. $f(x)=\sqrt{x+1}$

$x\geq -1$ $\quad$ $D_f=[-1,+\infty[$ $\quad$ f مستمر في $[-1,+\infty[$

d. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$

$\dfrac{x+1}{x+2} \geq 0$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$\frac{x+1}{x+2}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

f مستمر في $]-\infty,-2[\cup[-1,+\infty[$

$f(x)=x|x|$

4. تعليل مجال الاستمرار:

♣ هنا نستعمل القاعدة: جميع التوابع التي نحصل عليها من عمليات جبرية أو عمليات تركيب على توابع (كثير الحدود أو كسري أو مرجعي)، هي توابع مستمرة على مجموعات تعريفها.

طريقة التعليل(مبرهنة):

♣ مجال استمرار التابع كثير الحدود والتابع الكسري والتابع المرجعي هو مجال التعريف.

♣ ان مجموع او طرح او ضرب او قسمة تابعين مستمرين هو تابع مستمر مجاله.

♣ في التابع المركب: نكتب لأنه مركب تابعين مستمرين حيث:

- حشوة التابع مستمر على مجال الدراسة.
- التابع المرجعي مستمر على مجاله.

مثال21: عين مجال الاستمرار في كل مما يأتي:

(1) $f(x)=x^3-2x+1$

الحل: $D=\mathbb{R}$ أي f مستمرا على $\mathbb{R}$ لأنه تابع كثير حدود.

(2) $f(x)=\sqrt{x}$

الحل: $D=[0,+\infty[$ أي f مستمرا على $[0,+\infty[$ لأنه تابع مرجعي.

(3) $f(x)=x^3+\sin x$ و $D=\mathbb{R}$

الحل: f مستمر على $\mathbb{R}$ لأنه مجموع تابعين مستمرين حيث:

$x\mapsto x^3$ مستمرا على $\mathbb{R}$ لأنه تابع مرجعي.

$x\mapsto \sin x$ مستمرا على $\mathbb{R}$ لأنه تابع مرجعي.

(4) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ لأنه مركب تابعين مستمرين حيث:

الحل: $D=\mathbb{R}^*$ أي f مستمرا على $\mathbb{R}^*$ لأن

$x\mapsto\frac{1}{x}$ مستمرا على $\mathbb{R}^*$ لأنه تابع مرجعي.

$x\mapsto \sin x$ مستمرا على $\mathbb{R}$ لأنه تابع مرجعي.

♣ يمكن الاعتماد على ان التابع اشتقاقي على مجال لنثبت أنه مستمر على هذا المجال لان كل تابع اشتقاقي هو مستمر والعكس غير صحيح بالضرورة.

[45] عين مجال الاستمرار مع التعليل في كل مما يأتي:

ⓐ $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ⓑ $f(x)=f(x)=x^3+\cos x$

ⓒ $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ⓓ $f(x)=\sin\frac{x+1}{x+2}$

a. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ $x^2-1\neq 0$ $x^2\neq 1$ $x\neq\pm 1$

$D=R\setminus\{\pm1\}$

f مستمر على $R\setminus\{\pm1\}$ لأنه تابع كسري

b. $f(x)=x^3+\cos x$

$D=R$ f مستمر على R لأنه مجموع تابعين مستمرين على R حيث

$x\mapsto x^3$ مستمر على R لأنه كثير حدود $x\mapsto\cos x$ مستمر على R لأنه مرجعي

c. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

$D=R$ f مستمر على R لأنه مركب تابعين مستمرين حيث

$x\mapsto x^2+1$ مستمر على R لأنه كثير حدود $x\mapsto\sqrt{x}$ مستمر على $[0,+\infty[$ لأنه تابع مرجعي

d. $f(x)=\sin\frac{x+1}{x+2}$

$D=R\setminus\{-2\}$ و f مستمر على $R\setminus\{-2\}$ لأنه مركب تابعين مستمرين حيث:

$x\mapsto\frac{x+1}{x+2}$ مستمر على $R\setminus\{-2\}$ لأنه تابع كسري $x\mapsto\sin x$ مستمر على R لأنه تابع مرجعي

5. تابع الجزء الصحيح:

♣ هو تابع يستبدل العدد الحقيقي بعدد صحيح يقع تحته (على يساره) $x\mapsto E(x)=n$ حيث n يحقق $n\le x<n+1$.

♣ **حسابه:** نستبدله باليسار الصحيح:

مثال22: $E(3.7)=3$ و $E(\pi)=3$ و $E(-3.7)=-4$ و $E(-3)=-3$. $E(0)=0$

♣ **نهايته في حالة وجود** $E(\pm\infty)$: نستعمل مبرهنة الإحاطة وفق

$$\boxed{x-1<E(x)\le x}$$

مثال23: جد نهاية التابع $f:x\mapsto\frac{E(x)-1}{x}$ عند $+\infty$.

الحل:

لدينا $x-1<E(x)\le x$

نطرح 1: $x-2<E(x)-1\le x-1$

نقسم على $x>0$: $\frac{x-2}{x}<\frac{E(x)-1}{x}\le\frac{x-1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)=1$ وحسب الإحاطة نجد

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$.

[2] ادرس نهاية التابع $f:x\mapsto\frac{1-E(x)}{x^2+1}$ عند $-\infty$.

الحل:

$x-1\le E(x)\le x$

$-x+1>-E(x)\ge -x$

$-x+2>1-E(x)\ge -x+1$

$\frac{-x+2}{x^2+1}>\frac{1-E(x)}{x^2+1}\ge\frac{-x+1}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x}=0 \rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

[3] ادرس نهاية التابع $f: x\mapsto \frac{E(x)}{x}$ عند $+\infty$.

الحل:

$$x-1 < E(x) \le x$$

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \le \frac{x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

♣ **نهايته عند عدد صحيح:** نوجد نهاية اليمين واليسار والصورة.

[4] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x-E(x)$.

احسب نهاية f عند 1.

الحل:

$$f(x)=2x-E(x)$$

$$f(1)=2-E(1)=2-1=1$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=2-E(1^+)=2-1=1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=2-E(1^-)=2-0=2$$

لايوجد نهاية عند 1

♣ **كتابة $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$:** نجزئ مجال التعريف إلى مجالات صحيحة.

♣ **رسمه:** نرسم كل فرع على حدى بتصوير طرفيه.

[5] ليكن f التابع المعرف على $[0,3[$ وفق $f(x)=1+E(x)$.

ⓐ اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$.

ⓑ ارسم الخط للتابع f على $[0,3[$. هل f مستمر.

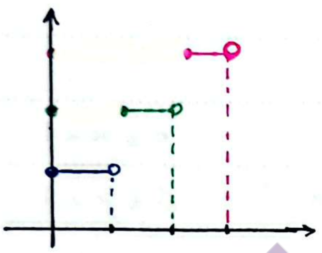
الحل:

a.

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 3 & 2\le x\le 3\end{cases}$$

b. الرسم:

$0\le x<1$		$1\le x<2$		$2\le x<3$	
x	0, 1	x	1, 2	x	2, 3
y	1, 1	y	2, 2	y	3, 3



f غير مستمر على $[0,3[$

[6] ليكن f التابع المعرف على $[0,2]$ وفق $f(x)=x-E(x)$.

ⓐ ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$.

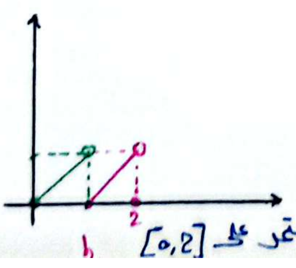
ⓑ هل f مستمر على المجال $[0,2]$؟

الحل:

a.

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ x-1 & 1\le x<2\\ 0 & x=2\end{cases}$$

$0\le x<1$		$1\le x<2$		$x=2$
x	0, 1	x	1, 2	(2,0)
y	0, 1	y	0, 1	



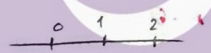
b. f غير مستمر على $[0,2]$

[7] f المعرف على $[0,2]$ وفق $f(x)=E(x)+(x-E(x))^2$.

ⓐ اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$).

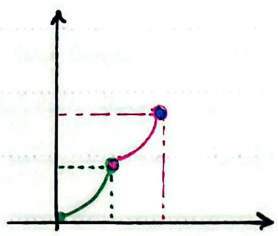
ⓑ أثبت أن f مستمر على المجال $[0,2]$؟

الحل:



$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 1+(x-1)^2 & 1\le x<2 \\ 2 & x=2 \end{cases}$$

$0\le x<1$	$1\le x<2$	$x=2$
x: 0, 1 ; y: 0, 1	x: 1, 2 ; y: 1, 2	$(2,2)$



f مستمر في $[0,2]$

تمارين عامة محلولة

[46] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$.

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$. واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$.

واستنتج أن الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1 و Δ_2.

③ ادرس الوضع النسبي للخط C وكل من المقاربين Δ_1 و Δ_2.

الحل: ① عند $+\infty$ لدينا $4x^2-1>0$ ومن ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

لدينا أيضا عند $-\infty$ و $\sqrt{x^2}=-x$ من ثم

$f(x)=x\left(1-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

② لدينا $f(x)-3x=\sqrt{4x^2-1}-2x=\dfrac{-1}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$ ومنه

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$

فالمستقيم $\Delta_1: y=3x$ مقارب للخط C للتابع f في جوار $+\infty$.

لدينا $f(x)+x=\sqrt{4x^2-1}+2x=\dfrac{-1}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$ ومنه

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$

فالمستقيم $\Delta_2: y=-x$ مقارب للخط C للتابع f في جوار $-\infty$.

③ $f(x)-y_{\Delta_1}=f(x)-3x=\sqrt{|4x^2-1|}-2x$.

في حالة $x<0$ يكون C فوق Δ وفي حالة $x>0$ نجعل

$f(x)-3x=0$ أي $\sqrt{|4x^2-1|}=2x$

أي $|4x^2-1|=4x^2$ أي $8x^2=1$ أي $x=\frac{1}{2\sqrt2}$

x	$-\infty$ 0 $\frac{1}{2\sqrt2}$	$+\infty$
$f(x)-y_{\Delta_1}$	$+$ 0	$-$
C	فوق Δ_1	تحت Δ_1

• $f(x)-y_{\Delta_2}=f(x)+x=\sqrt{|4x^2-1|}+2x$. في حالة $x>0$ يكون C فوق Δ وفي حالة $x<0$ نجعل

$f(x)+x=0$ وهذا يكافئ $\sqrt{|4x^2-1|}=-2x$

أي $|4x^2-1|=4x^2$ أي $8x^2=1$. وهذا ينعدم عند $x=-\frac{1}{2\sqrt2}$:

x	$-\infty$ $\frac{-1}{2\sqrt2}$	0 $+\infty$
$f(x)-y_{\Delta_2}$	$-$ 0	$+$
C	تحت Δ_2	فوق Δ_2

[47] ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$.

① أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt2 x\right)=\frac{\sqrt2}{4}$.

② استنتج قيمة $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\sqrt2 x+\frac{\sqrt2}{4})\right)$.

الحل: بالإتمام إلى مربع كامل

$$f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}=\sqrt{2(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2})}$$

$$=\sqrt{2(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{2})}=\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}-\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}-\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}+\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)}{\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}+\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}-2(x+\frac{1}{4})^2}{\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}+\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{8}{16}}{\left(\sqrt{2(x+\frac{1}{4})^2+\frac{8}{16}}+\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})\right)}=0$$

أي $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)=0$

Δ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

بالمثل نجد أن المستقيم $y=-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}$ مقارب في جوار $-\infty$.

[48] من المعلوم أن كثير حدود P من الدرجة n يكتب بالصيغة $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ حيث $a_n\neq 0$.

أثبت أنه إذا كان n عددا فرديا، قبل P جذرا حقيقيا على الأقل.

الحل: لنفترض $a_n>0$. ومنه

$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n=-\infty$ فيوجد عدد a يحقق $p(a)<0$.

و $\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}a_nx^n=+\infty$ فيوجد b أكبر تماما من a يحقق $P(b)>0$.

ولدينا P مستمرا على $[a,b]$ ويحقق $P(a)P(b)<0$ فللمعادلة $P(x)=0$ حل وحيد c على الأقل ينتمي إلى المجال $[a,b]$.

لنفترض $a_n<0$. ومنه $\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}a_nx^n=-\infty$ فيوجد عدد حقيقي a يحقق $p(a)<0$.

و $\lim_{x\to-\infty}P(x)=\lim_{x\to-\infty}a_nx^n=+\infty$ فيوجد b أكبر تماما من a يحقق $P(b)>0$.

ولدينا P مستمرا على $[a,b]$ ويحقق $P(a)P(b)<0$ فللمعادلة $P(x)=0$ حل وحيد c على الأقل ينتمي إلى المجال $[a,b]$.

[49] ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$.

① عين D_f مجموعة تعريف f. ثم أوجد a و b و c التي تحقق $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$.

② ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f.

الحل: ① لدينا $\Delta_f=\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$ و $f(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$ وبالقسمة الاقليدية نجد $f(x)=3+\frac{9x+6}{x^2-x-2}$

بالمقارنة مع $f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ نجد $a=3$.

و $\frac{9x+6}{(x+1)(x-2)}=\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$ نضرب بـ $(x+1)(x-2)$

$9x+6=b(x-2)+c(x+1)$

بافتراض $x=2$ نجد $24=3c$ أي $8=c$

بافتراض $x=-1$ نجد $-3=-3b$ أي $b=1$

②

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=3$

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$

[50] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

① أثبت أن f متزايد تماما على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$. ثم نظم جدولا بتغيرات f على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$.

② أثبت أن للمعادلة $f(x)=10$ حلا وحيدا في المجال $]-\frac{3}{2},-1[$.

الحل: ① $f'(x)=\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ ومنه $f'(x)>0$ على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$ فالتابع f متزايد تماما.

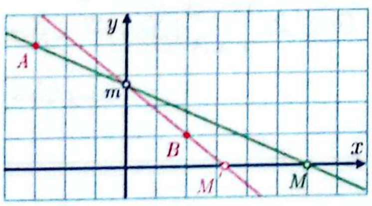
$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}f(x)=\frac{27}{4}$ و $\lim_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$

x	$-\frac{3}{2}$		-1
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

② التابع f مستمر ومتزايد تماما على $]-\frac{3}{2},-1[$. $10\in f\left(]-\frac{3}{2},-1[\right)=]\frac{27}{4},+\infty[$. ومنه أن للمعادلة $f(x)=10$ حلا وحيدا في المجال $]-\frac{3}{2},-1[$.

[51] النقطتان الثابتتان $A(-3,4)$ و $B(2,1)$ والنقطة المتحولة $M(x,0)$. نقرن بالنقطة M النقطة M' التي نعرفها كما يلي:

- يقطع المستقيم (AM) المحور $(O;\vec{j})$ في m.



■ يقطع المستقيم (Bm) المحور $(O;\vec{i})$ في M'.

نرمز إلى فاصلة M' بالرمز $f(x)$.

① بدون حساب، خمن نهاية f عند $+\infty$.

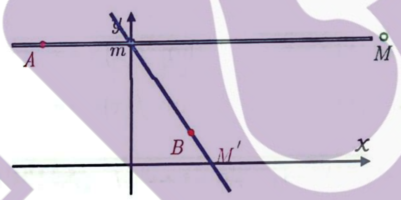
② أثبت أن $f(x)=\frac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$.

③ ادرس نهاية f عند $-\infty$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟ وادرس نهاية f عند $x=1$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

④ عندما $x=-3$، يكون المستقيم (AM) موازيا $(O,\vec{j})$ وتكون m « في اللانهاية ». يمكن أن نقول في هذه الحالة أن (Bm) يوازي $(O,\vec{j})$ وأن M' تقع في $(2,0)$. نعرف عندئذ التابع g وفق $g(x)=f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، و $g(-3)=2$.

لماذا يكون g مستمرا عند -3؟

الحل: لدينا الرسم المجاور

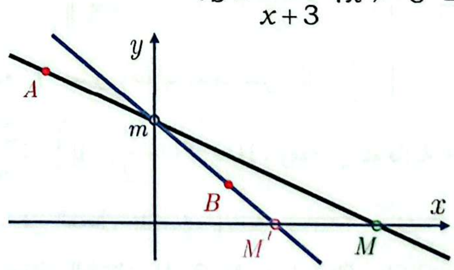


① $M(x,0)$ و $A(-3,4)$ فيكون ميل المستقيم (AM) هو $\frac{4}{x+3}$

وعندما تسعى x إلى $+\infty$ يصبح ميل المستقيم (AM) صفر أي موازي لمحور الفواصل وتكون احداثيتا m هي $m(0,4)$ والمستقيم (mB) الذي معادلته $y=-\frac{3}{2}x+4$ يقطع محور الفواصل في النقطة $M'(\frac{8}{3},0)$. ومنه نخمن أن $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{8}{3}$،

② بافتراض $m(0,b)$ ولدينا الشعاعان $\overrightarrow{Am}(3,b-4)$ و $\overrightarrow{AM}(x+3,-4)$ مرتبطان خطيا ومنه $\frac{b-4}{-4}=\frac{3}{x+3}$

نحسب b نجد $x\neq -3$: $b=\frac{4x}{x+3}$.



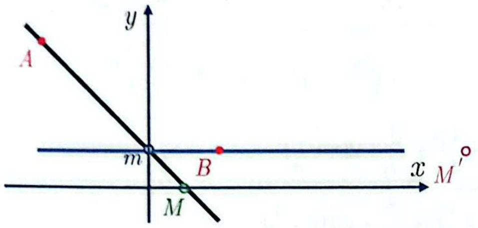
أي $m(0,\frac{4x}{x+3})$ ولدينا $M'(f(x),0)$ و $B(2,1)$

ويكون الشعاعان $\overrightarrow{Bm}(-2,\frac{3x-3}{x+3})$ و $\overrightarrow{BM'}(f(x)-2,-1)$ مرتبطان خطيا ومنه

$\frac{f(x)-2}{-2}=\frac{\frac{3x-3}{x+3}}{-1}$ ومنه $f(x)=\frac{8x}{3x-3}: x\neq 1, x\neq -3$

وهنا يكون $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{8}{3}$

③ a $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{8}{3}$ أي عندما x تسعى إلى $-\infty$ يصبح (AM) موازيا لمحور الفواصل وتكون النقطة $M'(\frac{8}{3},0)$.

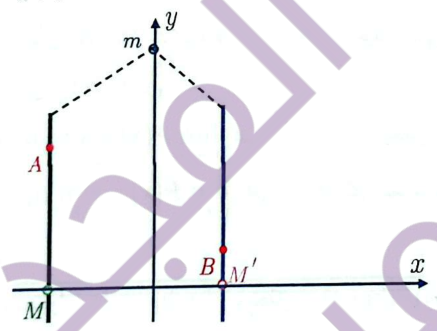


b $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$. عندما تسعى x إلى 1 يصبح المستقيم (mB) وكأنه قاطع لمحور الفواصل في اللانهاية الموجبة أو السالبة. أي يصبح (mB) موازيا لمحور الفواصل ولا يتقاطع معه فلا تتشكل النقطة M'

④ لدينا التابع g وفق $g(x)=f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، و $g(-3)=2$.

$$g(x)=\begin{cases} f(x)=\frac{8x}{3(x-1)} & x\neq -3, x\neq 1 \\ 2 & x=-3 \end{cases}$$

وهو مستمر عند -3 لان $\lim_{x\to-3} g(x)=2=g(-3)=2$.



الاشتقاق

1. قواعد الاشتقاق:

$(ax)'=a$	$(a)'=0$
$(h\pm g)'=h'\pm g'$	$(x^n)'=nx^{n-1}$
$(h\times g)'=h'\times g+h\times g'$	$(a.h)'=a.h'$
$\left(\frac{h}{g}\right)'=\frac{h'.g-h.g'}{g^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

مثال1: جد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x)=x^3-2x+1$ بالاشتقاق نجد $f'(x)=3x^2-2$

(2) $f(x)=\frac{2x-1}{6x+3}$ ومنه $f'(x)=\frac{2\times3-6\times(-1)}{(6x-3)^2}=\frac{12}{(6x-3)^2}$

[1] احسب $f'(x)$ لكل مما يأتي:

ⓐ $f(x)=-2x$ ⓑ $f(x)=x^4$ ⓒ $f(x)=x^3-x^2+7$

ⓓ $f(x)=5x^6$ ⓔ $f(x)=x^3(-x^2+7)$ ⓕ $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$

الحل:

a. $f(x)=-2x$ $f'(x)=-2$

b. $f(x)=x^4$ $f'(x)=4x^3$

c. $f(x)=x^3-x^2+7$ $f'(x)=3x^2-2x$

d. $f(x)=5x^6$ $f'(x)=30x^5$

e. $f(x)=x^3(-x^2+7)$ $f(x)=-x^5+7x^3$

$f'(x)=-5x^4+21x^2$

f. $f(x)=\frac{x-1}{x^2-4}$ $f'(x)=\frac{1(x^2-4)-2x(x-1)}{(x^2-4)^2}$

$=\frac{x^2-4-2x^2+2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$

2. قواعد اشتقاق التوابع (مسكة مكنسة)

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[(x)^n]'=nx^{n-1}$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(e^x)'=e^x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\sin x)'=\cos x$
$(\cot x)'=-(1+\cot^2 x)$	$(\tan x)'=(1+\tan^2 x)$

♣ عند اشتقاق إذا كانت الحشوة غير x نضرب بمشتق الحشوة.

مثال2: جد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x)=\sin x+\sin 5x$ ومنه $f'(x)=\cos x+5\cos 5x$

(2) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x^3+2}$ بالاشتقاق نجد

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3+2}}3x^2$$

[2] احسب $f'(x)$ لكل مما يأتي:

ⓐ $f(x)=\cos x+\cos 2x$ ⓑ $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x^3+2}$

ⓓ $f(x)=\sin x+\sin(x^2)$ ⓔ $f(x)=x^3+(x^5+6)^3$

الحل:

a. $f(x)=\cos x+\cos 2x$

$f'(x)=-\sin x-2\sin 2x$

b. $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x^3+2}$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}$

d. $f(x)=\sin x+\sin(x^2)$

$f'(x)=\cos x+2x\cos(x^2)$

e. $f(x)=x^3+(x^5+6)^3$

$f'(x)=3x^2+3(x^5+6)^2(5x^4)$

$=3x^2+15x^4(x^5+6)^2$

[3] ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

احسب $f'(x)$. ثم استنتج مشتق كل من التوابع الآتية:

ⓐ $g: x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ ⓑ $h: x \mapsto \dfrac{x^4+1}{x^2-1}$

ⓒ $\ell: x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ ⓓ $k: x \mapsto \dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

الحل:

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

$f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

a. $g(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$

$g(x)=f(\sqrt{x})$

$g'(x)=f'(\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(x)=\dfrac{x-2\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b. $h(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2-1}$

$h(x)=f(x^2)$

$h'(x)=f'(x^2)(2x)$

$h'(x)=\dfrac{x^4-2x^2-1}{(x^2-1)^2}(2x)$

c. $\ell(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$

$\ell(x)=\sqrt{f(x)}$

$\ell'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}}\cdot\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

d. $k(x)=\dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

$k(x)=f(\sin x)$

$k'(x)=f'(\sin x)(\cos x)$

$=\dfrac{\sin^2 x-2\sin x-1}{(\sin x-1)^2}(\cos x)$

[4] أوجد المشتق $f'(x)$ للتابع f.

ⓐ $f(x)=\sin^3 5x$ ⓑ $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 2x}$

الحل:

a. $f(x)=\sin^3 5x$

$f(x)=(\sin 5x)^3$

$f'(x)=3(\sin 5x)^2(5\cos 5x)$

$f'(x)=15(\cos 5x)(\sin 5x)^2$

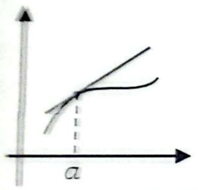
b. $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 2x}$

$f(x)=\dfrac{1}{(\cos 2x)^3}$

$f'(x)=\dfrac{0-3(\cos 2x)^2(-2\sin 2x)}{((\cos 2x)^3)^2}$

$=\dfrac{+6\sin 2x(\cos 2x)^2}{(\cos 2x)^6}=\dfrac{6\sin 2x}{(\cos 2x)^4}$

3. معادلة المماس:



ليكن T المماس للمنحني C في النقطة $A(a,f(a))$ عندئذ المعادلة:

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

معادلة للمماس T في النقطة $A(a,f(a))$.

مثال3: اكتب معادلة للمماس للخط C_f حيث $f(x)=\sqrt{x}+2$ في النقطة التي فاصلتها 1.

الحل: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ومنه $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$ و $f(1)=3$

المعادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

أي $y=\dfrac{1}{2}(x-1)+3$ ومنه $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

[5] C_f هو الخط البياني لتابع f. اكتب معادلة لمماس C_f في A من C_f التي فاصلتها 4.

ⓐ $f(x)=x^2$ ⓑ $f(x)=\sqrt{2x+1}$

الحل:

a. $f(x)=x^2$

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=f'(4)(x-4)+f(4)$

$f(4)=(4)^2=16$

$f'(x)=2x \Rightarrow f'(4)=8$

$y=8(x-4)+16$

$y=8x-32+16$

$y=8x-16$

b. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$y = f'(4)(x-4) + f(4)$

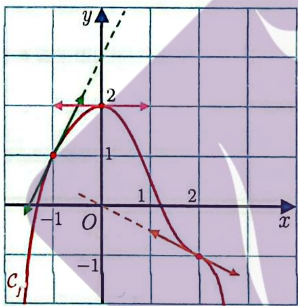
$f(4) = \sqrt{8+1} = 3 \qquad f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$f'(4) = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{3}(x-4) + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} + \frac{9}{3}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

[6] في الشكل المرافق، C_f هو الخط البياني لتابع f.



ⓐ عين $f(0)$ و $f(2)$ و $f(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(2)$ و $f'(-1)$.

ⓑ اكتب معادلة لمماس في C_f النقطة التي فاصلتها 2.

ⓒ جد تقريبا تآلفي للمقدار $f(2+h)$ ثم $f(2.1)$

ⓓ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟ أعط عددين صحيحين متتاليين يحصران كلا من حلول المعادلة $f(x)=0$.

♣ يمكن استعمال معادلة المماس $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ لإيجاد تقريب تآلفي لـ $f(a+h)$ حيث $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$ أو $f(a+h) \approx f'(a)(h) + f(a)$.

الحل:

a. $f(0) = 2 \qquad f(2) = -1 \qquad f(-1) = 1$

$f'(0) = 0$ لأن المماس افقي

$f'(2) = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2} \quad (0,0)\,(2,-1)$

$f'(-1) = \frac{3-1}{0+1} = \frac{2}{1} = 2 \quad (-1,1)\,(0,3)$

b. $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$y = -\frac{1}{2}(x-2) - 1$

$= -\frac{1}{2}x + 1 - 1$

$T: y = -\frac{1}{2}x$

C. $f(2,1) \simeq y(2,1)$

$\simeq -\frac{1}{2}(2,1) \simeq \frac{-2,1}{2} \simeq \frac{-21}{20}$

$f(2+h) \simeq y(2+h) \simeq -\frac{1}{2}(2+h)$

d. للمعادلة $f(x)=0$ حلان

احدهما بين $]1,2[$ والآخر بين $]-1,-2[$

[1] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$.

ⓐ اكتب معادلة لمماس $\mathbb{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتها 1.

ⓑ هل يقبل $\mathbb{C}$ مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=-4x$؟

ⓒ هل يقبل $\mathbb{C}$ مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$؟

ⓓ هل يقبل $\mathbb{C}$ مماسا يمر من مبدأ الاحداثيات؟

الحل:

$f(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$

a. $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(x) = \frac{-2(x+1) - 1(-2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-2x-2+2x-1}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$

$f'(1) = \frac{-3}{4}$

$f(1) = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{3}{4}(x-1) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

$= -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

b. ملاحظة:

المستقيمات المتوازيان لهما نفس الميل

المستقيمان المتعامدان جداء ميليهما يساوي -1

$y = -4x$

حتى يكون المماس يوازي المستقيم يجب ان يكون لهما الميل ذاته

$f'(x)$ ميل المماس

-4 ميل المستقيم

$f'(x) = -4$

$\frac{-3}{(x+1)^2} = -4 \qquad (x+1)^2 = \frac{3}{4}$

اما $x+1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

او $x+1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

G يقبل مماسين موازيين للمستقيم $y=-4x$

مماس يوازي مستقيم
الميل = $f'(x)$
حل المعادلة

c. $3x-2y=0$

$-2y=-3x \to y=\frac{3}{2}x$

حتى يكون مماس يوازي المستقيم $3x-2y=0$
يجب ان تكون لهما نفس الميل

$f'(x)=\frac{3}{2}$

$\frac{-3}{(x+1)^2}=\frac{3}{2}$

$(x+1)^2=-\frac{6}{3}=-2$

مستحيلة الحل

لا يقبل C مماساً يوازي المستقيم $3x-2y=0$

d. قاعدة: نكتب معادلة المماس عند a ثم نعوض المبدأ فيها

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=\frac{-3}{(a+1)^2}(x-a)+\frac{-2a+1}{a+1}$

$(0,0)\in$ المماس

$0=\frac{+3a}{(a+1)^2}+\frac{-2a+1}{a+1}$

$0=\frac{3a+(-2a+1)(a+1)}{(a+1)^2}$

ينعدم الكسر عندما ينعدم البسط أو (طرفين بوسطين)

$0=3a-2a^2-2a+a+1$

$0=-2a^2+2a+1$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4(-2)(1)=4+8=12>0$

للمعادلة حلين

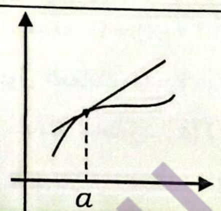
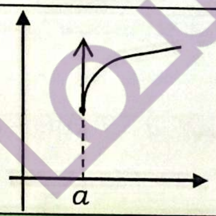
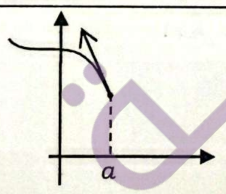
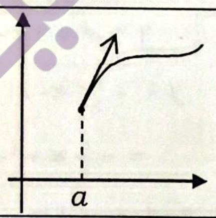
إذاً C يقبل مماسين مارين من المبدأ

4. تعريف العدد المشتق:

♣ نقول إن ℓ هو العدد المشتق للتابع f عند a إذا وفقط إذا كانت النهاية $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ حقيقية ℓ

♣ إذا كانت ناتج النهاية:

- عدد غير الصفر: f اشتقاقي عند a والمماس مائل عند a.
- 0: f اشتقاقي عند a والمماس افقي عند a.
- $+\infty$ أو $-\infty$: f غير اشتقاقي عند a والمماس شاقولي.
- من اليمين عدد: f اشتقاقي من اليمين عند a ويوجد نصف مماس من اليمين.
- من اليسار عدد: f اشتقاقي من اليسار عند a ويوجد نصف مماس من اليسار.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	$=\ell$ $x\to a$	$=-\infty$ $=+\infty$
الاشتقاقية	f اشتقاقي عند a.	f غير اشتقاقي عند a
المماس	مماس مائل عند a	مماس شاقولي عند a
ميل المماس	$f'(a)=\ell$	لا يوجد ميل
معادلة المماس	$y=f'(a)(x-a)+f(a)$	$x=a$
الرسم		
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	$=\ell$ $x\to a^-$	$=\ell$ $x\to a^+$
الاشتقاقية	f اشتقاقي من اليسار عند a	f اشتقاقي من اليمين عند a
المماس	نصف مماس من اليسار	نصف مماس من اليمين
ميل المماس	$f'(a^-)=\ell$	$f'(a^+)=\ell$
معادلة المماس	$y=f'(a^-)(x-a)+f(a)$	$y=f'(a^+)(x-a)+f(a)$
الرسم		

مثال4: ليكن f المعرف وفق: $f(x)=\sqrt{x}$ هل f اشتقاقي عند 0 ؟

الحل: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

أي f غير اشتقاقي عند 0

مثال5: ليكن f المعرف وفق: $f(x)=x\sqrt{x}$ هل f اشتقاقي عند 0

الحل: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$

أي f اشتقاقي عند 0.

[7] ادرس قابلية التابع f للاشتقاق عند الصفر. ما وضع المماس.

ⓐ $f(x)=x^2\sqrt{x}$ ⓑ $f(x)=\sqrt{x}$

ⓒ $f(x)=x|x|$ ⓓ $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$

الحل:

a. $f(x)=x^2\sqrt{x}$ $a=0$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{x}=0$

أي $f'(0)=0$

f اشتقاقي عند 0 ويوجد مماس أفقي

$y=f(0)=0$

b. $f(x)=\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

f غير اشتقاقي عند 0 والمماس شاقولي

$x=0$

c. $f(x)=x|x|$ $x=0$

x		0	
x	$-$	0	$+$

$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq0\\ -x^2 & x\leq0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$

f اشتقاقي عند 0 من اليمين

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-x=0$

f اشتقاقي عند 0 من اليسار

ومنه f اشتقاقي عند 0

d. $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2+|x|}{x^2+1}}{x}=\lim\dfrac{x^2+|x|}{x(x^2+1)}$

في حالة $x>0$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+x}{x(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x+1)}{x(x^2+1)}=1$

f اشتقاقي عند 0 من اليمين $f'(0^+)=1$

في حالة $x<0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-x}{x(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x-1)}{x(x^2+1)}=-1$

f اشتقاقي عند 0 من اليسار $f'(0^-)=-1$

$f'(0^-)\neq f'(0^+)$

f غير اشتقاقي عند 0، نصفي مماس عند 0

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

l

- 0: اشتقاقي، المماس أفقي
- عدد $\neq 0$: اشتقاقي، المماس مائل
- $\pm\infty$: غير اشتقاقي، المماس شاقولي
- يسار $\neq$ يمين: غير اشتقاقي، نصفي مماس

$f'(a^+)\neq f'(a^-)$

[8] التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(0)=0$ و $f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ في حالة $x\neq 0$.

ⓐ هل f اشتقاقي عند الصفر؟ علل إجابتك.

ⓑ احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الحل:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}$

$-1\leq\cos\frac{1}{x}\leq 1$

نضرب بـ $x>0$

$-x\leq x\cos\frac{1}{x}\leq x$

$\lim\limits_{x\to 0^+}-x=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}x\cos\frac{1}{x}=0$

نضرب بـ $x<0$

$-x\geq x\cos\frac{1}{x}\geq x$

$\lim\limits_{x\to 0^-}-x=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0\rightarrow\lim\limits_{x\to 0^-}x\cos\frac{1}{x}=0$

f اشتقاقي عند 0 والمماس أفقي

b. $f'(x)=2x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)x^2$

$=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$

[9] التابع f معرف على المجال $]0,1[$ وفق $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

ⓐ هل f اشتقاقي عند الصفر؟

ⓑ احسب $f'(x)$ على $]0,1[$.

الحل:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}-0}{x-0}$

$=\lim\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\times\frac{1}{x}=\lim\sqrt{\frac{x^2(x)}{1-x}}\times\frac{1}{x}=\lim|x|\sqrt{\frac{x}{1-x}}\times\frac{1}{x}$

$|x|=+x$ لأن $x\in[0,1[$

$=\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\times\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=0$

f اشتقاقي عند 0

b. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}\left(\frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}\right)$

$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}\left(\frac{3x^2-3x^3+x^3}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}}\left(\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}\right)$

[10] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{x+2}{|x|+1}$.

ⓐ ادرس قابلية اشتقاق f عند 0 من اليمين، ثم اكتب معادلة لنصف المماس من اليمين لـ C في $A(0,2)$.

ⓑ ارسم نصف المماس السابق وارسم C_f على المجال $[0,2]$.

الحل:

$f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{x+1} & x\geq 0\\ \frac{x+2}{-x+1} & x\leq 0\end{cases}$

x		0	
$\lvert x\rvert$	$-$	0	$+$

a. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0^+)$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{x+2}{x+1}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{x+2-2x-2}{x+1}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{x+1}\times\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{x+1}=-1$

f قابل للاشتقاق عند 0 من اليمين $f'(0^+)=-1$

$y=f'(0^+)(x-0)+f(0)$

$y=-x+2$

b. رسم نصف المماس

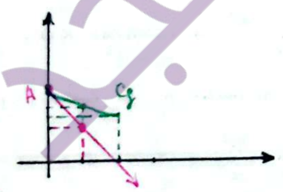
$y=-x+2$

x	0	1
y	2	1

رسم C_f على $[0,2]$

x	0	1	2
$f(x)$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$

الرسم:



Add

أعد السؤال من اليسار، والرسم على $[-2,0]$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{x+2}{-x+1}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{x+2+2x-2}{-x+1}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3x}{-x+1}\times\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3}{-x+1}=3$

f قابل للاشتقاق عند 0 من اليسار $f'(0^-)=3$

$y=f'(0^-)(x-0)+f(0)\Rightarrow y=3x+2$

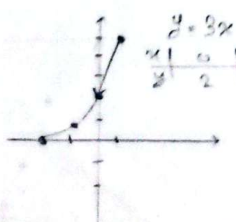
رسم نصف المماس:

$y=3x+2$

x	0	1
y	2	5

رسم C_f على $[-2,0]$

x	-2	-1	0
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2



5. تعيين مجال الاشتقاق: يوجد تمارين P.206

مجال الاشتقاق هو نفس مجال التعريف الا في حالتين:

♣ حالة الجذر والقيمة المطلقة: ندرس الاشتقاق عند الاعداد التي تعدم المضمون الجذر إذا كان اشتقاقي نتركها في المجال.

♣ حالة أكثر من فرع: ندرس الاشتقاق عند نقطة الفصل إذا كان اشتقاقي نتركها في المجال.

كل التوابع المرجعية اشتقاقية على مجموعة تعريفيها إلا التابعين:

♣ التابع المرجعي $x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$.

♣ التابع المرجعي $x \mapsto |x|$ اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

مثال6: جد مجال الاشتقاق ثم جد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

(1) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 1$ نلاحظ $D = \mathbb{R}$ فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. بالاشتقاق نجد $f'(x) = 4x^3 - 10x^2$.

(2) $f(x) = \cos x$ نلاحظ $D = \mathbb{R}$ فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$.
بالاشتقاق نجد $f'(x) = -\sin x$.

(3) $f(x) = x^2 \sin x$ نلاحظ $D = \mathbb{R}$ و f اشتقاقي على $\mathbb{R}$
بالاشتقاق نجد $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$

(4) $f(x) = \sqrt{x-1}$ نلاحظ $D = [1,+\infty[$ فيكون f اشتقاقي على $]1,+\infty[$ ندرس قابلية الاشتقاق عند 1:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

f غير اشتقاقي عند 1 ومنه f اشتقاقي على $]1,+\infty[$

بالاشتقاق نجد $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

(5) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ نلاحظ $D = [0,+\infty[$ فيكون f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ندرس قابلية الاشتقاق عند 0:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x\to0}-\frac{2\sin^2(\sqrt{x}/2)}{x}$$

$$= \lim_{x\to0}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\sqrt{x}/2)}{\sqrt{x}/2}\right)^2 = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

f اشتقاقي عند 0 ومنه f اشتقاقي على $[0,+\infty[$

بالاشتقاق نجد $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$

(6) ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2\sqrt{x-1} & : \ x > 1 \\ (1-x)\sqrt{1-x} & : \ x \le 1 \end{cases}$$

f مستمر عند 1 و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

ندرس الاشتقاق عند 1

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^+}(x-1)\sqrt{x-1} = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1^-}-\frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{1-x} = \lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x} = 0 \in \mathbb{R}$$

f اشتقاقي عند 1 ومنه f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

طريقة التعليل(مبرهنة):

♣ مجال اشتقاق التابع كثير الحدود والتابع الكسري والتابع المرجعي هو مجال التعريف.

♣ ان مجموع او طرح او ضرب او قسمة تابعين اشتقاقيين هو تابع اشتقاقي مجاله.

♣ التابع المركب: نكتب لأنه مركب تابعين اشتقاقي حيث:

– حشوة التابع اشتقاقي على مجال الدراسة.

– التابع المرجعي اشتقاقي على مجاله.

– مهما يكن x من مجال الدراسة فإن الحشوة مجال التابع المرجعي.

مثال7: جد مجال الاشتقاق مع التعليل ثم جد $f'(x)$:

(1) $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x^2+x}$ نلاحظ $D = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$

فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ لأنه f تابع كسري

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+x)-(x^2+x+2)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = -\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}.$$

(2) $f(x) = \sin x$ نلاحظ $D = \mathbb{R}$ فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

لأنه f تابع مرجعي.

بالاشتقاق نجد $f'(x) = \cos x$.

(3) $f(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ نلاحظ $D = \mathbb{R}$ فيكون f اشتقاقي

على $\mathbb{R}$ لأنه مركب تابعين اشتقاقي حيث:

$x \mapsto 2x + \dfrac{\pi}{3}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$x \mapsto +\sin x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2x + \dfrac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$

بالاشتقاق نجد $f'(x) = -\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\times 2 = -2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(4) $f(x) = x^2 + \sin x$ نلاحظ $D = \mathbb{R}$

فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه مجموع تابعين اشتقاقي حيث:

$x \mapsto x^2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sin x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

بالاشتقاق نجد $f'(x) = 2x + \cos x$

(5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ نلاحظ $D = \mathbb{R}$

فيكون f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه مركب تابعين اشتقاقي حيث:

$x \mapsto x^2 + 2x + 3$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 > 0$ حيث $(\Delta = -8 < 0)$ أي

$x^2 + 2x + 3 > 0$

بالاشتقاق $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}}(2x + 2) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

[11] جد مجال الاشتقاق مع التعليل.

ⓐ $f(x) = x^5 + x^2 + 1$ ⓑ $f(x) = \sin x$

ⓒ $f(x) = \sqrt{x}$ ⓓ $f(x) = x^5 + \sin x$

ⓔ $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$ ⓕ $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)^3$

ⓖ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ⓗ $f(x) = (\sin x)^4$

الحل:

a. $f(x) = x^5 + x^2 + 1$

$D = R$

f اشتقاقي على R لأنه التابع كثير حدود

b. $f(x) = \sin x$

$D = R$

f اشتقاقي على R لأنه تابع مثلثي

c. $f(x) = \sqrt{x}$

$D = [0, +\infty[$

f اشتقاقي على $]0, +\infty[$ لأنه تابع جذري

d. $f(x) = x^5 + \sin x$

$D = R$

f اشتقاقي على R لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين حيث

$x \to x^5$ اشتقاقي على R لأنه كثير حدود

$x \to \sin x$ اشتقاقي على R لأنه تابع مثلثي

e. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

$D = R \setminus \{2\}$

f اشتقاقي على $R \setminus \{2\}$ لأنه تابع كسري

f. $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x + 2}\right)^3$

$D = R \setminus \{-2\}$

f اشتقاقي على $R \setminus \{-2\}$ لأنه مركب تابعين اشتقاقيين حيث

$x \to \dfrac{x + 1}{x + 2}$ اشتقاقي على $R \setminus \{-2\}$ لأنه تابع كسري

$x \to x^3$ اشتقاقي على R لأنه كثير حدود

$\forall x \in R \setminus \{-2\} \to \dfrac{x + 1}{x + 2} \in R$

g. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$D = R$

f اشتقاقي على R لأنه مركب تابعين اشتقاقيين حيث

$x \to x^2 + 1$ اشتقاقي على R لأنه كثير حدود

$x \to \sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0, \infty[$ لأنه تابع جذري

$\forall x \in R \to x^2 + 1 \in]0, +\infty[$

h. $f(x) = (\sin x)^4$

$D = R$

f اشتقاقي على R لأنه مركب تابعين اشتقاقيين حيث

$x \to \sin x$ اشتقاقي على R لأنه تابع مثلثي

$x \to x^4$ اشتقاقي على R لأنه كثير حدود

$\forall x \in R \Rightarrow \sin x \in R$

[12] احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f.

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$$

الحل:

$f'(x) = 4x^3 - x + 1$

$f''(x) = 12x^2 - 1$

$f'''(x) = 24x$

6. إيجاد النهاية بالاستفادة من المشتق:

في حالة $\frac{0}{0}$ والمقام $x-a$ يمكن إيجاد النهاية بالاستفادة من المشتق وفق الخطوات:

- نفرض البسط (أو البسط بدون العدد) تابع جديد $h(x)$ ونشتقه.
- نكتب f اشتقاقي عند a لذلك $\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a)$.

مثال8: احسب النهاية $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$.

الحل: نفرض $h(x)=\sqrt{x^2+4}$ ومنه

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}2x\ ,\ h(0)=2,\ h'(0)=0$$

لدينا f اشتقاقي عند 0 ومنه $h'(0)=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$

أي $0=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$

[13] احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها.

ⓐ $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ $\quad a=1$

ⓑ $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ $\quad a=0$

ⓒ $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$ $\quad a=1$

ⓓ $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ $\quad a=0$

الحل:

a. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ $\quad a=1$

بفرض $h(x)=\sqrt{x+1}$

$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $\quad h'(1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$h'(1)=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=$

$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b. $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$ $\quad a=0$

نفرض $h(x)=\cos x-1$

$h'(x)=-\sin x$ $\quad h'(0)=0$

$h'(0)=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=$

$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=0$

c. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$ $\quad a=1$

$h(x)=\sqrt{x^2+x+2}-2$

$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+2}}(2x+1)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$

$h'(1)=\frac{3}{4}$

$h'(1)=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=$

$=\lim\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}=\frac{3}{4}$

d. $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ $\quad a=0$

$h(x)=\tan x$

$h'(x)=1+\tan^2 x$ $\quad h'(0)=1$

$h'(0)=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

Add $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\quad a=0$ $\quad$ استنتج $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

$h(x)=\sin x$

$h'(x)=\cos x$ $\quad h'(0)=1$

$h'(0)=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}\Rightarrow=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

[14] f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}$.

ⓐ احسب $f'(x), f(1), f'(1)$ ⓑ استنتج $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}-3}{x-1}$.

الحل:

a. $f'(x)=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$

$f(1)=\sqrt{9}=3$ $\quad f'(1)=\frac{5}{6}$

b. $f'(1)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}-3}{x-1}=\frac{5}{6}$

7. تأطير (حصر) توابع مثلثاتية

خاصة: ليكن تابعين f و g معرفين واشتقاقيين على المجال $D=[0,+\infty[$. ويحققان $f'(x)\le g'(x)$ أيا يكن x من D . فإن

$$\boxed{f(x)-f(0)\le g(x)-g(0)}$$

الاثبات: بدراسة التابع h المعرف على D وفق $h(x)=f(x)-f(0)-g(x)+g(0)$ نلاحظ أن $h'(x)=f'(x)-g'(x)\le 0$ على $D=[0,+\infty[$ ، فالتابع h متناقص على D . ولكن $h(0)=0$ ، إذن $h(x)\le h(0)=0$ أيا كانت x من D .

مثال9: أثبت أن $\sin x\le x$ ، أيا يكن $x\ge 0$.

الحل: $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x$ ومنه $f'(x)=\cos x$

و $g'(x)=1$ و $f'(x)=\cos x\le 1$

ومنه $\sin x\le x$ في حالة $x\ge 0$.

مثال10: برهن أنه في حالة $x\in\mathbb{R}$ أن $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1$

الحل: لدينا $\cos x\le 1$ ولنثبت $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x$ باختيار

$f(x)=\cos x$ ، و $g(x)=1-\frac{x^2}{2}$ ومنه

$f'(x)=-\sin x$ ، و $g'(x)=-x$

ولكن لدينا من السؤال السابق $\sin x\le x$ أي $-\sin x\ge -x$

أي $f'(x)\ge g'(x)$ ومنه $f(x)-f(0)\ge g(x)-g(0)$ أي

$\cos x-1\ge 1-\frac{x^2}{2}-1$ أي $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$

ولكنّ طرفي هذه المتراجحة زوجيان، إذن تتحقّق المتراجحة على $\mathbb{R}$.

مثال11: أثبت أن $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$ ، أيا يكن $x\ge 0$.

الحل: لدينا $\sin x\le x$ ولنثبت $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x$ باختيار

$f(x)=x-\frac{x^3}{6}$ و $g(x)=\sin x$ ومنه

$f'(x)=1-\frac{x^2}{2}$ ، و $g'(x)=\cos x$ ولكن لدينا من السؤال السابق

$1-\frac{x^2}{2}\le\cos x$ ومنه $g(x)-g(0)\le f(x)-f(0)$ أي

$x-\frac{x^3}{6}\le\sin x$ في حالة $x\ge 0$.

مثال12: لدينا أن $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ، أيا يكن $x\in\mathbb{R}$.

a) بين أن $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ ، أيا يكن $x\ge 0$.

b) استنتج نهاية $\frac{x-\sin x}{x^3}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

الحل: a) لدينا من السؤال السابق $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x$

ولنثبت $\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ باختيار $f(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

و $g(x)=\sin x$ ومنه $f'(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ، و $g'(x)=\cos x$

ولكن لدينا $\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ومنه

$g(x)-g(0)\le f(x)-f(0)$ أي $\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ في حالة $x\ge 0$.

b) في حالة $x>0$ نجد $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ أن

$$-\frac{x^3}{6}\le\sin x-x\le-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

$$\frac{x^3}{6}\ge-\sin x+x\ge\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}\le\frac{x-\sin x}{x^3}\le\frac{1}{6}$$

وبتطبيق هذه المتراجحة على $-x$ في حالة $x>0$ نستنتج أنها تبقى صحيحة في حالة $x<0$ أيضاً. إذن مهما تكن $x\ne 0$ فلدينا $\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}\le\frac{x-\sin x}{x^3}\le\frac{1}{6}$. وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة، نستنتج عند جعل x تسعى إلى 0 أن $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$.

دراسة التابع

1. دراسة تغيرات التابع

مبرهنة الاطراد:

ليكن f تابعاً اشتقاقياً على مجال I، والمشتق f'.

- إذا كان $f' \geq 0$ على I (حيث ينعدم عند عدد منته من النقاط) كان f متزايداً تماماً على I.
- إذا كان $f' \leq 0$ على I (حيث ينعدم عند عدد منته من النقاط) كان f متناقصاً تماماً على I.
- إذا كان f' معدوماً على I كان f ثابتاً على I.

خطوات دراسة تغيرات التابع:

- نوجد النهايات عند أطراف مجموعة التعريف المفتوحة والقيم عند الأطراف المغلقة.
- نوجد $f'(x)$ ونجعل $f'(x)=0$ ونجد قيم x و $f(x)$ المقابلة.

دراسة اشارة المشتق

- ننظم جدول بالمعلومات السابقة عند الضرورة.

رسم منحني التابع:

في حال عدم وجود جدول تغيرات نختار نقاط مساعدة ونصل بينها وفي وجود جدول تغيرات نتبع:

- نرسم المقاربات والمماسات في حال وجودها (المستقيم الذي x و y)
- نعين النقاط الناتجة من الجدول وأي نقط معلومة أخرى.
- عند الحاجة نعين نقط التقاطع مع ox, oy.

التقاطع مع المحاور

التقاطع مع Oy يكون $x=0$ (دائما يمكن الإيجاد)

التقاطع مع المحور Ox يكون $f(x)=0$ (أحيانا يمكن الإيجاد)

مثال13: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-3x+5$. ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

الحل: f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ولدينا $f'(x)=3(x^2-1)$ نجعل $f'(x)=0$ ومنه $3(x^2-1)=0$ أي $x=\pm 1$ ومنه $f(1)=3,\ f(-1)=7$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

مثال14: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$.

ⓐ أثبت أنّ f مستمر على $\mathbb{R}$

ⓑ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها وعيّن $f(\mathbb{R})$.

الحل: ⓐ التابع مستمر على $\mathbb{R}$ لأنّ $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ تابع كسري مستمر على $\mathbb{R}$. و $x\mapsto 1$ مستمر على $\mathbb{R}$.

ⓑ f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

ولدينا $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ نجعل $f'(x)=0$ ومنه $2x=0$ أي $x=0$ ومنه $f(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

إذن $f(\mathbb{R})=[0,1[$.

مثال15: التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

ⓐ تحقق أنّ f تابعٌ زوجي.

ⓑ علّل كون $\Delta: y=x$ مقارباً مائلاً للخط C في جوار $+\infty$؟

ⓒ ادرس تغيرات f. ونظِّم جدولاً بها

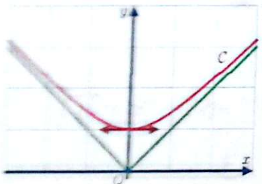
الحل: ⓐ الشرط① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$ (محقق)

الشرط② $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$.

ومنه f تابعٌ زوجي.

ⓑ $f(x)-y_\Delta=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=0$

إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط البياني C.



ⓒ f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ولدينا $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

نجعل $f'(x)=0$ ومنه $x=0$ ومنه $f(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

[15] ادرس تغيرات f وفق: $f(x)=x^2-2x-3$. ثم ارسم C.

الحل:

$D=R\ ]-\infty,+\infty[$

و f اشتقاقية على R

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

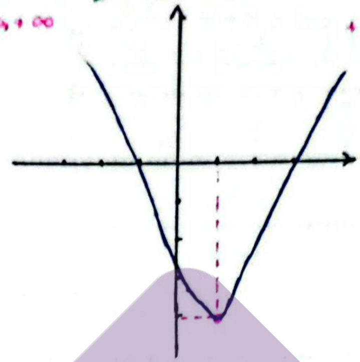
$f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0 \to 2x-2=0 \to x=1$

$f(1)=-4$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$-\infty, +\infty$ $\qquad$ $+\infty, +\infty$



$f(0) = -3$ مع oy

مع ox

$f(x) = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3$ او $x = -1$

[16] ادرس تغيرات f وفق: $f(x) = x^3 - 3x + 1$. ثم ارسم C.

الحل:

$D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

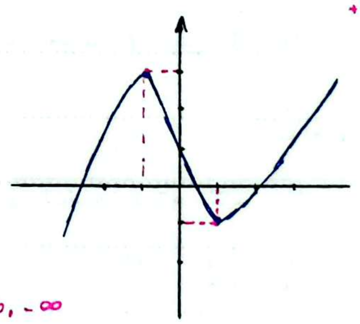
$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases}$

$f(1) = -1 \qquad f(-1) = +3$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$+\infty, +\infty$



$-\infty, -\infty$

ينعدم الكسر اذا انعدم البسط

[17] ادرس تغيرات f وفق: $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$. ثم ارسم C.

الحل:

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = 2$

$y = 2$ مقارب أفقي عند $\mp\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

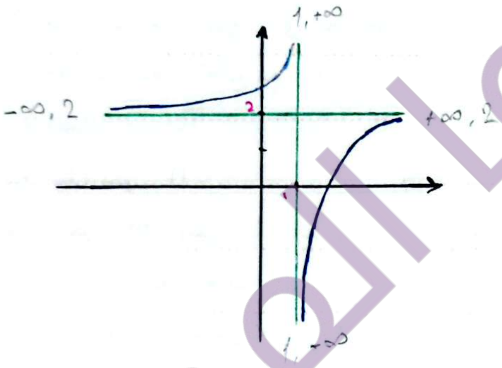
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي

$f'(x) = \dfrac{2(x-1) - (2x-3)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x-2-2x+3}{(x-1)^2} =$

ينعدم الكسر اذا انعدم البسط $\qquad \dfrac{1}{(x-1)^2} > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	2



[18] التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 8}$

ⓐ احسب نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل C مقاربا أفقيا؟

ⓑ تحقق أن المستقيم d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للخط C.

ⓒ نظم جدولا بتغيرات f. وارسم مقاربات C ثم ارسم C.

الحل:

a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$f(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2+8})(x+\sqrt{x^2+8})}{x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{x^2-x^2-8}{x+\sqrt{x^2+8}} = \frac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{-8}{+\infty+\infty} = 0$$

$\Delta: y=0$ مقارب افقي للخط G عند جوار $+\infty$

لا يلتقي مقارب مع مقارب مائل في نفس الجوار

b. $d: y = 2x$

$$f(x) - y_d = x - \sqrt{x^2+8} - 2x$$
$$= -\sqrt{x^2+8} - x = -(\sqrt{x^2+8}+x)$$
$$= \frac{-(\sqrt{x^2+8}+x)(\sqrt{x^2+8}-x)}{\sqrt{x^2+8}-x} = \frac{-(x^2+8-x^2)}{\sqrt{x^2+8}-x}$$
$$= \frac{-8}{\sqrt{x^2+8}-x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y_d = \frac{-8}{+\infty+\infty} = 0$$

ومنه $d: y = 2x$ مقارب مائل للخط G في جوار $-\infty$

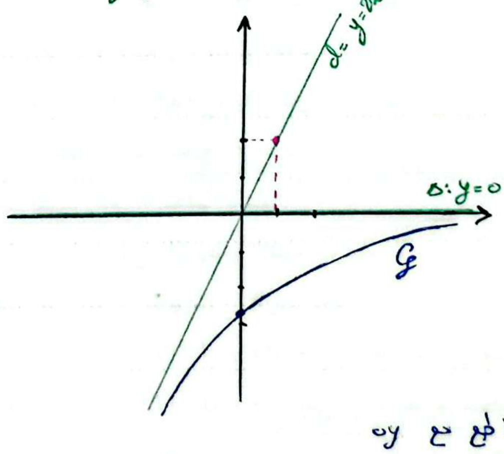
c. $f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$$= \frac{\sqrt{x^2+8}-x}{\sqrt{x^2+8}} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

رسم للمقارب المائل $d: y = 2x$

x	0	1
y	0	2



تقاطع مع oy

$f(0) = 0 - \sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

$-2(1,4) \simeq -2,8$

ملاحظة

$\sqrt{2} \simeq 1,4$

$\sqrt{3} \simeq 1,7$

$\sqrt{5} \simeq 2,2$

[19] ليكن التابع $f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$ المعرف على $[0,2]$.

ⓐ عين مجال الاشتقاق

ⓑ ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها.

ⓒ عين مماسي C في النقطتين $A(0,0)$ و $B(2,0)$.

ⓓ ارسم مماسي C في A و B ثم ارسم C.

الحل:

a.

* ندرس الاشتقاق عند 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \sqrt{x(2-x)} = 0$$

f اشتقاقي عند 0 والمماس افقي عند 0

* ندرس الاشتقاق عند 2

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x\sqrt{x(2-x)}\,(\sqrt{x(2-x)})}{x-2\,(\sqrt{x(2-x)})}$$
$$= \lim_{x \to 2} = \frac{x(x\cancel{(2-x)})}{\cancel{(x-2)}\sqrt{x(2-x)}} = \lim_{x \to 2} \frac{-x^2}{\sqrt{x(2-x)}} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

f غير اشتقاقي عند 2 والمماس شاقولي

مجال الاشتقاق هو $[0,2[$

b. $f(0)=0 \qquad f(2)=0$

$f(x)=x\sqrt{2x-x^2}$

$f'(x)=\sqrt{2x-x^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}(2-2x)x$

$=\dfrac{\sqrt{2x-x^2}\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{2x-x^2}}+\dfrac{(1-x)x}{\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{2x-x^2+x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$

$=\dfrac{3x-2x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$

$f'(x)=0$

$3x-2x^2=0 \rightarrow x(3-2x)=0$

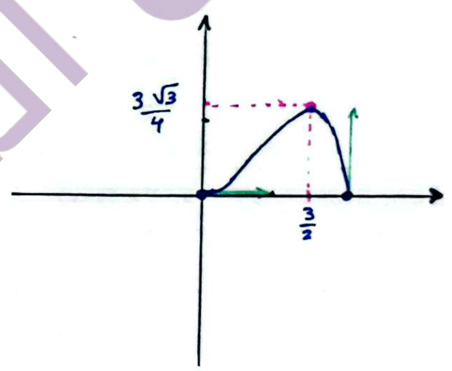
إما $x=0$ أو $3-2x=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

$f(0)=0 \qquad f(\frac{3}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

c. المماس عند $(0,0)$ أفقي وهو $y=0$

المماس عند $(2,0)$ شاقولي وهو $x=2$



لإثبات أن $f(a)=b$

(1) نوجد مجال مفتوح يضم a

(2) نوجد $J\cap D$

(3) نكتب

$\forall x \in J\cap D \Rightarrow$

$f(x)\le f(a)$ كبرى $\qquad f(x)\ge f(a)$ الصغرى

1 تعيين القيم الحدية

تعريف نقول إن القيمة $f(c)$ **قيمة كبرى محليا** للتابع f يبلغها عند النقطة c إذا وجد مجالٌ مفتوحٌ J يضم النقطة c ويحقق الشرط

$\forall x \in J\cap D,\quad f(x)\le f(c)$

- نقول إن القيمة $f(c)$ **قيمة صغرى محليا** للتابع f يبلغها عند النقطة c إذا وجد مجالٌ مفتوحٌ J يضم النقطة c ويحقق الشرط

$\forall x \in J\cap D,\quad f(x)\ge f(c)$

- إذا كانت $f(c)$ قيمة كبرى (أو صغرى) محليا وكان f اشتقاقي عند c، و c محتواة في مجال مفتوح من D كان $f'(c)=0$.
- إذا انعدم f' عند c وغير إشارته عندها، كانت $f(c)$ قيمة حدية (كبرى أو صغرى) محليا للتابع f.
- إذا كانت $f(c)$ قيمة حدية وكان f اشتقاقي عند c، كان المماس للخط البياني للتابع f عند c افقيا.

طريقة اثبات القيمة الحدية محلياً:

- نختر مجالٌ مفتوحٌ J يضم النقطة c ونوجد $J\cap D$
- نكتب من جدول التغيرات أو الرسم نجد

$\forall x \in J\cap D,\quad f(x)\ge f(c)$ (في حالة الصغرى محلياً)

$\forall x \in J\cap D,\quad f(x)\le f(c)$ (في حالة الكبرى محلياً)

من الجدول: نكتب القيم من جدول التغيرات (حيث الشكل $\vee$ يعني قيمة صغرى محليا والشكل $\wedge$ يعني قيمة كبرى محليا وفي طرف مجال التعريف المغلق يوجد إما قيمة صغرى محليا أو كبرى محليا أما عند المجال المفتوح فلا يوجد قيم حدية)

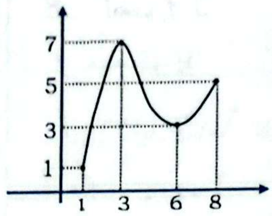
إذا كانت القيمة عند الأطراف لا يهم اشتقاقها

أما إذا لم تكن عند الأطراف

f غير اشتقاقي $\qquad$ f اشتقاقي

اشارة المشتقة هي التي تحدد الاطراد

مثال16: ليكن الخط البياني المرسوم



جانباً للتابع f المعرف على $[1,8]$:

$f(6)=3$ قيمة صغرى محليا.

$f(8)=5$ قيمة كبرى محليا.

$f(3)=7$ قيمة كبرى محليا. وهي أكبر قيم التابع.

$f(1)=1$ قيمة صغرى محليا. وهي أصغر قيم التابع.

مثال17: ليكن التابع f المعرف على $]-1,5[$:

x	-1		0		1		5
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$
$f(x)$	-9	$\nearrow$	8	$\searrow$	-2	$\nearrow$	6

$f(0)=8$ قيمة كبرى محليا. وهي أكبر قيم التابع.

$f(-1)=-9$ قيمة صغرى محليا وهي أصغر قيم التابع.

$f(1)=-2$ قيمة صغرى محليا.

عند 5 لا يوجد قيمة حدية.

مثال18: في الجدول السابق أثبت أن $f(0)$ قيمة كبرى محليا.

نختر المجال $J=]-1,1[$ ونوجد التقاطع

$J\cap D=]-1,1[\cap]-1,5[=]-1,1[$

نلاحظ من جدول التغيرات $\forall x\in]-1,1[,\quad f(x)\le f(0)=\cancel{4}\ 8$ أي

$f(0)=\cancel{4}\ 8$ قيمة كبرى محليا.

مثال19: في الجدول السابق أثبت أن $f(-1)$ قيمة صغرى محليا.

نختر المجال $J=]-2,0[$ ونوجد التقاطع.

$J\cap D=]-2,0[\cap]-1,5[=[-1,0[$

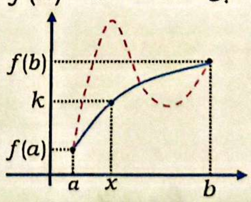
نلاحظ من جدول التغيرات $\forall x\in[-1,0[,\quad f(x)\ge f(-1)=-9$

أي $f(-1)=-9$ قيمة صغرى محليا.

2. حل المعادلة $f(x)=k$:

مبرهنة الحل الوحيد:

ليكن التابع f المعرف على $I=[a,b]$ تقبل المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا إذا كان



- f مستمر على I
- f مطرد تماما على I
- $k\in f([a,b])$

مبرهنة القيمة الوسطى:

ليكن f المعرف على $I=[a,b]$ تقبل $f(x)=k$ تقبل حلا على الأقل إذا كان

- f مستمر على I
- $k\in f([a,b])$

ملاحظة:

- المبرهنتين السابقتين صحيحتين إذا كان المجال مغلق أو مفتوح.
- إذا حدد عدد الحلول بالضبط نستعمل مبرهنة الحل الوحيد وإلا نستعمل مبرهنة القيمة الوسطى
- إذا كان التابع مطرد نوجد صورة مجال بإيجاد صورة طرفيه.
- في حالة $f(x)=0$ وكان f معرف عند طرفي المجال $[a,b]$: يمكن أن نستبدل الشرط $f(a)\times f(b)<0$ بالشرط $k\in f([a,b])$

[20] التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3+x-4$. هل للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $]1,2[$؟

الحل:

$D=\mathbb{R}$ دالة f مستمر على $\mathbb{R}$ ← f مستمر على $]1,2[$

$f'(x)=3x^2+1$

$f'(x)=0 \qquad 3x^2+1=0$

$3x^2\neq -1$ تناقض

$f'(x)>0$ ← اشارة 3

f متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ فهو متزايد تماماً على $]1,2[$

$f(1)=-2 \qquad f(2)=8+2-4=6$

$f(1)\cdot f(2)=-12<0$ ل 1

$0\in f(]1,2[)=]-2,6[$ ل 2

المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد على $]1,2[$

[21] التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-x^2+x-2$. هل للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في $]1,2[$؟

الحل:

المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد على $]1,2[$ لأن:

f مستمر على $\mathbb{R}$ فهو مستمر على $]1,2[$

$f'(x)=3x^2-2x+1$

$\Delta=b^2-4ac=4-4(3)(1)=-8<0$ لا ينعدم

$f'(x)>0$

f متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ فهو متزايد تماماً على $]1,2[$

$0\in f(]1,2[)=]-1,4[$

على $]1,+\infty[$

f مستمر على $]1,+\infty[$

f متزايد تماماً على $]1,+\infty[$

$0 \in f(]1,+\infty[) =]-2,+\infty[$

أي للمعادلة حل وحيد على هذا المجال وبالتالي

يوجد حل وحيد على $\mathbb{R}$

[22] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

ⓐ ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ⓑ احسب $f'(x)$ وادرس إشارته، ثم نظم جدولا بتغيرات f.

ⓒ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل جذرا واحدا فقط.

الحل:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b. $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$6x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow 6x(x-1) = 0$

إما $x = 0$ أو $x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(0) = -1$ $\quad f(1) = -2$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

C. على $]-\infty,0[$:

f مستمر على $]-\infty,0[$

f متزايد تماماً على $]-\infty,0[$

$0 \notin f(]-\infty,0[) =]-\infty,-1[$

لا يوجد حل على هذا المجال

على $[0,1]$:

f مستمر على $[0,1]$

f متناقص تماماً على $[0,1]$

$0 \notin f(]0,1[) = [-2,-1]$

لا يوجد حل على هذا المجال

[23] ليكن f المعرف على $I = [-3,2]$ وفق $f(x) = x^2 + 1$.

ⓐ ارسم خطه البياني C_f. واحسب $f(I)$.

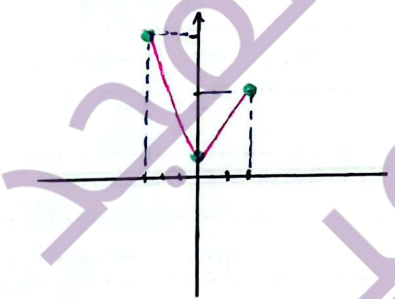
ⓑ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$ في المجال I؟

الحل:

ملاحظة: لتصوير مجال محدود نصور طرفيه والا نسقط oy

a.

x	-3	0	2
y	10	1	5



$f([-3,2]) = [1,10]$

b. يوجد حلان $f(x) = 4$

[24] أوجد عدد حلول المعادلة.

ⓐ $x^5 - x^3 + x - 5 = 0$ ⓑ $x^4 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$

الحل:

a. $x^5 - x^3 + x - 5 = 0$

بفرض $f(x) = x^5 - x^3 + x - 5$

ونبحث عن عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

لندرس تغيرات التابع :

$f(x) = x^5 - x^3 + x - 5$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 0$

$5x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

$5(x^2)^2 - 3x^2 + 1 = 0$

بفرض $x^2 = t$

$5t^2 - 3t + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(5)(1) = 9 - 20 = -11 < 0$

$f'(x) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

b. $x^4 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$

بفرض $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + 1$

ونبحث عن عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

ندرس تغيرات التابع :

$f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x + 1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = 0$

$4x^3 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^4 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) + 1 = \frac{13}{16}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{13}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

المعادلة $f(x) = 0$ مستحيلة الحل

أما في

$f(x) = 1$ نجد حلان

[25] ليكن f تابعا مستمرا واشتقاقيا على المجال $I = [0,1]$ ويحقق:

- أيا كان x من I كان $f(x)$ من I.
- وأيا كان x من $]0,1[$ كان $f'(x) < 1$.

أثبت أن للمعادلة $f(x) = x$ حلا وحيدا في I.

الحل:

$f(x) = x \Rightarrow f(x) - x = 0$

$g(x) = f(x) - x \Rightarrow g(x) = 0$

* g مستمر على $[0,1]$ لأنه مجموع تابعين مستمرين على $[0,1]$

* $g'(x) = f'(x) - 1$

ولكن $f'(x) < 1$

$f'(x) - 1 < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

g متناقص تماماً على I

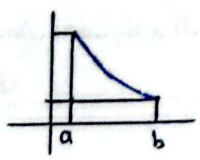
* $0 \in g([0,1]) = [f(1) - 1, f(0)]$

$0 \le f(1) \le 1$ $0 \le f(0) \le 1$

$-1 \le f(1) - 1 \le 0$

للمعادلة $f(x) = x$ حل وحيد على I

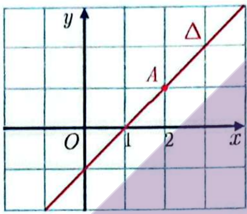
ملاحظة : إذا كان التابع متناقص صورة الأول هي الأكبر



2. إيجاد الوسطاء:

المعلومة	القاعدة
الخط C يمر من $A(x_0, y_0)$	$f(x_0) = y_0$
المماس افقي عند x_0	$f'(x_0) = 0$
المماس عند x_0 هو $y = ax + b$	$f'(x_0) = a$
y_0 قيمة حدية محليا عند x_0	$f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = 0$ f' يغير اشارته عند x_0

[26] f المعرف على $[-2,4]$ وفق $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$. عين a و b علما بأن المستقيم Δ مماسّ للخط $\mathbb{C}$ في النقطة A.



الحل:

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$

الوسيط هو كل مجهول غير ديكارتي

$A(2,1)$ $\quad A \in C$

$f(2) = 1$

$\dfrac{2a+b}{5} = 1 \rightarrow 2a+b = 5$

$\boxed{b = 5 - 2a}$ (1

$(2,1)$
$(1,0)$

$m_\Delta = \dfrac{1-0}{2-1} = 1 \qquad m_\Delta = f'(2)$ ناظر A نتع x

$f'(x) = \dfrac{a(x^2+1) - 2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$f'(2) = \dfrac{5a - 4(2a+b)}{25} = 1$

$5a - 8a - 4b = 25 \qquad \boxed{-3a - 4b = 25}$ (2

نعوض (1 في (2

$-3a - 4(5 - 2a) = 25$

$-3a - 20 - 8a = 25 \rightarrow 5a = 45 \rightarrow a = 9$

نعوض في (1

$b = 5 - 18 = -13 \rightarrow f(x) = \dfrac{9x - 13}{x^2+1}$

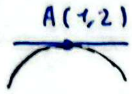
[27] f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$

هل يمكن تعيين a و b لكي يقبل $\mathbb{C}$ مماسا أفقيا في $A(1,2)$ منه؟

الحل:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$

$A(1,2) \in C$



$f(1) = 2$

$a + b + 1 = 2 \qquad \boxed{b = 1 - a}$ (1

المماس افقي عند 1 $\quad m = 0$

$f'(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$\boxed{3a + 2b = 0}$ (2

نعوض (1 في (2

$3a + 2(1 - a) = 0$

$3a + 2 - 2a = 0 \rightarrow a = -2$

$b = 1 + 2 = 3$

[28] f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \dfrac{3x^3 + ax + b}{x^2+1}$ عين a و b ليكون $y = 4x + 3$ مماس في النقطة التي فاصلتها 0.

الحل:

$y = 4x + 3$ مماس عند 0

لدينا $x = 0 \qquad y = 3$
$A(0,3)$

$f(0) = 3$

$\boxed{b = 3}$

$m_T = 4 \qquad f'(0) = 4$

$f'(x) = \dfrac{(9x^2+a)(x^2+1) - 2x(3x^3+ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$f'(0) = \dfrac{a - 0}{1} = 4 \rightarrow \boxed{a = 4}$

[29] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-x^2+ax$.
عين العدد a ليكون للتابع f قيمة حدية محليا عند $x=1$.

الحل:

$f(x)=x^3-x^2+ax$

قيمة حدية محلياً عند 1

$f'(x)=3x^2-2x+a$

$f'(1)=0$

$3-2+a=0 \Rightarrow a=-1$

[30] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$،
حيث a و b عددان حقيقيان. جد قيم a و b بحيث يتحقق الشرطان:

- $f(-1)$ قيمة حدية محليا للتابع.
- هذه القيمة الحدية محليا معدومة.

الحل:

$f(\ )=\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}$

$f(-1)$ قيمة حدية معدومة

$f(-1)=0$

$f'(-1)=0$

$f(-1)=0 \rightarrow \dfrac{a-b+1}{-2}=0$

$a-b+1=0 \rightarrow \boxed{a=b-1}$ (1

$f'(-1)=0$

$f'(x)=\dfrac{(2ax+b)(x-1)-(ax^2+bx+1)}{(x-1)^2}$

$\dfrac{-2a+b(-2)-(a-b+1)}{4}=0$

$+4a-2b-a+b-1=0$

$\boxed{3a-b-1=0}$ (2

نعوض (1 في (2

$3(b-1)-b-1=0 \rightarrow 3b-3-b-1=0$

$2b=4 \rightarrow \boxed{b=2}$

نعوض في (1

$a=2-1=1 \Rightarrow \boxed{a=1}$

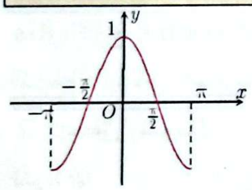
3. التابع الزوجي:

يكون التابع f **زوجي** إذا كان:

$\boxed{①\ \forall x\in D \Rightarrow -x\in D \quad ②\ f(-x)=f(x)}$

يكون C_f متناظر بالنسبة للمحور Oy

مثال: التابع $x\mapsto \cos x$ تابع زوجي



لأنه:

الشرط ① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$ (محقق وضوحاً)

الشرط ② $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$.

ملاحظة: إذا كانت مجموعة تعريف التابع هي $\mathbb{R}$، كان شرط الأول محققاً وضوحاً.

[31] أثبت أن التابع f زوجي في كل من التوابع:

ⓐ $f(x)=x^2+\cos(2x)$ ⓑ $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$

الحل:

a. $f(x)=x^2+\cos(2x) \qquad D=\mathbb{R}$

الشرط 1 $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow -x\in\mathbb{R}$ محقق

الشرط 2 $f(-x)=(-x)^2+\cos(-2x)=x^2+\cos(2x)=f(x)$

b. $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

الشرط 1 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow -x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

الشرط 2 $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin(x)}{x}=f(x)$

f زوجي ومخطط البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

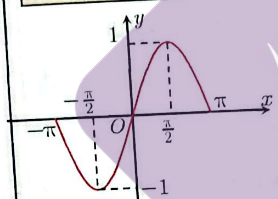
4. التابع الفردي:

يكون التابع f فردي إذا كان:

$\textcircled{1}\ \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \quad \textcircled{2}\ f(x) = -f(-x)$

يكون C_f متناظر بالنسبة للمبدأ O.

مثال: التابع $x \mapsto \sin x$ فردي لأنه:



الشرط① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$ (محقق وضوحاً)

الشرط②

$-f(-x) = -\sin(-x) = \sin(x) = f(x)$

ملاحظة: يمكن أن نكتفي بدراسة التابع الزوجي والفردي على الجزء الموجب من مجال التعريف.

[32] أثبت أن التابع f فردي في كل من التوابع:

ⓐ $f(x) = x\cos(x)$ ⓑ $f(x) = x^3 + \sin(2x)$

الحل:

a. $f(x) = x\cos(x)$ $\quad D = IR$

$\forall x \in IR \Rightarrow -x \in R$

$f(-x) = (-x)(\cos -x) = -x\cos(x) = -f(x)$

f فردي ، خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

b. $f(x) = x^3 + \sin(2x)$ $\quad D = IR$

$\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$

$f(-x) = (-x)^3 + \sin(-2x) = -x^3 - \sin 2x$

$= -(x^3 + \sin 2x) = -f(x)$

f تابع فردي ، خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

5. التابع الدوري:

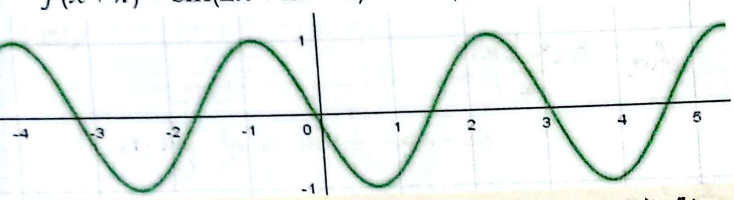
يكون التابع f دوري ودوره T إذا كان:

$\textcircled{1}\ \forall x \in D \Rightarrow x + T \in D \quad \textcircled{2}\ f(x+T) = f(x)$

مثال: التابع $x \mapsto \sin(2x-3)$ تابع دوري ودوره π لأنه:

الشرط① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $x+\pi$ من $\mathbb{R}$ (محقق وضوحاً)

الشرط② $f(x+\pi) = \sin(2x+2\pi-3) = \sin(2x-3) = f(x)$



ملاحظة: التابع $x \mapsto \sin(ax+b)$ و كذلك التابع $x \mapsto \cos(ax+b)$ دوري ودوره $\frac{2\pi}{|a|}$.

[33] أثبت أن التابع f دوري ودوره T في كل من التوابع:

ⓐ $f(x) = \cos(2x+3), T = \pi$ ⓑ $f(x) = \sin(x+2), T = 2\pi$

الحل:

a. $f(x) = \cos(2x+3)$ $\quad T = \pi$ $\quad D = IR$

$\forall x \in R \Rightarrow x + \pi \in R$

$f(x+\pi) = \cos(2(x+\pi)+3) = \cos(2x+2\pi+3)$

$\cos(2x+3) = f(x)$

f دوري ، دوره π

b. $f(x) = \sin(x+2)$ $\quad T = 2\pi$ $\quad D = IR$

$\forall x \in IR \Rightarrow x + 2\pi \in R$

$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi+2) = \sin(x+2) = f(x)$

f دوري ، دوره 2π

ملاحظة : للمضاعفات الزوجية لـ π هي الصفر "(حفظ)"

6 دراسة تابع مثلثي

عندما يكون التابع دوري نكتفي بدراسته على مجال طوله دور واحد T فضل أن يكون من الشكل $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$.

مثال20: f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2\sin x+\sin 2x$.

ⓐ تحقّق أنّ f دوريٌّ وأنّ 2π دورٌ له. ادرس الصفة الزوجية أو الفردية للتابع f. استنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

ⓑ أثبت أنّه، $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.

ⓒ ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$ ارسم الخط للتابع f على المجال $[0,\pi]$، ثمّ على المجال $[-2\pi,2\pi]$.

الحل: ⓐ الشرط① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $x+2\pi$ من $\mathbb{R}$ (محقّق)

الشرط②

$$f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)+\sin(2x+4\pi)=2\sin x+\sin 2x=f(x)$$

فالتابع f تابع دوري ودوره 2π. فتكفي بدراسته على $[-\pi,\pi]$.

الشرط① أياً كان x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ من $\mathbb{R}$ (محقّق وضوحاً)

الشرط② $f(-x)=2\sin(-x)+\sin(-2x)=-2\sin x-\sin 2x=-f(x)$

ومنه f تابعٌ فردي. فتكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$.

ⓑ $f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=2(2\cos^2 x+\cos x-1)$
$=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

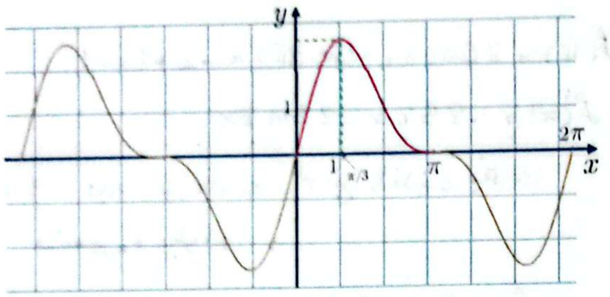
ⓒ f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to\pi}f(x)=0$ و $\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

ولدينا $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$ نجعل $f'(x)=0$

ومنه $\cos x+1=0$ أي $\cos x=-1$ ومنه $x=\pi$ أو

$2\cos x-1=0$ أي $\cos x=\frac{1}{2}$ ومنه $x=\frac{\pi}{3}$ و $f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0



[34] f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2\cos x+\cos 2x$.

ⓐ تحقّق أنّ f دوريٌّ وأنّ 2π دورٌ له. ادرس الصفة الزوجية للتابع f. استنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

ⓑ ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$.

ⓒ ارسم الخط للتابع f على $[0,\pi]$، ثمّ على المجال $[-\pi,\pi]$.

الحل:

a. $T=2\pi$

$\forall x\in R \rightarrow x+2\pi\in R$

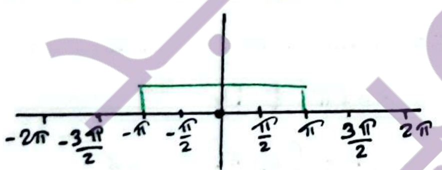
$f(x+2\pi)=2\cos(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi))$
$=2\cos x+\cos 2x=f(x)$

f دوري ودوره 2π

$\forall x\in R \rightarrow -x\in R$

$f(-x)=2\cos(-x)+\cos(-2x)=2\cos x+\cos 2x=f(x)$

f تابع زوجي وخطه البياني متناظر حول محور التراتيب



بما أن f دوري ودوره 2π يمكن دراسته على دور واحد وأفضل دور $[-\pi,\pi]$، وبما أن f زوجي يمكن دراسته على القسم الموجب $[0,\pi]$

b. $f(x) = 2\cos x + \cos 2x \qquad [0, \pi]$

$f(0) = 2\cos(0) + \cos(0) = 3$

$f(\pi) = 2\cos(\pi) + \cos(2\pi) = -2 + 1 = -1$

$f'(x) = -2\sin x - 2\sin 2x$

ملاحظة: بعد اشتقاق التوابع المثلثية يمكن أن نستخدم بقوانين:

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

ثم خلال (جداء أقواس)

$f'(x) = -2\sin x - 4\sin x \cdot \cos x$

$= -2\sin x\,(1 + 2\cos x)$

$f'(x) = 0$

$-2\sin x\,(1 + 2\cos x) = 0$

$\sin x = 0$ $\qquad$ $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$; $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \pi k$

$k=0 \longrightarrow x = 0$

$f(0) = 3$

$k=1 \longrightarrow x = \pi$

$f(\pi) = -1$

$k=2 \longrightarrow x = 2\pi \notin D_f$

لأن $D = [0, \pi]$

$1 + 2\cos x = 0$

$2\cos x = -1 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2\pi}{3} \qquad x = \frac{4\pi}{3}$ مرفوض

$f(\frac{2\pi}{3}) = 2\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3}$

$= -\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1

[35] نتأمل التابع f المعطى وفق $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$.

ⓐ ما مجموعة تعريف f؟

ⓑ أيكون f مستمرا على مجموعة تعريفه؟

ⓒ بين أن التابع f زوجي ويقبل العدد 2π دورا له.

ⓓ ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0, \pi]$. أثبت أن g اشتقاقي وارسم خطه البياني.

ⓔ استنتج الخط للتابع f على $[-\pi, \pi]$. ما مجموعة تعريف f'؟

الحل:

a. $1 - \cos x \geq 0$

$1 \geq \cos x$ $\qquad$ محقق دوماً

$D_f = \mathbb{R}$

b. f مستمر على R لأنه مركب تابعين مستمرين حيث

$x \mapsto 1 - \cos x$ مستمر على R لأنه مجموع تابعين مستمرين على R

$x \mapsto \sqrt{x}$ مستمر على $[0, +\infty[$ لأنه موجب

c. الشرط 1: $\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$ محقق دوماً

الشرط 2: $f(-x) = \sqrt{1 - \cos(-x)} = \sqrt{1 - \cos x} = f(x)$

f تابع زوجي

f تابع دوري لأن:

الشرط 1: $\forall x \in R \rightarrow x + 2\pi \in R$

الشرط 2: $f(x + 2\pi) = \sqrt{1 - \cos(x + 2\pi)} = \sqrt{1 - \cos x} = f(x)$

d. g مقصور f على $[0, \pi]$

$g(x) = \sqrt{1 - \cos x} \qquad D_g = [0, \pi]$

ندرس الاشتقاق عند 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}}}{x}=\lim\frac{\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}}}{x}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}}}{x}=\lim\frac{|\sin x|}{x\sqrt{1+\cos x}}$$

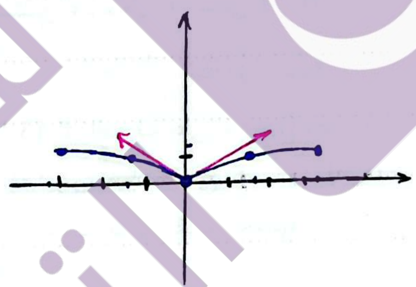
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}=(1)\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

g اشتقاقي عند 0 ، المماس مائل

أي g اشتقاقي على $[0,\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	0	1	$\sqrt{2}$

رسم g :



نلاحظ وجود نصفي مماس عند 0

وبالتالي f غير اشتقاقي عند 0

ولكن f تابع دوري فهو غير اشتقاقي عند $0+2\pi k$

أي مجال الاشتقاق هو $R\setminus\{2\pi k\}$

[36] نتأمل التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x-\cos x$.

ⓐ لماذا كل حل للمعادلة $f(x)=0$ يجب أن ينتمي إلى $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

ⓑ برهن أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α يقع في $]0,\frac{1}{2}[$.

الحل:

$f(x)=2x-\cos x \qquad D=IR$

a. $f(x)=0$

$2x-\cos x=0 \Rightarrow 2x=\cos x\in[-1,1]$

$2x\in[-1,1]\Rightarrow x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

b. $D=IR$ و f مستمر على R فهو مستمر على $]0,\frac{1}{2}[$

$f'(x)=2+\sin x>0$ شرح:

$-1\le\sin x\le 1\Rightarrow 1\le f'(x)\le 3$

f متزايد تماماً على R فهو متزايد تماماً على $]0,\frac{1}{2}[$

$0\in f(]0,\frac{1}{2}[)=]-1,1-\cos\frac{1}{2}[$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد على $]0,\frac{1}{2}[$

7. تأطير (حصر) توابع مثلثاتية

خاصة: ليكن تابعين f و g معرفين واشتقاقيين على المجال $D=[0,+\infty[$. ويحققان $f'(x)\le g'(x)$ أيا يكن x من D. فإن

$$\boxed{f(x)-f(0)\le g(x)-g(0)}$$

مثال21: أثبت أن $\sin x\le x$، أيا يكن $x\ge 0$.

الحل: $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x$ ومنه $f'(x)=\cos x$

و $g'(x)=1$ و $f'(x)=\cos x\le 1$

ومنه $\sin x\le x$ في حالة $x\ge 0$.

مثال22: برهن أنه في حالة $x\in\mathbb{R}$ أن

$$1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1$$

الحل: لدينا $\cos x\le 1$ ولنثبت $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x$ باختيار

$f(x)=\cos x$ ، و $g(x)=1-\frac{x^2}{2}$ ومنه

$f'(x)=-\sin x$ ، و $g'(x)=-x$

ولكن لدينا من السؤال السابق $\sin x\le x$ أي $-\sin x\ge -x$

أي $f'(x)\ge g'(x)$ ومنه $f(x)-f(0)\ge g(x)-g(0)$ أي

$\cos x-1\ge 1-\frac{x^2}{2}-1$ أي $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$

ولكنّ طرفي هذه المتراجحة زوجيان، إذن تتحقّق المتراجحة على $\mathbb{R}$.

مثال23: أثبت أن $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$ ، أيا يكن $x\ge 0$.

الحل: لدينا $\sin x\le x$ ولنثبت $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x$ باختيار

$f(x)=x-\frac{x^3}{6}$ و $g(x)=\sin x$ ومنه

$f'(x)=1-\frac{x^2}{2}$ ، و $g'(x)=\cos x$ ولكن لدينا من السؤال السابق

$1-\frac{x^2}{2}\le\cos x$ ومنه $g(x)-g(0)\le f(x)-f(0)$ أي

$x-\frac{x^3}{6}\le\sin x$ في حالة $x\ge 0$.

مثال24: لدينا أن $1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ، أيا يكن $x\in\mathbb{R}$.

ⓐ بين أن $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ ، أيا يكن $x\ge 0$.

ⓑ استنتج نهاية $\frac{x-\sin x}{x^3}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

الحل: ⓐ لدينا من السؤال السابق $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x$

ولنثبت $\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ باختيار $f(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$

و $g(x)=\sin x$ ومنه $f'(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ، و $g'(x)=\cos x$

ولكن لدينا $\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ومنه

$g(x)-g(0)\le f(x)-f(0)$ أي $\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ في حالة $x\ge 0$.

ⓑ في حالة $x>0$ نجد $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ أن

$$-\frac{x^3}{6}\le\sin x-x\le-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

$$\frac{x^3}{6}\ge-\sin x+x\ge\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}\le\frac{x-\sin x}{x^3}\le\frac{1}{6}$$

وبتطبيق هذه المتراجحة على $-x$ في حالة $x>0$ نستنتج أنها تبقى صحيحة في حالة $x<0$ أيضاً. إذن مهما تكن $x\ne 0$ فلدينا $\frac{1}{6}-\frac{x^2}{120}\le\frac{x-\sin x}{x^3}\le\frac{1}{6}$. وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة، نستنتج عند جعل x تسعى إلى 0 أن $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$.

تمارين على الاشتقاق

[37] f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق $f(x)=x+\sqrt{x-1}-4$.

ⓐ ادرس تغيرات التابع f. أثبت أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

ⓑ احسب جبريا القيمة الحقيقية لذلك الجذر.

الحل:

a. $f(1)=-3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

f اشتقاقي على $]1,+\infty[$

$f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}>0$

f متزايد تماماً

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

f مستمر ومتزايد تماماً على $[1,+\infty[$

$0\in f([1,+\infty[)=[-3,+\infty[$

المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في $[1,+\infty[$

b. $f(x)=0$

$x+\sqrt{x-1}-4=0$

تذكرة: لحل معادلة جذرية:
1. نعزل الجذر بطرف
2. نأخذ شرط الطرف الثاني موجب
3. نربع الطرفين ثم نوجد قيمة x

$\sqrt{x-1} = 4-x$

$4-x \geq 0 \rightarrow 4 \geq x$

$x \in]-\infty, 4]$

نربع الطرفين

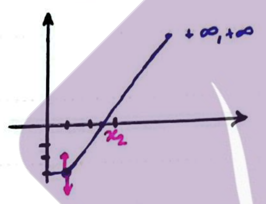
$x-1 = (4-x)^2 \Rightarrow x-1 = 16-8x+x^2$

$0 = x^2-9x+17$

$\Delta = b^2-4ac = 13$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+\sqrt{13}}{2}$ مرفوض $\quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9-\sqrt{13}}{2}$ مقبول

ارسم الخط البياني لـ f Add



تقاطع مع ox

$f(x) = 0$

$x_2 = \frac{9-\sqrt{13}}{2}$

[38] f المعرف على $I =]1,+\infty[$ وفق $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

ⓐ ادرس تغيرات f على I.

ⓑ استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذرا وحيدا α يقع في $]1,2[$.

ⓒ احصر الحل في مجال طوله لا يتجاوز 0.5.

الحل:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{0^+} - 1 = +\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي

$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$

x	1		∞
$f'(x)$			
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

b. f مستمر على $]1,+\infty[$

f متناقص تماما على $]1,+\infty[$

$0 \in f(]1,\infty[) =]-\infty,+\infty[$

1 — 2 — ∞

$0 \in f(]1,2[) =]1-\sqrt{2}, +\infty[$

اي الحل يقع في المجال $]1,2[$

1 — $\frac{3}{2}$ — 2

منتصف المجال $\quad \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

c. $0 \notin f(]1,\frac{3}{2}[) =]2-\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty[$

اي الحل يقع في المجال $]\frac{3}{2}, 2[$

[39] f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$

ⓐ أثبت أن d الذي معادلته $y = 2x-1$ مقاربٌ مائل للخط C.

ⓑ ادرس نهاية f عند -1. ماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط C؟

ⓒ ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها. ارسم مقاربات C ثم ارسم C.

الحل:

a. $f(x) - y_d = \frac{2x^2+x+7}{x+1} - \frac{(2x-1)(x+1)}{1(x+1)}$

$= \frac{2x^2+x+7-2x^2-2x+x+1}{x+1} = \frac{8}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - y_d = 0$

d مقارب مائل عند $\mp\infty$

b. $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$

-1: $-\ 0\ +$ $\quad (-1)^+$

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$

لا يوجد نهاية عند -1 ، $x=-1$ مقارب شاقولي

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{(4x+1)(x+1) - 1(2x^2+x+7)}{(x+1)^2}$

$= \frac{4x^2+4x+x+1-2x^2-x-7}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-6}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0$

$2x^2 + 4x - 6 = 0$

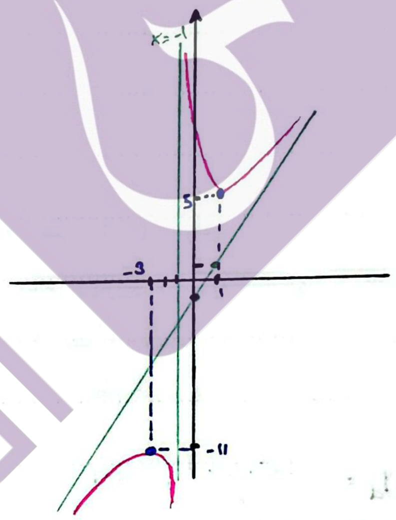
$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0$

اما $x = -3$ $\quad f(-3) = -11$

او $x = 1$ $\quad f(1) = 5$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$



$y = 2x - 1$

x	0	1
y	-1	1

[40] f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها، ويحقق $f(0) = 0$ و $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ عند كل x من $\mathbb{R}$.

ⓐ ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = f(x) + f(-x)$.
تحقق أن g اشتقاقي على $\mathbb{R}$. واحسب $g'(x)$.

ⓑ احسب $g(0)$ واستنتج أن التابع f فردي.

الحل:

a. $g(x) = f(x) + f(-x)$

g اشتقاقي على R لانه مجموع تابعين اشتقاقيين على R

$g'(x) = f'(x) - f'(-x)$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$

$g'(x) = 0$

g تابع ثابت

b. $g(0) = f(0) + f(0) = 0 + 0 = 0$

$g(x) = g(0) = 0$

$g(x) = 0$

f تابع فردي

$\forall x \in R \rightarrow -x \in R$

$g(x) = f(x) + f(-x)$

$0 = f(x) + f(-x)$

$f(-x) = -f(x)$

f تابع فردي

تمارين عامة محلولة

[41] f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x^3-3x^2-1$

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ واحسب $f'(x)$ وادرس إشارته، ثم نظم جدولا بتغيرات f.

② أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل جذرا واحدا فقط. وإذا رمزنا إلى هذا الجذر بالرمز α، أثبت أن α ينتمي إلى المجال $]1.6,1.7[$.

الحل: ① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$ ومنه

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

② من جدول التغيرات $0\notin f(]-\infty,0[)=]-\infty,1[$

وأيضا $0\notin f(]0,1[)=]-2,1[$ فليس للمعادلة $f(x)=0$ حلول في $]-\infty,1[$.

أما على المجال $[1,+\infty[$ فالتابع مستمر ومتزايد تماما و $0\in f([1+\infty[)=[-2,+\infty[$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في $[1,+\infty[$. ومنه للمعادلة حل وحيد في $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1.6)=-0.488<0 \\ f(1.7)=0.156>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1.6)f(1.7)<0$$

ومنه $\alpha\in]1.6,1.7[$.

[42] C الخط للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$.

① أعط معادلة لمماس C في النقطة التي تساوي فاصلتها 1.

② هل يقبل C مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=-\dfrac{1}{4}x$؟

③ هل يقبل C مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $4x-y=0$؟

الحل: ① معادلة المماس للخط C في النقطة التي تساوي فاصلتها هي

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

نوجد المشتق $f'(x)=\dfrac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$. نعوض $f(1)=\frac{1}{3}$ و $f'(1)=\frac{1}{9}$

ومنه معادلة المماس عند 1 هي $y=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}(x-1)$ أي

$y=\frac{1}{9}(x+2)$.

② لدينا C مماس موازي للمستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{4}x$ بالتالي ميل المماس $-\frac{1}{4}$ ومنه $f'(x)=-\frac{1}{4}$ أي $x^4+12=0$ وهي معادلة مستحيلة الحل. وبالتالي لا يوجد مماس.

③ لدينا C مماس موازي للمستقيم الذي معادلته $y=4x$ بالتالي ميل المماس 4 ومنه $f'(x)=4$ أي $4x^4+17x^2+14=0$

وهي معادلة مستحيلة الحل $\Delta<0$. وبالتالي لا يوجد مماس.

[43] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$.

① تحقق أن $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$، أيا يكن x من $\mathbb{R}$.

② استنتج $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$، حيث x من $\mathbb{R}$.

الحل: ① $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ومنه

$$\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=\sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=x+\sqrt{1+x^2}=f(x)$$

② باشتقاق طرفي العلاقة $\sqrt{1+x^2}\cdot f'(x)=f(x)$ نجد

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x)+\sqrt{1+x^2}f''(x)=f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}f(x)$$

بضرب الطرفين بالمقدار $\sqrt{1+x^2}$ نجد

$$x\cdot f'(x)+\left(1+x^2\right)f''(x)=f(x)$$

[44] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

① عين التابع المشتق f' للتابع f.

② g التابع المعرف على $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ وفق $g(x)=f(\sin x)$.

أثبت أن g اشتقاقي على I ثم احسب $g'(x)$.

③ h التابع المعرف على $J=]1,+\infty[$ وفق $h(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$.

أثبت أن h اشتقاقي على J ثم احسب $h'(x)$ على J.

الحل: ① $f'(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{-5}{(x-1)^2}$ على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

② $x\mapsto\sin x$ اشتقاقي على $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ولا يأخذ القيمة 1 و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ إذن $x\mapsto g(x)=f(\sin x)$ اشتقاقي على I و $g'(x)=f'(\sin x)\cos x=\dfrac{-5\cos x}{(\sin x-1)^2}$.

③ $x\mapsto\sqrt{x}$ اشتقاقي على $J=]1,+\infty[$ ولا يأخذ القيمة 1 و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ إذن $x\mapsto h(x)=f(\sqrt{x})$ اشتقاقي على J

و $h'(x)=f'(\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{-5}{2(\sqrt{x}-1)^2\sqrt{x}}$.

[45] أوجد عدد حلول المعادلة، ثم احسب قيمة تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}.

① $x^4-\dfrac{1}{2}x+1=0$ ② $\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{3}x^3+1=0$

الحل: ① التابع $x\mapsto f(x)=x^4-\dfrac{1}{2}x+1$ له جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{13}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات ليس للمعادلة $f(x)=0$ حلول في $\mathbb{R}$.

② $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1$ حيث $D=\mathbb{R}$ و f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5}x^5=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{5}x^5=-\infty$

$f'(x)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$ نجعل $f'(x)=0$

أي $x^2(x^2-1)=0$ ومنه $x=0,x=1,x=-1$

و $f(0)=0,\quad f(1)=\frac{13}{15},\quad f(-1)=\frac{17}{15}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{15}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{13}{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول التغيرات للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في $\mathbb{R}$ وهذا ينتمي إلى المجال $]-\infty,-1[$ وعلاوة على ذلك $f(-1)=\frac{17}{15}$ و $f(-2)=-\frac{41}{15}$. إذن $-2<\alpha<-1$. وبالتجريب نجد $f(-1.6)>0$ و $f(-1.7)<0$ نجد أن $-1.7<\alpha<-1.6$.

[46] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ وفق $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

① أثبت أن f متزايد تماما على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$. ثم نظم جدولا بتغيرات f على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$.

② أثبت أن للمعادلة $f(x)=10$ حلا وحيدا في المجال $]-\frac{3}{2},-1[$.

الحل: ① $f'(x)=\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ ومنه $f'(x)>0$ على المجال $]-\frac{3}{2},-1[$ فالتابع f متزايد تماما.

$\lim_{x\to-\frac{3}{2}} f(x)=\frac{27}{4}$ و $\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$

x	$-\frac{3}{2}$		-1
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

② التابع f مستمر ومتزايد تماما على $]-\frac{3}{2},-1[$. $10\in f\left(]-\frac{3}{2},-1[\right)=]\frac{27}{4},+\infty[$. ومنه أن للمعادلة $f(x)=10$ حلا وحيدا في المجال $]-\frac{3}{2},-1[$.

[47] M هي النقطة التي إحداثياتها $(m,0)$ حيث $0\le m\le 3$، و N هي النقطة التي إحداثياتها $(0,n)$ حيث $n\ge 0$، النقطتان M و N تحققان $MN=3$. وأخيرا J هي نقطة من القطعة المستقيمة $[MN]$ تحقق $MJ=2$. نهدف إلى تعيين المحل الهندسي Λ للنقطة J عندما تتحول m في المجال $[0,3]$، ورسمه.

الحل: ① من تعريف J نجد $\overrightarrow{MJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$

أي $3\overrightarrow{MJ}=2\overrightarrow{MN}$ أو $3\overrightarrow{MO}+3\overrightarrow{OJ}=2\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{ON}$

ومنه $3\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$

② من $MN=3$ لدينا $m^2+n^2=9$

ولكن $n\ge 0$ وبالتالي $n=\sqrt{9-m^2}$.

نعوض في العلاقة الشعاعية السابقة

$$3\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}$$

$$3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}$$

فيكون $3x=m$ و $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-m^2}$. أي

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{9-(3x)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{9-9x^2}=2\sqrt{1-x^2}$$

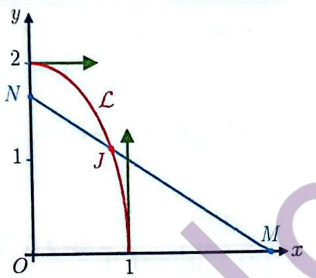
① من الفرض لدينا

$$m\in[0,3]$$
$$3x\in[0,3]$$
$$x\in[0,1]$$

② المحل الهندسي L هو C للتابع $f(x)=2\sqrt{1-x^2}$ على $[0,1]$

③

x	0		1
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0



فالتابع f متناقص تماما على المجال $[0,1]$

دراسة قابلية اشتقاق f عند 1. في حالة $0<x<1$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(-2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)=-\infty$$

f غير اشتقاقي عند 1 والخط للتابع f يقبل مماسا شاقوليا عند 1.

[48] E مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق $x^2-2x+4y^2=3$

أثبت أن المجموعة E هي اجتماع خطين بيانيين C_1 و C_2 لتابعين f_1 و f_2 ومن ثم رسم E.

الحل: $x^2-2x+4y^2=3$ تكافئ $y^2=\frac{1}{4}\left(3+2x-x^2\right)$.

ولكن $3+2x-x^2=(3-x)(1+x)$ لذلك قيم x التي تجعل $3+2x-x^2\ge 0$ هي $[-1,3]$.

ومنه تنتمي $M(x,y)$ إلى E إذا وفقط إذا كانت M من C_1 أو إلى C_2 حيث C_1 و C_2 هما الخطان للتابعين:

$f_1:[-1,3]\to\mathbb{R}, f_1(x)=\frac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$ و

$f_2:[-1,3]\to\mathbb{R}, f_2(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$

$x\mapsto 3+2x-x^2$ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $]-1,3[$

$x\mapsto\sqrt{x}$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f_1'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}$$

قابلية الاشتقاق عند -1. في حالة $-1<x<3$ يكون $1+x>0$:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f_1(x)-f_1(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}\right)=+\infty$$

فالتابع f_1 غير اشتقاقي عند -1 ولكن f_1 مستمر عند -1 فلخطه C_1 مماس شاقولي عند -1.

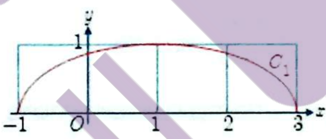
قابلية الاشتقاق عند 3 . هنا في حالة $-1<x<3$:

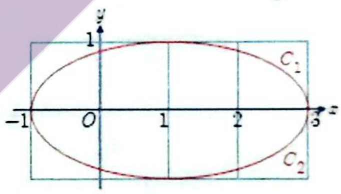
$$\lim_{x\to 3}\frac{f_1(x)-f_1(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{3-x}}\right)=-\infty$$

فالتابع f_1 غير اشتقاقي عند 3 ولكن f_1 مستمر عند 3 فلخطه C_1 مماس شاقولي عند 3. وجدول التغيرات للتابع f_1.

x	-1		1		3
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	↗	1	↘	0

نلاحظ $f_2(x)=-f_1(x)$ الخط البياني C_2 هو صورة C_1 وفق التناظر المحوري بالنسبة إلى محور الفواصل ومنه نجد الرسم البياني للمجموعة **E** التي نسميها قطعا ناقصا.





[49] أثبت صحة المتراجحة $2\sin x+\tan x\geq 3x$ أيا يكن x من المجال $I=[0,\frac{\pi}{2}[$.

الحل: في حالة x من $I=[0,\frac{\pi}{2}[$ لدينا

$$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$$

المقام موجب فإشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $2\cos^3 x-3\cos^2 x+1$.

نفرض $2\cos^3 x-3\cos^2 x+1=P(x)$

نضع $t=\cos x\in]0,1]$ فيكون $P(t)=2t^3-3t^2+1$

ولدينا $P'(t)=6t(t-1)$ ومنه $P'(t)\leq 0$ على المجال $]0,1]$

فالتابع $t\mapsto P(t)$ متناقص تماما على المجال $]0,1]$

ولكن $P(1)=0$ ومنه $P(t)\geq 0$ على $]0,1]$ ومنه $f'(x)\geq 0$ على I

فالتابع f تابع متزايد على I .

ولكن $f(0)=0$ إذن $f(x)\geq 0$ في حالة x من $I=[0,\frac{\pi}{2}[$.

[50] ليكن f تابعا مستمرا ومعرفا على المجال $I=[0,1]$ ويحقق $f(x)\in I$ ، أيا يكن x من I . نرمز بالرمز k إلى التابع المعرف على I وفق $k(x)=f(x)-x$. بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k ، أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a)=a$.

الحل: التابع k تابع مستمر على المجال I

ولدينا من الفرض $f(x)\in[0,1]$ أي $f(0)\geq 0$ و $f(1)\leq 1$ ومنه

$$\left.\begin{matrix}k(0)=f(0)\geq 0\\ k(1)=f(1)-1\leq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 0\in[k(1),k(0)]$$

ومنه يوجد a من I يحقق $k(a)=0$ أي $f(a)=a$.

[51] ليكن m عددا حقيقيا، وليكن التابع f_m المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f_m(x)=x^3+mx^2-8x-m$$

① a أثبت أن الخطين البيانيين C_0 و C_1 يتقاطعان في نقطتين A و B . أوجد إحداثيات هاتين النقطتين.

b استنتج أن جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين A و B .

② أوجد نهاية f_m عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

③ استنتج مما سبق أن للمعادلة $f_m(x)=0$ ثلاثة حلول متمايزة في $\mathbb{R}$ ، أيا يكن العدد m .

الحل: ① a (α,β) نقطة مشتركة بين C_0 و C_1 ومنه $f_0(\alpha)=\beta$

و $f_1(\alpha)=\beta$ أي $\alpha^3+\alpha^2-8\alpha-1=\beta$ ، $\alpha^3-8\alpha=\beta$ ،

بالطرح نجد $\alpha^2=1$ أي $\alpha=\pm 1$ وبالتعويض نجد $\beta=\pm 7$.

ومنه $(\alpha,\beta)=(1,-7)$ أو $(\alpha,\beta)=(-1,7)$

ومنه يتقاطع C_0 و C_1 في النقطتين $A(1,-7)$ و $B(-1,7)$.

b $f_m(1)=-7$ ومنه $A\in C_m$ و $f_m(-1)=7$ ومنه $B\in C_m$.

أي تمر جميع الخطوط البيانية C_m بالنقطتين A و B .

② $\lim_{x\to\infty} f_m(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=-\infty$

③ f_m كثير حدود من الدرجة الثالثة فللمعادلة $f_m(x)=0$ على الأكثر ثلاثة حلول. وهو مستمر على $\mathbb{R}$.

- لدينا $f_m(-1)=7$ و $\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=-\infty$ فللمعادلة $f_m(x)=0$ حل x_1 ينتمي إلى $]-\infty,-1[$.
- لدينا $f_m(-1)=7$ و $f_m(1)=-7$ فللمعادلة $f_m(x)=0$ حل x_2 ينتمي إلى $]-1,1[$.
- لدينا $f_m(1)=-7$ و $\lim_{x\to+\infty} f_m(x)=\infty$ فللمعادلة $f_m(x)=0$ حل x_3 ينتمي إلى $]1,+\infty[$.

فللمعادلة $f_m(x)=0$ ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$.

[52] f هو تابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها. نفترض أن:

- ▫ $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.
- ▫ f' متزايد على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقص على $]-\infty,0]$.

ارسم خطا بيانيا C يمكن أن يمثل التابع f .

الحل: التابع متزايد على $[0,+\infty[$ ومتناقص على $]-\infty,0]$

ويأخذ القيمة 1 عند الصفر. أي تابع من الشكل $x \mapsto x^2+1$.

ولكن f ينعدم عند الصفر. أي $f : x \mapsto x^3+x$.

[53] أوجد عدد حلول المعادلة، ثم احسب قيمة تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}.

① $x^4-\frac{1}{2}x+1=0$ ② $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1=0$

الحل: ① التابع $x \mapsto f(x)=x^4-\frac{1}{2}x+1$ له جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{13}{16}$	↗	$+\infty$

من جدول التغيرات ليس للمعادلة $f(x)=0$ حلول في $\mathbb{R}$.

② $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1$ حيث $D=\mathbb{R}$ و f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{5}x^5=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{5}x^5=-\infty$

$f'(x)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$ نجعل $f'(x)=0$

أي $x^2(x^2-1)=0$ ومنه $x=0, x=1, x=-1$

و $f(0)=0,\quad f(1)=\frac{13}{15},\quad f(-1)=\frac{17}{15}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{17}{15}$	↘	0	↘	$\frac{13}{15}$	↗	$+\infty$

من جدول التغيرات للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في $\mathbb{R}$ وهذا ينتمي إلى المجال $]-\infty,-1[$ وعلاوة على ذلك $f(-1)=\frac{17}{15}$ و $f(-2)=-\frac{41}{15}$. إذن $-2<\alpha<-1$. وبالتجريب نجد $f(-1.6)>0$ و $f(-1.7)<0$ نجد أن $-1.7<\alpha<-1.6$.

[54] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$

① ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني C.

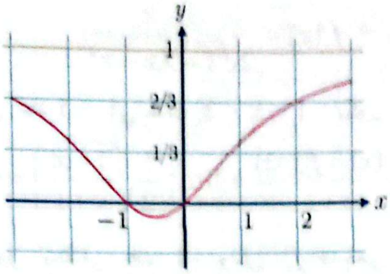
② عين المماسات للخط C المارة بالمبدأ، (غير المماس في المبدأ.)

③ ليكن a عددا حقيقيا. اكتب معادلة للمماس T_a الذي يمس C في النقطة $A(a,f(a))$. فكر في أن يكون T_a أحد المماسات المطلوبة عندما يمر بالمبدأ. ثم جد معادلة لكل مماس للخط يمر بالمبدأ.

الحل: ① $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ فالمستقيم $y=1$ مستقيم مقارب في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

$f(x)=1-\frac{3}{x^2+x+3}$ ومنه $f'(x)=\frac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\frac{1}{11}$	↗	1



② معادلة T_a هي $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ أي

$$y=\frac{a^2+a}{a^2+a+3}+\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(x-a)$$

$$=\frac{a^2+a}{a^2+a+3}+\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x-\frac{3(2a+1)a}{(a^2+a+3)^2}$$

$$=\frac{a^2(a^2+2a-2)}{(a^2+a+3)^2}+\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$$

③ يمر T_a من المبدأ إذا كانت النقطة $(0,0)$ تحقق معادلته أي $\frac{a^2(a^2+2a-2)}{(a^2+a+3)^2}=0$ أي $a^2(a^2+2a-2)=0$.

إما $a=0$ مرفوض لأن المماس T_0 يمر في المبدأ.

أو $a=-1-\sqrt{3}$ أو $a=-1+\sqrt{3}$.

في حالة $a=-1+\sqrt{3}$

$$y=\frac{a^2(a^2+2a-2)}{(a^2+a+3)^2}+\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$$

ولكن المماس يمر من المبدأ

$$y=\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$$

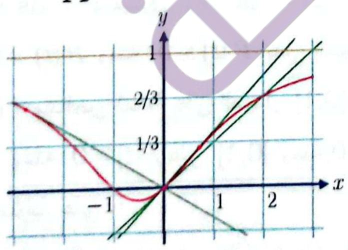
$$y=\frac{3(2(\sqrt{3}-1)+1)}{((\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}-1)+3)^2}x$$

$$y=\frac{1+2\sqrt{3}}{11}x$$

وفي حالة $a=-1-\sqrt{3}$ يكون $y=\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$

$$y=\frac{3(2(-\sqrt{3}-1)+1)}{((-\sqrt{3}-1)^2+(-\sqrt{3}-1)+3)^2}x$$

$$y=\frac{1-2\sqrt{3}}{11}x$$



[55] f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق: $f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها.

② أثبت أن d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط C.

③ ادرس الوضع النسبي للخطين d و C، ثم ارسم d و C.

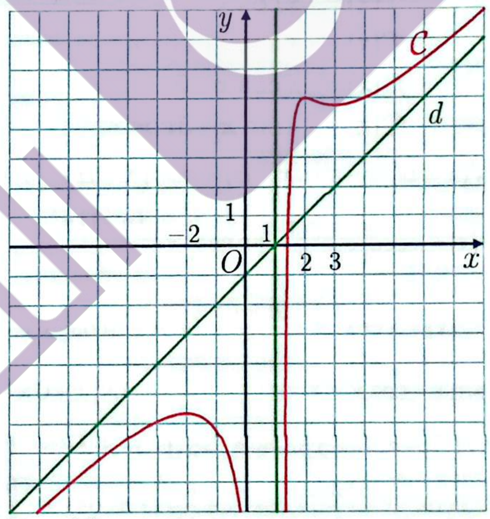
④ حدد هندسيا عدد حلول المعادلة

$x^3 - (m+3)x^2 + (2m+10)x - 11 - m = 0$.

الحل: ① نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. وكذلك نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. فنستنتج أن المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وبالاستفادة من الصيغة $f(x) = x - 1 + \dfrac{7x-10}{(x-1)^2}$ أو بحساب مباشر نجد

$$f'(x) = 1 + \frac{-7x+13}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{17}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	5	↘	$\frac{19}{4}$	↗	$+\infty$



② $g(x) = f(x) - (x-1)$ فنلاحظ أن $g(x) = \dfrac{7x-10}{(x-1)^2}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ ، $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط C.

③ ونستنتج مما سبق أن C و d يتقاطعان في النقطة $(\frac{10}{7}, \frac{3}{7})$ ويكون C تحت d على $]-\infty, \frac{10}{7}[$ وفوق d على $]\frac{10}{7}, +\infty[$.

④ $x^3 - 3x^2 + 10x - 11 - m(x^2 - 2x + 1) = 0$.

أي $x^3 - 3x^2 + 10x - 11 = m(x-1)^2$

نقسم طرفي المعادلة على $(x-1)^2$ فنجد

$\dfrac{x^3 - 3x^2 + 10x - 11}{(x-1)^2} = m$ ومنه $f(x) = m$.

في حالة $m \in \{-\frac{17}{3}, \frac{19}{4}, 5\}$ للمعادلة $f(x) = m$ حلان.

- عند $-\frac{17}{3} < m < \frac{19}{4}$ أو $m > 5$ للمعادلة $f(x) = m$ حل واحد.
- عند $\frac{19}{4} < m < 5$ أو $m < -\frac{17}{3}$ للمعادلة $f(x) = m$ ثلاثة حلول.

[56] ليكن f المعرف وفق $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$.

① قارن كلا من $f(-x)$ و $f(x+2\pi)$ مع $f(x)$. استنتج أنه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$.

② أثبت أن $f'(x) = 6\cos x \times \sin x(1 - 2\cos x)$.

③ ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$. ارسم C على $[-2\pi, 2\pi]$.

الحل: ① نلاحظ أن

$$f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$$
$$f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$
$$f(x+2\pi) = 3\sin^2(2\pi + x) + 4\cos^3(2\pi + x)$$
$$= 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$

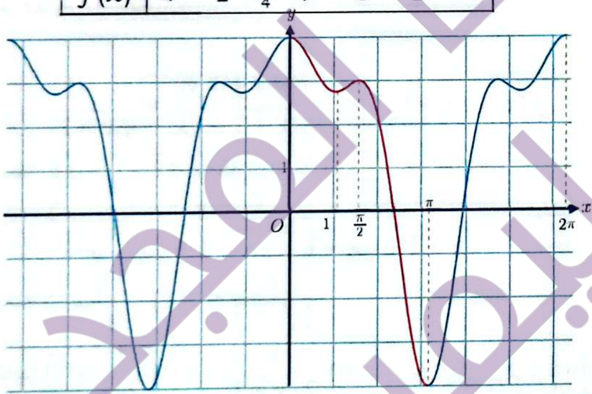
فالتابع f دوري ودوره 2π. إذن تكفي دراسة f على مجال طوله دور واحد وليكن $[-\pi,\pi]$. ولأن التابع زوجي فلدراسته على $[-\pi,\pi]$ تكفي دراسته على $[0,\pi]$.

② $$f'(x) = 6\sin x\cos x - 12\cos^2 x \sin x$$
$$= 6\sin x \cdot \cos x \cdot (1 - 2\cos x)$$

③ على $]0,\pi[$ ينعدم $f'(x)$ عند

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2},\quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	↘	$\frac{11}{4}$	↗	3	↘	-4



[57] ليكن f المعرف وفق $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$.

① أثبت أن $f(x+2\pi) = f(x)$، أيا يكن العدد الحقيقي x.

② تحقق أن $f'(x) = 3\sin x(2\sin 2x - 1)$.

③ ادرس f على مجال طوله 2π، وارسمه على $[-2\pi, 2\pi]$.

الحل: ① لأن كل من $\sin$ و $\cos$ تابع دوري ودوره 2π.

② $$f'(x) = 12\sin^2 x \cdot \cos x - 3\sin x$$
$$= 3\sin x \cdot (4\sin x\cos x - 1) = 3\sin x(2\sin 2x - 1)$$

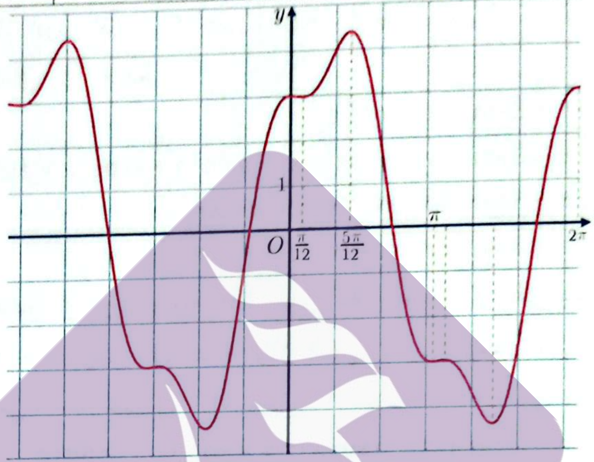
③ على $]0,2\pi[$ ينعدم $f'(x)$ عند

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi$$

$$2\sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = \tfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = \tfrac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\Rightarrow x = \tfrac{\pi}{12} + \pi k \Rightarrow x = \tfrac{\pi}{12}, x = \tfrac{5\pi}{12}, x = \tfrac{13\pi}{12}, x = \tfrac{17\pi}{12}$$

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	3



[58] يكن f المعرف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$.

a) تحقق أن $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$ أيا يكن $x \ge 0$.

b) استنتج أن $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \le f(x) \le \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ في حالة $x>0$.

c) ما نهاية f عند $+\infty$؟

الحل:

a) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

b) لدينا $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}$ أيا كان $x>0$ كان :

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}} \le \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$$

ومنه : $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \le f(x) \le \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

[59] f المعرف على $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x)=4x-\tan^2 x$.

① احسب $f'(x)$ وتحقق $\tan x = t$: $f'(x)=2(1-t)(t^2+t+2)$

② استنتج جدولا بتغيرات f على المجال I .

③ أثبت أن للمعادلة $f(x)=-1$ ، في المجال I جذرا وحيدا α .

الحل: ①

$$f'(x)=4-2\tan x\cdot(\tan^2 x+1)$$
$$=-2t^3-2t+4=2(1-t)(t^2+t+2)$$

② t^2+t+2 موجب في حالة $t \ge 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $1-t=1-\tan x$ الذي ينعدم على $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ عند $x=\frac{\pi}{4}$.

نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to(\pi/2)} \tan x=+\infty$

ومنه $x=\frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\pi-1$	$\searrow$	$-\infty \Vert$

③ $-1 \notin f\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)=[0,\pi-1]$ ليس للمعادلة $f(x)=-1$ حل في $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد على المجال $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

لأن f مستمر ومتناقص تماما على $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

و $-1 \in f\left(\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]-\infty,\pi-1\right[$.

فللمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد α في المجال I .

[60] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x\cos x$.

① احسب عند كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$.

② أثبت $f^{(n)}(x)=x\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left(x+(n-1)\times\dfrac{\pi}{2}\right)$

الحل: ① هنا لدينا

$$f(x)=\ \ x\cos x$$
$$f'(x)=-x\sin x+\cos x$$
$$f''(x)=-x\cos x-2\sin x$$
$$f'''(x)=\ \ x\sin x-3\cos x$$

② لدينا $\cos'(x+a)=-\sin(x+a)=\cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$.

$$E(n)\to f^{(n)}(x)=x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$E(n)\to f^{(n+1)}(x)=x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)+(n+1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=-x\sin x+\cos x=x\cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)+1\times\cos\left(x+0\times\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$E(1)$ محققة نفرض $E(n)$ صحيحة ولنثبت صحة $E(n+1)$.

$$f^{(n+1)}(x)=x\cos'\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos'\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

$$=x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)+(n+1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

أي إن $E(n+1)$ صحيحة. ومنه صحة الخاصة $E(n)$

[61] f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$.

① أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$.

② استنتج عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \ge 1$ و x من $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

الحل: ① لدينا $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{2x}{x^2-1}$ وبتوحيد المقامات

$$\frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x}{x^2-1}$$

$$\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}$$

ومنه $a+b=2$ و $a-b=0$

أي $a=b=1$ ومنه

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$$

② نثبت بالاستقراء $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ ومنه

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad \text{و} \quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

[62] نفترض وجود تابع f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها، ويحقق $f(0)=0$ و $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

① a ليكن g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=f(x)+f(-x)$.

تحقق أن g اشتقاقي على $\mathbb{R}$. واحسب $g'(x)$.

b احسب $g(0)$ واستنتج أن التابع f فردي.

② a h معرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $h(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

تحقق أن h اشتقاقي على I، واحسب $h'(x)$ على I.

b أثبت أن $h(x)=2f(1)$، أيا يكن x من I.

c استنتج أن نهاية f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$. ماذا تستنتج؟

③ a k معرف على $J=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $k(x)=f(\tan x)-x$.

احسب $k'(x)$. ماذا تستنتج بشأن التابع k؟

b احسب $f(1)$. ونظم جدولا بتغيرات f على $\mathbb{R}$.

c ارسم المستقيمات المقاربة للخط البياني C وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها $1-$ و 0 و 1، ثم ارسم C

الحل: ① a لدينا f اشتقاقيا على $\mathbb{R}$ وبالتالي $g: x\mapsto f(x)+f(-x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

ولدينا $g'(x)=f'(x)-f'(-x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(-x)^2}=0$

b التابع g تابع ثابت ولدينا $g(0)=2f(0)=0$ إذن $g=0$ على $\mathbb{R}$. ومنه التابع f تابع فردي.

② a f اشتقاقيا على $\mathbb{R}$ و $x\mapsto\frac{1}{x}$ اشتقاقي على $I=]0,+\infty[$

وبالتالي $h: x\mapsto f(x)+f(1/x)$ اشتقاقي على I

ولدينا $h'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x^{-2}}=0$

b أن h تابع ثابت على I ولأن $h(1)=2f(1)$

وبالتالي $h(x)=2f(1)$ أيا كانت قيمة x من I.

c لدينا $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ وبالتالي $\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)=0$

في حالة $x>0$ لدينا $f(x)=2f(1)-f\left(\frac{1}{x}\right)$

وبالتالي $\lim_{x\to\infty}f(x)=2f(1)-0=2f(1)$.

إذن يقبل الخط للتابع f مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=2f(1)$.

③ a في حالة x من J لدينا

$$k'(x)=f'(\tan x)\left(1+\tan^2 x\right)-1=\frac{1}{1+\tan^2 x}\left(1+\tan^2 x\right)-1=0$$

إذن التابع k تابع ثابت على J ولكن $k(0)=f(0)-0=0$

إذن $f(\tan x)=x$ على J.

b باختيار $x=\frac{\pi}{4}$ نجد $f(1)=\frac{\pi}{4}$. وبالاستفادة من كون f فرديا:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

c معادلة المماس في $(1,\frac{\pi}{4})$ هي $y=\frac{\pi-2}{4}+\frac{1}{2}x$. ومنه الرسم الآتي: