التابع الأسي

1. التابع الأسي النيبري:

- هو تابع يحول المجموع إلى جداء ونرمز له e حيث
  $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[: f(x) = e^x$
- هو تابع متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}$

قيم تقريبية: $e = 2.7 \; , e^2 = 7.4$

[1] في الحالات الآتية عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

(1) $e^x + 1$ (2) $\frac{1}{e^x - 1}$ (3) $\ln(e^x + 2)$ (4) $\frac{1}{e^x + 3}$

الحل:

1. $e^x + 1$

$x \in R$

2. $\frac{1}{e^x - 1}$

$e^x - 1 \neq 0 \rightarrow e^x \neq 1 \rightarrow x \neq 0$

$x \in R \setminus \{0\}$

3. $\ln(e^x + 2)$

$e^x + 2 > 0$

مستحيلة الحل محققة دوماً

$x \in R$

4. $\frac{1}{e^x + 3}$

$e^x + 3 \neq 0 \qquad e^x \neq -3$

مستحيلة الحل محققة دوماً

$x \in R$

$\boxed{Add}$ $\frac{1}{e^x - 3}$

$e^x - 3 \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 3 \Rightarrow x \neq \ln 3$

$x \in R \setminus \{\ln 3\}$

2. خواص التابع الأسي:

$e^a e^b = e^{a+b} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad (e^a)^b = e^{a \times b}$

$e^0 = 1, e^x > 0 \qquad \ln e^x = x \qquad e^{\ln x} = x$

مثال1: بسّط كلاً من العبارات الآتية، علماً أن x عدد حقيقي.

- $A = e^{2+\ln 8} = e^2 \times e^{\ln 8} = e^2 \times 8 = 8e^2$.
- $B = \frac{e^2}{e^{1+\ln 2}} = \frac{e^2}{e^{\ln 2} \times e^1} = \frac{e^2}{2e} = \frac{e}{2}$.
- $C = e^{2x} \cdot e^{-3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$.

[2] بسّط كتابة الأعداد الآتية:

ⓐ $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$ ⓑ $B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$

ⓒ $C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$ ⓓ $D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$

الحل:

a. $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$

$2 + 3 = 5$

b. $B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$

$e^{\ln(16)^{\frac{1}{2}}} + e^{\ln 3} \Rightarrow = \sqrt{16} + 3 = 4 + 3 = 7$

c. $C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$

$-3 + 5 = 2$

d. $D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$

$= e^{\ln(\frac{3}{2})^{-1}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$

$= (\frac{3}{2})^{-1} + \frac{1}{3}$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

[3] اكتب بأبسط ما يمكن، مبيّناً المجموعة التي تكون معرّفة عليها:

ⓐ $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$ ⓑ $B = e^{\ln(x-1) - \ln x} + \frac{1}{x}$

الحل:

a. $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$

$x > 0 \qquad 2e^x > 0$

$]0, +\infty[$ محققة دوماً

$x \in]0, +\infty[$

$A = x - (\ln 2 + \ln e^x)$

$= x - \ln 2 - x \qquad = -\ln 2$

b. $B = e^{\ln(x-1) - \ln x} + \frac{1}{x}$

$x - 1 > 0 \qquad x > 0 \qquad x \neq 0$

$x > 1 \qquad]0, +\infty[$

$]1, +\infty[$

$\rightarrow x \in]1, +\infty[$

$B = \frac{e^{\ln(x-1)}}{e^{\ln x}} + \frac{1}{x}$ ط2 $\qquad B = e^{\ln(\frac{x-1}{x})} + \frac{1}{x}$ ط1

$\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} \qquad = \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x}$

$= 1 \qquad = 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[4] في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y

ⓐ $x=\ln e^3-2, y=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$ ⓑ $x=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^3, y=\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

الحل:

a. $x=\ln e^3-2 \qquad y=\ln(e\sqrt{e})$

$x=\ln e^3-2 \qquad y=\ln(e\cdot e^{\frac12})=\ln(e^{\frac32})$

$=3-2=1 \qquad =\frac{3}{2}$

$y>x$

b. $x=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^3 \qquad y=\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

$x=3\ln(e^{-1}) \qquad y=(\ln e^{-1})^2=(-1)^2$

$=-3 \qquad =1$

$y>x$

[5] أثبت صحة المساواة على $\mathbb{R}$.

$$\underbrace{\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)}_{L_1}=\underbrace{x}_{L_2}$$

الحل:

ط1

$L_1=\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)$

$=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right)=\ln\left(\frac{e^x+1}{\frac{1}{e^x}+1}\right)$

$=\ln\left(\frac{e^x+1}{\frac{1+e^x}{e^x}}\right)=\ln\left(e^x+1\cdot\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

$=\ln e^x=x=L_2$

ط2

$L_1 \quad \ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)$

$=\ln\left(e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)-\ln(e^{-x}+1)$

$=\ln e^x+\ln(1+e^{-x})-\ln(e^{-x}+1)$

$=\ln e^x=x=L_2$

[6] أثبت أنّ $f(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ تابعٌ ثابتٌ.

الحل:

$=\cancel{e^{2x}}+2e^x\cdot e^{-x}+\cancel{e^{-2x}}-(\cancel{e^{2x}}-2e^x\cdot e^{-x}+\cancel{e^{-2x}})$

$=2e^{x-x}+2e^{x-x}$

$=2+2=4$

f تابع ثابت

ملاحظة: لتبسيط الاس يمكن أن نأخذ $e^{\ln}$. الأساس عدد ليس e

[7] بسّط كتابة الأعداد الآتية:

ⓐ $A=2^{\frac{1}{\ln 2}}$ ⓑ $B=3^{-\frac{1}{\ln 3}}$

ⓒ $C=2^{\frac{1}{\ln 4}}$ ⓓ $D=\frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$

الحل:

a. $A=2^{\frac{1}{\ln 2}}$

$=e^{\ln(2)^{\frac{1}{\ln 2}}}=e^{\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln 2}=e$

b. $B=3^{-\frac{1}{\ln 3}}$

$=e^{\ln(3)^{-\frac{1}{\ln 3}}}=e^{-\frac{1}{\ln 3}\cdot\ln 3}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

c. $C=2^{\frac{1}{\ln 4}}$

$=e^{\ln(2)^{\frac{1}{\ln 4}}}=e^{\frac{1}{\ln 4}\cdot\ln 2}=e^{\frac{1}{2\ln 2}\cdot\ln 2}=e^{\frac12}=\sqrt{e}$

d. $D=\frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$

$=\frac{e^2\cdot e^{\ln 8}}{e^3\cdot e^{\ln 4}}=\frac{8}{e4}=\frac{2}{e}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3. حل المعادلات

الخطوات:

- نوجد شرط الحل E
- نوجد حلول المعادلة ثم ندرس انتماء الحلول إلى شرط الحل.

مثال2: حل المعادلات الآتية:

ⓐ $e^{1/x}=e^{x+1}$. شرط الحل $E=\mathbb{R}^*$.

المعادلة تكافئ $\frac{1}{x}=x+1$ أو $x^2+x-1=0$ ، بالحل

$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ أي $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

ⓑ $e^{2x}-5e^x+4=0$. شرط الحل $E=\mathbb{R}$.

المعادلة تكافئ $(e^x-1)(e^x-4)=0$. ومنه $e^x=1,\ e^x=4$

من ثمّ $x=0$ ، و $x=\ln 4$. ومنه $S=\{0,\ln 4\}$.

ⓒ $e^x+4e^{-x}\le 5$ شرط الحل $E=\mathbb{R}$.

$e^x-5+\frac{4}{e^x}\le 0$ ، ولأنّ $e^x>0$ لا تتغير المتراجحة عند ضرب طرفيها بالمقدار e^x ، فهي تُكافئ $e^{2x}-5e^x+4\le 0$.

أي $(e^x-1)(e^x-4)\le 0$ وينعدم الطرف الأول عند $x=0, x=\ln 4$

x	$-\infty$	0	$\ln 4$	$+\infty$
$(e^x-1)(e^x-4)$	+	0 −	0	+

فمجموعة حلول المتراجحة هي $[0,\ln 4]$.

[8] حلّ المعادلات الآتية:

ⓐ $e^{3-x}=1$ ⓑ $e^{2x^2+3}=e^{7x}$

ⓒ $\frac{e^x}{1-2e^x}=5$ ⓓ $\ln(e^x-2)=3$

ⓔ $3^x=4^{2x+1}$ ⓕ $e^{2x}-5e^x+4=0$

ⓖ $4e^{2x}-e^x+2=0$ ⓗ $e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$

الحل:

a. $e^{3-x}=1$

$E=R$

$\ln e^{3-x}=\ln 1 \rightarrow 3-x=0 \rightarrow x=3\in E$

$S=\{3\}$

b. $e^{2x^2+3}=e^{7x}$

$E=R$

$\ln e^{2x^2+3}=\ln e^{7x} \Rightarrow 2x^2+3=7x \Rightarrow 2x^2-7x+3=0$

$\Rightarrow x^2-7x+6=0$

$2(x-\frac{6}{2})(x-\frac{1}{2})=0$

$x=3 \qquad x=\frac{1}{2}$

$S=\{3,\frac{1}{2}\}$

c. $\frac{e^x}{1-2e^x}=5$

$1-2e^x\neq 0$

$2e^x\neq 1 \rightarrow e^x\neq\frac{1}{2}$

$\ln e^x\neq\ln\frac{1}{2} \Rightarrow x\neq-\ln 2$

$E=R\setminus\{-\ln 2\}$

$e^x=5-10e^x$

$11e^x=5 \Rightarrow e^x=\frac{5}{11}$

$\ln e^x=\ln\frac{5}{11} \Rightarrow x=\ln\frac{5}{11}\in E$

$S=\{\ln\frac{5}{11}\}$

d. $\ln(e^x-2)=3$

$e^x-2>0 \rightarrow e^x>2 \rightarrow x>\ln 2$

$E=]\ln 2,+\infty[$

$e^{\ln(e^x-2)}=e^3 \Rightarrow e^x-2=e^3$

$e^x=e^3+2 \Rightarrow \ln e^x=\ln(e^3+2)$

$x=\ln(e^3+2)$

$S=\{\ln(e^3+2)\}$

e. $3^x=4^{2x+1}$

$E=R$

$\ln 3^x=\ln 4^{2x+1}$

$x\ln 3=(2x+1)\ln 4 \Rightarrow x\ln 3=2x\ln 4+\ln 4$

$-2x\ln 4=\ln 4 \Rightarrow x(\ln 3-2\ln 4)=\ln 4$

$x=\frac{\ln 4}{\ln 3-2\ln 4} \Rightarrow x=\frac{2\ln 2}{\ln 3-4\ln 2}$

$S=\{\frac{2\ln 2}{\ln 3-4\ln 2}\}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

f. $e^{2x}-5e^{x}+4=0$

$E=\mathbb{R}$

$(e^{x}-4)(e^{x}-1)=0$

$e^{x}=4$	$e^{x}=1$
$\ln e^{x}=\ln 4$	$\ln e^{x}=\ln 1$
$x=\ln 4$	$x=0$
$x=2\ln 2$	

$S=\{0,\ 2\ln 2\}$

g. $4e^{2x}-e^{x}+2=0$

$D=b^2-4a.c$

$=1-4(4)(2)=-31<0$

$S=\{\emptyset\}$

h. $e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$

$(e^{-x}-6)(e^{-x}-1)=0$

$e^{-x}=6$	$e^{-x}=1$
$\ln e^{-x}=\ln 6$	$\ln e^{-x}=\ln 1$
$-x=\ln 6$	$-x=0$
$x=-\ln 6$	$x=0$

$S=\{0,\ -\ln 6\}$

4. حل المتراجحات

الخطوات:

- نوجد شرط الحل E
- نوجد حلول المتراجحة ثم نقاطع الحلول مع شرط الحل.

مثال3: حل المتراجحة الآتية: $e^{2x+1}<e^{-x^2+4}$: شرط الحل $E=\mathbb{R}$.

المتراجحة تكافئ $2x+1<-x^2+4$ أو $x^2+2x-3<0$.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

حلول المتراجحة هي $]-3,1[$.

[9] حل كلّ متراجحة فيما يأتي:

ⓐ $e^{x}\le e^{-x}$ ⓑ $(e^{x}-1)(e^{x}-4)<0$

ⓒ $e^{x}\le 5$ ⓓ $e^{x}+4e^{-x}\le 5$

ⓔ $e^{x+2}\ge \dfrac{3}{e^{x}}$ ⓕ $\dfrac{2^{x}}{2^{x}+1}<\dfrac{1}{3}$

ⓖ $e^{2x^2-1}\ge 3$ ⓗ $e^{2x}-2e^{-x}-3<0$

ⓘ $\ln(2-e^{x})\ge 3$ ⓙ $(e^{x}-2)e^{x}>2(e^{x}-2)$

ⓡ $3^{x}>4$ ⓢ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}>4$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل:

a. $e^x \le e^{-x}$

$E = \mathbb{R}$

$e^x \le e^{-x} \Rightarrow x \le -x$

$2x \le 0 \Rightarrow x \le 0 \Rightarrow]-\infty, 0]$

$\Rightarrow S =]-\infty, 0]$

b. $(e^x-1)(e^x-4) < 0$

$E = \mathbb{R}$

$(e^x-1)(e^x-4) = 0$

إما $e^x-1=0$ أو $e^x-4=0$

$e^x = 1$, $e^x = 4$

$x = \ln 1$, $x = \ln 4$

$x = 0$, $x = 2\ln 2$

x	$-\infty$		0		$2\ln 2$		$+\infty$
$(e^x-1)(e^x-4)$		$+$	0	$-$ (م)	0	$+$	

$]0, 2\ln 2[$

$\Rightarrow S =]0, 2\ln 2[$

c. $e^x \le 5$

$E = \mathbb{R}$

$e^x \le 5 \Rightarrow x \le \ln 5 \Rightarrow]-\infty, \ln 5]$

$\Rightarrow S =]-\infty, \ln 5]$

d. $e^x + 4e^{-x} \le 5$

$E = \mathbb{R}$

$e^x + \frac{4}{e^x} \le 5$ نضرب الطرفين بـ $0 < e^x$

$(e^x)^2 - 5e^x + 4 \le 0$

$(e^x)^2 - 5e^x + 4 = 0$

$(e^x-4)(e^x-1) = 0$

$x = 0$, $x = 2\ln 2$

x	$-\infty$		0		$2\ln 2$		$+\infty$
		$+$	0	$-$ (م)	0	$+$	

$[0, 2\ln 2]$

$\Rightarrow S = [0, 2\ln 2]$

e. $e^{x+2} \ge \frac{3}{e^x}$

$e^x \ne 0$ محقق دوماً لأنّ $e^x > 0$

$E = \mathbb{R}$

نضرب الطرفين بـ $0 < e^x$

$e^x \cdot e^{x+2} \ge 3$

$e^{2x+2} \ge 3$

$2x+2 \ge \ln 3 \Rightarrow 2x \ge \ln 3 - 2$

$x \ge \frac{\ln 3 - 2}{2}$

$\Rightarrow [\frac{\ln 3}{2} - 1, +\infty[$

$\Rightarrow S = [\frac{\ln 3}{2} - 1, +\infty[$

f. $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

$2^x + 1 \ne 0$

$2^x \ne -1$ محقق دوماً

$E = \mathbb{R}$

$\frac{2^x+1}{2^x} > 3$

$\frac{2^x}{2^x} + \frac{1}{2^x} > 3 \Rightarrow \frac{1}{2^x} > 2$

$2^x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x < 2^{-1}$

$\Rightarrow x < -1$

$]-\infty, -1[$

$\Rightarrow S =]-\infty, -1[$

g. $e^{2x^2-1} \ge 3$

$E = \mathbb{R}$

$2x^2 - 1 \ge \ln 3 \Rightarrow 2x^2 - 1 - \ln 3 \ge 0$

$2x^2 - 1 - \ln 3 = 0$

$2x^2 = 1 + \ln 3 \Rightarrow x^2 = \frac{1+\ln 3}{2}$

$x = +\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$, $x = -\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$

		$-\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$		$+\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}$	
	$+$ (م)	0	$-$	0	$+$ (م)

$]-\infty, -\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}, +\infty[$

$\Rightarrow S =]-\infty, -\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}] \cup [\sqrt{\frac{1+\ln 3}{2}}, +\infty[$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

h. $e^{2x} - 2e^{-x} - 3 < 0$

$E = \mathbb{R}$

نضرب بـ e^{x} لأن الأس سالب $-2e^{-x}$

$e^{3x} - 2 - 3e^{x} < 0$

$e^{3x} - 3e^{x} - 2 < 0$

$e^{3x} - 3e^{x} - 2 = 0$

نفرض $X = e^{x}$

$X^3 - 3X - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 3X - 2 & X+1 \\ \hline -X^3 \mp X^2 & X^2 - X - 2 \\ -X^2 - 3X - 2 & \\ -X^2 - X & \end{array}$$

$(X+1)(X^2 - X - 2) = 0$

$(X+1)(X-2)(X+1) = 0$

$(X+1)^2(X-2) = 0$

اما $X = -1 \rightarrow e^{x} = -1$ تناقض

او $X = 2 \rightarrow e^{x} = 2 \rightarrow \ln e^{x} = \ln 2$

$x = \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
المقدار		$-$	0	$+$	
المتراجحة		م	$\Vert$		

$S =]-\infty, \ln 2[$

i. $\ln(2 - e^{x}) \geq 3$

$2 - e^{x} > 0 \rightarrow 2 > e^{x} \rightarrow \ln 2 > x$

$E =]-\infty, \ln 2[$

$e^{\ln(2-e^{x})} \geq e^{3} \rightarrow 2 - e^{x} \geq e^{3}$ تناقض

$S = \emptyset$

j $(e^{x} - 2)e^{x} > 2(e^{x} - 2)$

$E = \mathbb{R}$

$(e^{x} - 2)e^{x} - 2(e^{x} - 2) > 0$

$(e^{x} - 2)(e^{x} - 2) > 0 \rightarrow (e^{x} - 2)^2 > 0$

$e^{x} - 2 = 0 \rightarrow e^{x} = 2 \rightarrow x = \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
		$+$	0	$+$	
		م	$\Vert$	م	

$S = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$

r. $3^{x} > 4$

$E = \mathbb{R}$

$\ln 3^{x} > \ln 4 \rightarrow x \ln 3 > \ln 4$

$x > \frac{\ln 4}{\ln 3} \rightarrow x > \frac{2\ln 2}{\ln 3}$

$S =]\frac{2\ln 2}{\ln 3}, +\infty[$

s. $(\frac{1}{3})^{x} > 4$

$E = \mathbb{R}$

$\ln(\frac{1}{3})^{x} > \ln 4 \qquad x \ln \frac{1}{3} > \ln 4$

$x(-\ln 3) > 2\ln 2 \rightarrow x < \frac{2\ln 2}{-\ln 3}$ قسمنا على سالب غيرنا المتراجحة

$S =]-\infty, -\frac{2\ln 2}{\ln 3}[$

سما العهد التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[10] حل كلاً من المعادلات والمتراجحات المعطاة

ⓐ (دورة 2017 – 1) حل المعادلة $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$.

ⓑ $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$، و $4^x + 2^{x+1} - 3 \le 0$.

ⓒ $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 = 0$، و $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \ge 0$.

ⓓ $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} = 7$، و $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \ge 7$.

الحل:

a. $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$ $\qquad E = \mathbb{R}$

$3^{2x} + 3.3^x - 4 = 0$

$(3^x + 4)(3^x - 1) = 0$

$3^x = -4$ تناقض $\qquad 3^x = 1 \rightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

b. $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$

$2^{2x} + 2.2^x - 3 = 0$

$(2^x + 3)(2^x - 1) = 0$

$2^x = -3$ تناقض $\qquad 2^x = 1 \rightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

$4^x + 2^{x+1} - 3 \le 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$-$	0	$+$	

م

لانوخذه مساواة

$S =]-\infty, 0[$

سما المجد التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

c. $2^{x+1}-10\times2^{x}+12=0 \qquad E=\mathbb{R}$

$2\times2^{x}-10\times2^{x}+12=0$

$(2-10)\ ^{x}+12=0$

$(-8)2^{x}+12=0 \Rightarrow (-8)2^{x}=-12$

$2^{x}=\frac{12}{8} \Rightarrow 2^{x}=\frac{3}{2}$

$\ln 2^{x}=\ln\frac{3}{2} \Rightarrow x\ln2=\ln3-\ln2$

$\rightarrow x=\frac{\ln3}{\ln2}-1$

$2^{x+1}-10.2^{x}+12\geqslant0$

x	$-\infty$		$\frac{\ln3}{\ln2}-1$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

$S=\left]-\infty,\frac{\ln3}{\ln2}-1\right]$

d. $3^{x+1}+(2)3^{-x}=7$

نضرب بـ 3^{x}

$3^{2x+1}+2=7.3^{x}$

$3.3^{2x}-7.3^{x}+2=0$

$3^{2x}-7.3^{x}+6=0$

$3(3^{x}-\frac{6}{3})(3^{x}-\frac{1}{3})=0$

$3^{x}=2$	$3^{x}=3^{-1}$
$\ln3^{x}=\ln2$	$x=-1$
$x\ln3=\ln2$	
$x=\frac{\ln2}{\ln3}$	

$3^{x+1}+(2)3^{-x}\geqslant7$

$3^{x+1}+(2)3^{-x}-7\geqslant0$

	$-\infty$		-1		$\frac{\ln2}{\ln3}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[\frac{\ln2}{\ln3},+\infty\right[$

أسما المجد التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[11] لماذا إشارة $e^x - \frac{4}{e^x}$ مع إشارة $(e^x - 2)$ ثُمّ حل $e^x - \frac{4}{e^x} \leq 0$

الحل:

$e^x - \frac{4}{e^x}$

$= \frac{e^{2x}-4}{e^x} \rightarrow \frac{(e^x+2)(e^x-2)}{e^x}$

بما ان $\frac{e^x+2}{e^x}$ موجب تماماً فإن $e^x - \frac{4}{e^x}$ من اشارة e^x-2

$e^x - \frac{4}{e^x} \leq 0$

$e^x - 2 \leq 0$

$e^x \leq 2 \rightarrow \ln e^x \leq \ln 2 \rightarrow x \leq \ln 2$

$S =]-\infty, \ln 2]$

[12] جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

ⓐ $\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} 3^x \times 3^y = 9 \\ 3^x + 3^y = 4\sqrt{3} \end{cases}$

ⓒ $\begin{cases} xy = e^2 \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 10 \end{cases}$ ⓓ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3e^x - e^{y+3} = 2e^2 \end{cases}$

الحل:

a. $e^x - \frac{1}{e}e^y = 1$ ①

$2e^x + e^y = 4 + e$ ②

من ① نجد: $e^x = 1 + \frac{1}{e}e^y$ ③

نعوض في ②:

$2(1 + \frac{1}{e}e^y) + e^y = 4 + e$

$2 + \frac{2}{e}e^y + e^y = 4 + e$

$(\frac{2}{e} + 1)e^y = 2 + e$

$\frac{2+e}{e}e^y = 2 + e$

$\frac{1}{e}e^y = 1 \rightarrow e^y = e^1$

$\rightarrow y = 1$

نعوض في ③

$e^x = 1 + \frac{1}{e}e$

$e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2$

$S = \{(\ln 2, 1)\}$

c. $xy = e^2$ ①

$(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 10$ ② $x>0$, $y>0$

من ① نكتب:

$y = \frac{e^2}{x}$

نعوض في ②:

$(\ln x)^2 + (\ln \frac{e^2}{x})^2 = 10$

$(\ln x)^2 + (\ln e^2 - \ln x)^2 = 10$

$(\ln x)^2 + (2 - \ln x)^2 = 10$

$(\ln x)^2 + 4 - 4\ln x + (\ln x)^2 = 10$

$2(\ln x)^2 - 4\ln x - 6 = 0$

$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$

$(\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0$

اما $\ln x = 3$ | او $\ln x = -1$

$e^{\ln x} = e^3 \rightarrow x = e^3$ | $e^{\ln x} = e^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{e}$

نعوض في ③:

$y = \frac{1}{e}$ $y = e^3$

$S = \{(e^3, \frac{1}{e}), (\frac{1}{e}, e^3)\}$

d. $x + y = 1$ ①

$3e^x - e^{y+3} = 2e^2$ ②

من ① نجد: $y = 1 - x$ ③

نعوض في ②:

$3e^x - e^{4-x} = 2e^2$

$3e^{2x} - e^4 = 2e^2 \cdot e^x$

$3e^{2x} - 2e^2 e^x - e^4 = 0$

$e^{2x} - 2e^2 e^x - 3e^4 = 0$

$3(e^x - \frac{3e^2}{3})(e^x + \frac{e^2}{3}) = 0$

$e^x = e^2 \rightarrow x = 2$

$e^x + \frac{e^2}{3} = 0$ تناقض

نعوض في ③: $y = 1 - 2 \rightarrow y = -1$

$S = \{(2, -1)\}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

5. نهاية التابع الأسي:

قواعد النهايات

$\boxed{e^0} \to \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\boxed{e^\infty} \to \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \ , \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

$\boxed{e^{-\infty}} \to \lim_{x\to-\infty}x^n e^x=0$

في حالة $1^{\pm\infty}$:

- نجعل ما بين القوسين (1+ شي).
- نأخذ $e^{\ln}$ وندبلك.
- نستعمل القاعدة: $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$.

في حالات عدم التعيين غالباً نتبع

حالة $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ و $+\infty-\infty$: عامل مشترك أو قواعد

حالة $0\times(\pm\infty)$: نشر أو قواعد

حالة $\frac{0}{0}$: قواعد

مخطط يساعد في حفظ القوانين

$$e\uparrow \ \frac{0 \qquad 1 \qquad\qquad +\infty}{-\infty \quad - \quad 0 \qquad + \qquad +\infty}\downarrow \ln$$

$\ln 1=0$	$e^0=1$
$\ln(0^+)=-\infty$	$e^{+\infty}=+\infty$
$\ln(+\infty)=+\infty$	$e^{-\infty}=0$
$\ln\,]1,+\infty[>0$	$\ln e^x=x$
$\ln\,]0,1[<0$	$e^{\ln x}=x$
$D_{\ln}=]0,+\infty[$	$D_e=\mathbb{R}$
$\ln x\in\mathbb{R}$	$e^x\in]0,+\infty[$

مثال4: احسب كلاً من نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$:

ⓐ $f(x)=x-e^x \quad a=+\infty$

نكتب $f(x)=e^x\left(\frac{x}{e^x}-1\right)$. ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

ⓑ $f(x)=e^{2x}-e^x \quad a=+\infty$

نكتب $g(x)=e^x(e^x-1)$. ومنه $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

ⓒ $f(x)=\frac{2e^x+1}{1+e^x} \quad a=+\infty$

نكتب $g(x)=\frac{e^x(2+e^{-x})}{e^x(e^{-x}+1)}=\frac{2+e^{-x}}{1+e^{-x}}$. ومنه $\lim_{x\to+\infty}g(x)=2$.

ⓖ $f(x)=(1+x)^{1/x} \quad a=0$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to0}e^{\ln(1+x)^{1/x}}$$

$$=\lim_{x\to0}e^{1/x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^1=e$$

لأن $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$.

ⓗ $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad a=+\infty$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}}=e^1=e$$

لأن $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$.

ⓘ $f(x)=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x/2} \quad a=+\infty$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x/2}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x/2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{2}\frac{4}{x-1}\frac{\ln\left(1+\frac{4}{x-1}\right)}{\frac{4}{x-1}}}=e^2$$

لأن $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=1$.

[13] جد نهاية كلٍ من التوابع الآتية عند a :

ⓐ $f(x)=\frac{e^x-1}{2x} \quad a=0$

ⓑ $f(x)=\frac{1}{x}(e^x-1) \quad a=0,+\infty$

ⓒ $f(x)=e^{2x}-e^x+3 \quad a=+\infty$

ⓓ $f(x)=2xe^{-x} \quad a=+\infty$

ⓔ $f(x)=2x-1+e^{-x} \quad a=-\infty$

ⓕ $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1} \quad a=+\infty$

ⓖ $f(x)=\ln x-e^x \quad a=+\infty$

ⓗ $f(x)=\frac{e^x-1}{x-1} \quad a=+\infty$

ⓘ $f(x)=(2-x)^{\frac{3}{x-1}} \quad a=1$

ⓙ $f(x)=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}} \quad a=+\infty$

الحل:

a. $f(x)=\frac{e^x-1}{2x} \quad a=0$

$=\frac{1}{2}\,\frac{e^x-1}{x}$

$\lim_{x\to0}f(x)=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$

لأن: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

b. $f(x) = \frac{1}{x}(e^x - 1)$

$a = 0$

$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

$a = +\infty$

$f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$: لأن

c. $f(x) = e^{2x} - e^x + 3$ $\quad$ $a = \infty$

$f(x) = e^{2x}\left(1 - \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{3}{e^{2x}}\right)$

$= e^{2x}\left(1 - e^{-x} + 3.e^{-2x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(1 - 0 + 0) = +\infty$

d. $f(x) = 2x.e^{-x}$ $\quad$ $a = +\infty$

ط1: $f(x) = 2.\frac{x}{e^x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2(0) = 0$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

ط2: $f(x) = -2(-x.e^{-x})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2(0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ -x \to -\infty}} -x.e^{-x} = 0$ لأن

e. $f(x) = 2x - 1 + e^{-x}$ $\quad$ $a = -\infty$

$f(x) = e^{-x}\left(\frac{2x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}} + 1\right)$

$= e^{-x}(2x.e^x - e^x + 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty(2(0) - 0 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0$ لأن

f. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $\quad$ $a = +\infty$

$f(x) = \frac{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$

g. $f(x) = \ln x - e^x$ $\quad$ $a = +\infty$

$f(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(0 - \infty) = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

h. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$ $\quad$ $a = +\infty$

$f(x) = \frac{x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty - 0}{1 - 0} = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

النهاية المميزة: 1^{∞}

1. نجعل ما ضمن القوس (1+ شغلة)
2. نأخذ $e^{\ln}$ القوس السابق و نذلك
3. نضرب و نقسم على الشغلة ثم نستخدم القاعدة $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

i. $f(x) = (2 - x)^{\frac{3}{x-1}}$ $\quad$ $a = 1$

$f(x) = \left(1 + \overbrace{(1 - x)}^{\text{شغلة}}\right)^{\frac{3}{x-1}}$

$= e^{\ln(1 + (1-x))^{\frac{2}{x-1}}} = e^{\frac{3}{x-1} \cdot 1 - x \cdot \frac{\ln(1 + (1-x))}{1 - x}}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

لأن: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ 1-x \to 0}} \frac{\ln(1 + (1-x))}{1 - x} = 1$

j. $f(x) = \left(\frac{x - 2}{x + 1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ $\quad$ $a = +\infty$

$f(x) = \left(1 + \frac{x - 2}{x + 1} - 1\right)^{\frac{x+1}{3}} = \left(1 + \overbrace{\frac{-3}{x + 1}}^{\text{شغلة}}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

$e^{\ln\left(1 + \frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}} = e^{\frac{x+1}{3} \cdot \frac{-3}{x+1} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{-3}{x+1}\right)}{\frac{-3}{x+1}}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

لأن $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ \frac{-3}{x+1} \to 0}} \frac{\ln\left(1 + \frac{-3}{x+1}\right)}{\frac{-3}{x+1}} = 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

6. اشتقاق التابع الأسي:

- $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = \ln a \times a^x$
- عندما تكون الحشوة ليست x نضرب بمشتق الحشوة

ملاحظة: إذا كان الأس يحوي مجهول يجب أن يكون الأساس e لذلك في حالة المعادلة والمتراجحة نأخذ لوغاريتم الطرفين وفي حالة العبارة والتابع نأخذ $e^{\ln}$.

[14] جد $f'(x)$ لكلٍ من التوابع الآتية:

ⓐ $f(x) = e^{x^2-x}$ ومنه $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$

ⓑ $f(x) = \pi^{x^2-x}$ أي $f(x) = \pi^{x^2-x} = e^{(x^2-x)\ln\pi}$

ومنه $f'(x) = (\ln\pi)(2x-1)e^{(x^2-x)\ln\pi} = (\ln\pi)(2x-1)\pi^{x^2-x}$

[15] جد $f'(x)$ لكلٍ من التوابع الآتية:

ⓐ $f(x) = (x^2-2x)e^x$ ⓒ $f(x) = \frac{1}{x}e^x$

ⓑ $f(x) = \ln(1+e^x)$ ⓓ $f(x) = \frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$

ⓔ $f(x) = e^{-x}\ln x$ ⓕ $f(x) = x^x$

ⓖ $f(x) = 3^{x^2}$ ⓗ $f(x) = \pi^{\ln x}$

الحل:

a. $f(x) = (x^2-2x)e^x$

$f'(x) = (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x)$

$= e^x(2x-2-2x+x^2)$

$= e^x(x^2-2)$

b. $f(x) = \ln(1+e^x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^x}$

c. $f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^x$

$f'(x) = -\frac{1}{x} + e^x \cdot \frac{1}{x}$

$= e^x\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = e^x\left(\frac{-1+x}{x^2}\right)$

d. $f(x) = \frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$

$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{-x}) - (-e^{-x})(e^x-1)}{(1+e^{-x})^2}$

$= \frac{e^x + e^x \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot e^x + e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x - e^{-x} + 2}{(1+e^{-x})^2}$

e. $f(x) = e^{-x} \cdot \ln x$

$f'(x) = -e^{-x}\ln x + \frac{1}{x} \cdot e^{-x}$

$= e^{-x}\left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)$

f. $f(x) = x^x$

$f(x) = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$

$f'(x) = (\ln x + 1)\, e^{x\ln x}$

$= (\ln x + 1)\, x^x$

g. $f(x) = 3^{x^2}$

$f(x) = e^{\ln 3^{x^2}} = e^{x^2\ln 3}$

$f'(x) = (2x\ln 3)\, e^{x^2\ln 3}$

$= (2x \cdot \ln 3) \cdot 3^{x^2}$

h. $f(x) = \pi^{\ln x}$

$f(x) = e^{\ln(\pi^{\ln x})} = e^{\ln x \cdot \ln\pi}$

$f'(x) = \left(\frac{\ln\pi}{x}\right) e^{\ln x \cdot \ln\pi}$

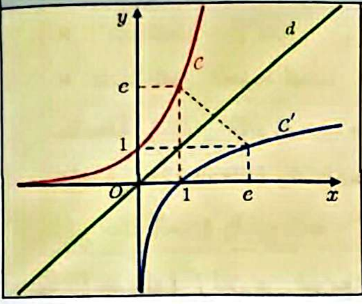
$= \left(\frac{\ln\pi}{x}\right) \cdot \pi^{\ln x}$

سما المجد التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

7. دراسة التابع الاسي

التابعان ln و e مرجعيان، يمكن ان نقوم كتابة خواصها دون اثبات. الخطان البيانيان للتابعين ln و e متناظران بالنسبة إلى منصف الربع الأول



[16] ادرس تغيرات التابع f المعرف وفق $f(x)=e^x$ وارسم C.

الحل:

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

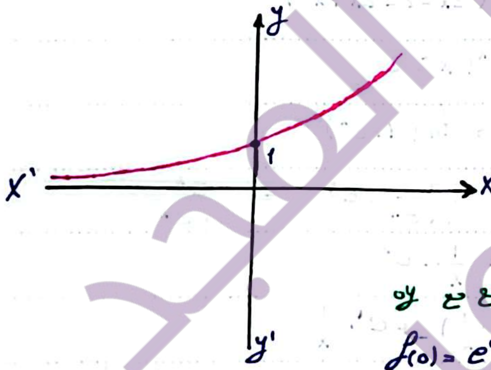
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$

$D_1 : y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$

$f'(x) = e^x > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



تقاطع مع oy

$f(0) = e^0 = 1$

[17] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^x-x$.

ⓐ بيّن أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=-x$ مقارب للخط C؟

ⓑ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها، ثم ارسم d و C.

الحل:

سما المجد التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

a. $d: y = -x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y_d = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - y_d = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

d مقارب مائل عند $-\infty$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = \infty(1-0) = \infty$

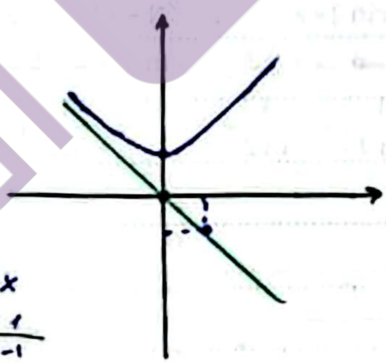
$\infty - \infty$ ح.ع.ت

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \to e^x - 1 = 0 \to e^x = 1 \to x = 0$

$f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



$y = -x$

x	0	1
y	0	-1

[18] ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x-1)e^x$. ادرس نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، وادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثُمّ ارسم C.

الحل:

$D = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty(\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim(x \cdot e^x - e^x) = 0 - 0 = 0$

$-\infty \times 0$ ح.ع.ت

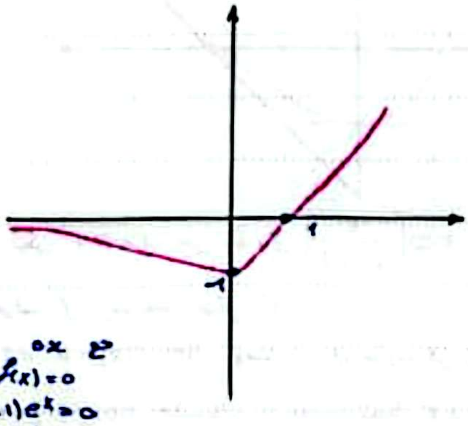
$y = 0$ مقارب أفقي عند $-\infty$

$f'(x) = e^x + (x-1)e^x$
$= e^x(1 + x - 1)$
$= x \cdot e^x$

$f'(x) = 0 \to x = 0$

$\to f(0) = -1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



مع ox

$f(x) = 0$

$(x-1)e^x = 0$

$x = 1$

مثال5: f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{-x} + x - 2$.

ⓐ جد المقاربات ثم ادرس تغيرات f

ⓑ بيّن أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$. وارسم خطه البياني C

الحل: ⓐ في جوار $-\infty$. $f(x) = e^{-x}(1 + xe^x) - 2$.

نعلم أنّ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$،

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}(1 + xe^x) = +\infty$. ومن ثَمّ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

في جوار $+\infty$. لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}(x-2) = +\infty$، ومنه

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x-2)) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

d الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

التابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$ و

$f'(x) = -e^{-x} + 1 = e^{-x}(e^x - 1)$.

ينعدم $f'(x)$ فقط عند $x = 0$، وإشارته تُماثل إشارة $e^x - 1$ أي إشارة x، وهذا ما يتيح لنا وضع جدول تغيرات f الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

ⓑ حل المعادلة $f(x) = 0$:

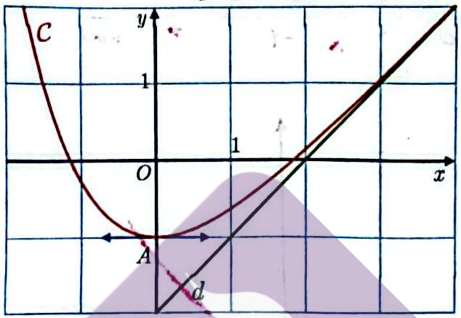
f مستمرّ ومتناقص تماماً على المجال $]-\infty, 0[$

إذن $f(]-\infty, 0[) =]-1, +\infty[$ ولمّا كان $0 \in]-1, +\infty[$، فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]-\infty, 0[$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

f مستمرٌ ومتزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$ إذن $f(]0,+\infty[)=]-1,+\infty[$ ولمّا كان $0\in]-1,+\infty[$، فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]0,+\infty[$.

وبهذا يكون للمعادلة $f(x)=0$ حلاّن في $\mathbb{R}$.



مثال6: ليكن f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\exp\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$.

ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني C.

الحل: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=e^0=1$. ومنه $y=1$ مقارب في جوار $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=e^0=1$. فالمستقيم d مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\frac{e^{u(x)}}{(x^2+1)^2}\left(1-x^2\right)$.

فإشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $1-x^2$ الذي ينعدم عند $x=-1$

و $x=1$، كما إنّ $f(1)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ و $f(-1)=e^{-\frac{1}{2}}=1/\sqrt{e}$.

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1/\sqrt{e}$	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	1

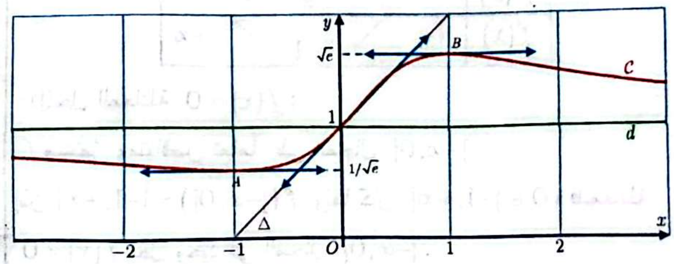
مماسا C في $A\left(-1,1/\sqrt{e}\right)$ و $B\left(1,\sqrt{e}\right)$ يوازيان محور الفواصل $\left(f'(-1)=f'(1)=0\right)$.

وفي النقطة $M(0,1)$، ميل المماس $m=f'(0)=1$،

فالمُماس يوازي منصف الربع الأول ومعادلته $y=x+1$. نرمز إليه بالرمز Δ.

نرسم d و Δ ومماسي C في A و B،

ثم نرسم الخط C محققاً صفات f المدروسة.



8. التابع الأسي ذو الأساس a

♣ يوجد رمز اخر للتابع الاسي $\boxed{a^x=\exp_a(x)}$

أي: $2^x=\exp_2(x),\ 3^{2x-1}=\exp_3(2x-1),\ e^x=\exp(x)$

♣ يوجد تابع اللوغاريتمي اخر هو $\boxed{\log_a(x)=\frac{1}{\ln a}\times\ln x}$

أي: $\log_2(x)=\frac{1}{\ln 2}\times\ln x,\ \ \log(x)=\frac{1}{\ln 10}\times\ln x$

♣ التابع العكسي لـ $\exp_a$ هو $\log_a$ أي $\log_a\leftrightarrow\exp_a$ حيث $\exp_a$ التابع الأسي بالأساس a و $\log_a$ التابع اللوغاريتمي بالأساس a

♣ في حالة خاصة: $\ln\leftrightarrow e$ حيث $\log_e=\ln,\ \exp_e=e$

مثال7: ادرس تغيرات f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x\cdot 2^x$، وارسمه

الحل: لدينا $f(x)=xe^{x\ln 2}$

في جوار $-\infty$ لدينا $f(x)=\frac{1}{\ln 2}x\ln 2e^{x\ln 2}$

ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$، ومحور الفواصل مقارب في جوار $-\infty$.

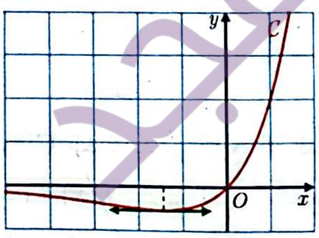
في جوار $+\infty$ لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$f'(x)=e^{x\ln 2}+x\ln 2\times e^{x\ln 2}=e^{x\ln 2}(1+x\ln 2)=2^x(1+x\ln 2)$

إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $1+x\ln 2$ الذي ينعدم فقط عند

$x=-\frac{1}{\ln 2}$ و $f\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)=-\frac{1}{\ln 2}e^{-\frac{1}{\ln 2}\times\ln 2}=\frac{-1}{e\ln 2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e\ln 2}$	$\nearrow$	$+\infty$



[19] ادرس تغيرات $f(x)=x\cdot 2^{-x}$ المعرف على $\mathbb{R}$ وارسم خطه.

الحل:

$f(x)=x.2^{-x}=x.e^{\ln}$

$f(x)=x.e^{-x\ln 2}$ $\quad D=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.e^{+\infty}=-\infty(+\infty)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x.\ln 2}{e^{x\ln 2}}.\frac{1}{\ln 2}=0$

$y=0$ مقارب أفقي

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x.\ln 2}{e^{x\ln 2}}=0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$f'(x) = e^{-x\ln2} + x\cdot e^{-x\ln2}(-\ln2)$

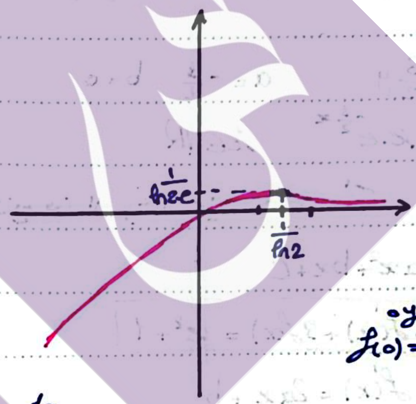
$= e^{-x\ln2}(1 - x.\ln2) =$

$f'(x) = 0$

$1 - x\ln2 = 0 \rightarrow 1 = x\ln2 \rightarrow x = \frac{1}{\ln2}$

$f(\frac{1}{\ln2}) = \frac{1}{\ln2}\cdot e^{-\frac{1}{\ln2}.\ln2} = \frac{e^{-1}}{\ln2} = \frac{1}{\ln2\cdot e}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{(\ln2)e}$	$\searrow$	0



oy ح
$f(0) = 0$

$\frac{1}{\ln2} = \frac{1}{0,7} = \frac{10}{7}$

$\frac{1}{\ln2.e} = \frac{10}{7(3)} = \frac{10}{21} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

[20] ادرس تغيرات $f(x)=2^{x^2-2x}$ المعرف على $\mathbb{R}$ و اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$. وارسم خطه.

الحل:

$f(x) = 2^{x^2-2x} = e^{\ln2^{x^2-2x}} = e^{(x^2-2x)\ln2}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{\infty} = \infty$

$f'(x) = e^{(x^2-2x)\ln2}((2x-2)\ln2)$

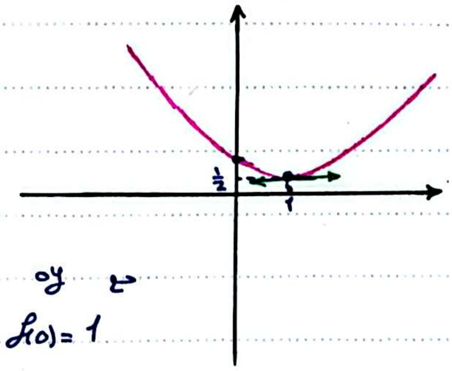
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x-2=0 \rightarrow x=1$

$f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

المماس عند 1 هو $\frac{1}{2}$

مستوي لان انعدام المشتق يكون مماس افقي



oy ح
$f(0) = 1$

9. معادلات تفاضلية بسيطة

- المعادلة التفاضلية هي معادلة تحوي مشتق. مثل $y' = y$.
- حل المعادلة التفاضلية $\boxed{y' = ay + b}$, $(a \neq 0, b \in \mathbb{R})$ هي التوابع $\boxed{f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}}$ حيث k عدد حقيقي

[21] حل المعادلات التفاضلية الآتية:

ⓐ $y' = 3y + 2$ ⓑ $y' + 2y = 1$

ⓒ $3y' = 5y$ ⓓ $2y' + 3y = 0$

الحل:

a. $y' = 3y + 2$

$y' = ay + b \quad a = 3 \quad b = 2$

$f(x) = k\cdot e^{3x} - \frac{2}{3} \quad k \in \mathbb{R}$

b. $y' + 2y = 1$

$y' = -2y + 1 \quad a = -2 \quad b = 1$

$f(x) = k\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2} \quad k \in \mathbb{R}$

c. $3y' = 5y$

$y' = \frac{5}{3}y \quad a = \frac{5}{3} \quad b = 0$

$f(x) = k\cdot e^{\frac{5}{3}x} \quad k \in \mathbb{R}$

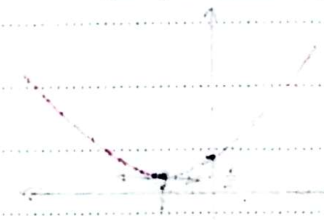
d. $2y' + 3y = 0$

$2y' = -3y \rightarrow y' = -\frac{3}{2}y \quad a = -\frac{3}{2} \quad b = 0$

$f(x) = k\cdot e^{-\frac{3}{2}x} \quad k \in \mathbb{R}$

المجد التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



[22] عيّن حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط:

ⓐ $y' = 2y$، والحل f يحقق الشرط $f(0) = 1$.

ⓑ $y' + 5y = 0$، والخط C للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$.

ⓒ $y' + 2y = 0$، ميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 هو 2.

الحل:

a. $y' = 2y$ و الحل f تحقق الشرط $f(0)=1$

$y' = 2y \quad a = 2 \quad b = 0$

$f(x) = k.e^{2x} \quad k \in R$

من شرط البدء: $f(0) = 1$

$k e^{0} = 1 \rightarrow k = 1 \rightarrow f(x) = e^{2x}$

b. $y' + 5y = 0$ و الخط C للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$

$y' = -5y \quad a = -5 \quad b = 0$

$f(x) = k.e^{-5x} \quad k \in R$

من شرط البدء: $A(-2,1) \in C_f$

$f(-2) = 1$

$k.e^{10} = 1 \rightarrow k = \frac{1}{e^{10}} = e^{-10}$

$f(x) = e^{-10}.e^{-5x} \quad f(x) = e^{-5x-10}$

c. $y' + 2y = 0$ ميل المماس عند النقطة التي فاصلتها -2 هو 2

$y' = -2y \quad a = -2 \quad b = 0$

$f(x) = k.e^{-2x} \quad k \in R$

من شرط البدء: $f'(-2) = 2$

$f'(x) = -2k e^{-2x}$

$f'(-2)$: $-2k.e^{4} = 2 \Rightarrow -k.e^{4} = 1$

$k = \frac{1}{-e^{4}} = -e^{-4}$

$\Rightarrow f(x) = -e^{-4}.e^{-2x} = -e^{-2x-4}$

[23] لتكن (E) المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = 0$. لتكن (E') المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = x^2 + 1$.

ⓐ عيّن جميع حلول (E).

ⓑ عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية f يُحقّق المعادلة (E').

ⓒ بيّن أنه إذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان $g - f$ حلاً لـ (E).

الحل:

a. $y' = -\frac{3}{2}y \qquad a = -\frac{3}{2} \quad b = 0$

$f(x) = k.e^{-\frac{3}{2}x} \qquad k \in IR$

b. $f(x)$ تابع من الدرجة الثانية تحقق E'

$f(x) = ax^2 + bx + c$

أي $\boxed{2f'(x) + 3f(x) = x^2 + 1}$

$f'(x) = 2ax + b$

$2(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$

$4ax + 2b + 3ax^2 + 3bx + 3c = x^2 + 1$

$3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c = x^2 + 1$

بالمقارنة

① .... $3a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{3}$

② .... $4a + 3b = 0 \rightarrow b = -\frac{4}{9}$

③ .... $2b + 3c = 0 \rightarrow c = \frac{17}{27}$

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}$

c. $g(x)$ حل المعادلة E'

$2g'(x) + 3g(x) = x^2 + 1$

و

$2f'(x) + 3f(x) = x^2 + 1$

بالطرح

$2g'(x) - 2f'(x) + 3g(x) - 3f(x) = 0$

$2(g'(x) - f'(x)) + 3(g(x) - f(x)) = 0$

$\Leftarrow$ $g - f$ هو حل المعادلة E

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين عامة

[25] بيّن أنّ الخطّ البياني C للتابع f المعطى على $\mathbb{R}$ يقبل مُقارباً مائلاً d، عيّنه وادرس الوضع النسبي لهذا الخط بالنسبة إلى d.

ⓐ $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$ ⓑ $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$

ⓒ $f(x) = x + 2 + xe^{x}$ ⓓ $f(x) = \ln(3 + e^{x})$

الحل:

a. $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$

نخمن ان $\Delta : y = x-1$ مقارب مائل للخط g ونثبت ذلك

$f(x) - y_\Delta = e^{-2x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$

$\Leftarrow$ $\Delta : y = x-1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

$f(x) - y_\Delta = e^{-2x} > 0$

C فوق Δ دوماً

b. $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$

نخمن ان $\Delta : y = x+1$ مقارب مائل للخط g ونثبت ذلك

$f(x) - y_\Delta = 4e^{-x}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = 0$

$\Leftarrow$ $\Delta : y = x+1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

الوضع النسبي:

$f(x) - y_\Delta = 4e^{-x} > 0$

C فوق Δ دوماً

C. $f(x) = x + 2 + xe^{x}$

نخمن ان $\Delta : y = x+2$ مقارب مائل ولنثبت ذلك،

$f(x) - y_\Delta = xe^{x}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) - y_\Delta = 0$ قاعدة

الوضع النسبي: ندرس اشارة الفرق

$f(x) - y_\Delta = x.e^{x}$

$xe^{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ حيث $e^{x} \neq 0$ ، $e^{x} > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$		$- - - -$	0	$+ + +$	
الوضع النسبي		C تحت Δ	$(0,2)$ نقطة مشتركة	C فوق Δ	

[24] نتأمّل المعادلة التفاضلية : $y' + 3y = 2e^{-x}$. عيّن العدد a ليكون التابع $x \mapsto ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

الحل:

$f(x) = ae^{-x}$ حل للمعادلة $\Leftarrow$ يحقق المعادلة نعوض بالمعادلة

$-ae^{-x} + 3ae^{-x} = 2e^{-x}$

نقسم على e^{-x}

$-a + 3a = 2 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

d. $f(x)=\ln(3+e^x)$

ملاحظة : عند ايجاد المقارب المائل اذا حالة عدم تعيين وكان e^x داخل لوغارتم نخرج e^x عامل مشترك ونطبق خواص اللوغارتم

$f(x)=\ln\left(e^x\left(\frac{3}{e^x}+1\right)\right)$

$=\ln e^x+\ln\left(\frac{3}{e^x}+1\right)$

$=x+\ln\left(\frac{3}{e^x}+1\right)$

نخمن ان $D: y=x$ مقارب مائل

$f(x)-y_D=\ln\left(\frac{3}{e^x}+1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y_D=0$

$\Leftarrow$ $y=x$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$

الوضع النسبي : ندرس اشارة الفرق

$f(x)-y_D=\ln\left(\frac{3}{e^x}+1\right)$

$\frac{3}{e^x}+1>1 \Rightarrow \ln\left(\frac{3}{e^x}+1\right)>0 \Rightarrow f(x)-y_D>0$

ناتج $\ln$ الموجب

$\mathcal{C}$ فوق D دوما

[26] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(3-x)e^x$.

ⓐ ادرس تغيرات f.

ⓑ اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$.

ⓒ ارسم في معلمٍ واحد المماس d ثم الخط C.

الحل:

a. f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

عند $-\infty$:

$f(x)=3e^x-xe^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0-0=0$

$D: y=0$ مقارب افقي للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$

عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$f'(x)=-e^x+e^x(3-x)$

$=e^x(-1+3-x)=e^x(2-x)$

$f'(x)=0 \rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$

$f(2)=e^2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

$f(2)=e^2$ قيمة حدية كبرى محلية

b. $f''(x)=e^x(2-x)-e^x$

$=e^x(2-x-1)=e^x(1-x)$

$f''(x)=0 \longrightarrow 1=x$

$d: y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$d: y=e(x-1)+2e$

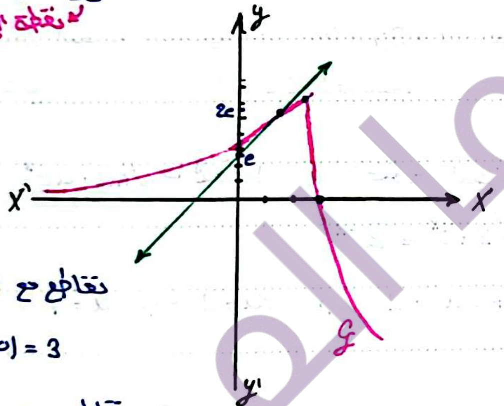
$d: y=ex-e+2e$

$d: y=ex+e$

x	0	1
y	e	$2e$

نقطة التماس $(1, 2e)$

نقطة التماس



تقاطع مع oy

$f(0)=3$

تقاطع مع ox

$f(x)=0$

$3=x$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[27] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2e^x-x-2$.

ⓐ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

ⓑ استنتج أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذرين، أحدهما يساوي الصفر.

ⓒ نرمز إلى الجذر الآخر بالرمز α. أثبت أنَّ $-2<\alpha<-1$.

ⓓ ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x.

ⓔ أثبت أن $\Delta: y=-x-2$ مقارب، ثم ارسم C.

الحل:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim x\left(2\frac{e^x}{x}-1\right)-2$

$= \infty(\infty-1)-2 = \infty$

$f'(x) = 2e^x-1$

$f'(x)=0 \to 2e^x=1 \to e^x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \ln e^x = \ln\frac{1}{2} \to x=\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$f(-\ln 2) = 2.e^{\ln\frac{1}{2}}+\ln 2-2$

$= 2\left(\frac{1}{2}\right)+\ln 2-2 = 1+\ln 2-2$

$= -1+\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

b. * f مستمر على $]-\infty,-\ln 2[$

f متناقص تماماً على $]-\infty,-\ln 2[$

$0\in f(]-\infty,-\ln 2[) =]-1+\ln 2,+\infty[$

للمعادلة حل وحيد على $]-\infty,-\ln 2[$

* f مستمر على $[-\ln 2,+\infty[$

f متزايد تماماً على $[-\ln 2,+\infty[$

$0\in f([-\ln 2,+\infty[) = [-1+\ln 2,+\infty[$

للمعادلة حل وحيد على $[-\ln 2,+\infty[$

← أي للمعادلة حلان على $\mathbb{R}$

$f(0) = 2e^0-0-2 = 2-0-2=0$

أي 0 حل

c. $f(-2) = 2e^{-2}+2-2 = \frac{2}{e^2} > 0$

$f(-1) = 2e^{-1}+1-2 = \frac{2}{e}-1 < 0$

$f(-2).f(-1) < 0$

أي α تحقق $-2<\alpha<-1$

d.

x	$-\infty$		α		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		$-1+\ln 2$	$\nearrow$	0		$+\infty$
إشارة f		$+$	0		$-$		0	$+$	

e. $y=-x-2$ مقارب مائل عند $-\infty$ لأن

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-y_\Delta = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$

$y=-x-2$

x	0	1
y	-2	-3

$-\ln 2 \simeq -0,7$

$-1+\ln 2 \simeq -0,3$

[28] f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

ⓐ ما نهاية f عند كلٍ من طرفي مجموعة تعريفه؟

ⓑ ادرس تغيرات f وارسم C.

ⓒ استنتج رسم الخط $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ انطلاقاً من C.

سما المجد التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل:

$$f(x)=\frac{1}{1+e^x}$$

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{1}{1+0}=1$

$\Delta_1: y=1$ مقارب أفقي للخط $\mathcal{G}$ في جوار $-\infty$

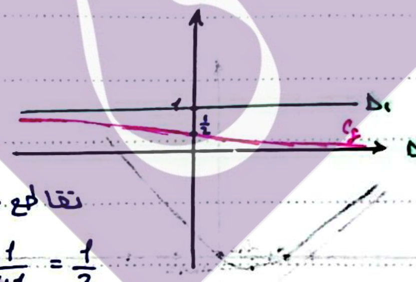
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{1+\infty}=0$

$\Delta_2: y=0$ مقارب أفقي للخط $\mathcal{G}$ في جوار $+\infty$

b. f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}<0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0



تقاطع مع oy

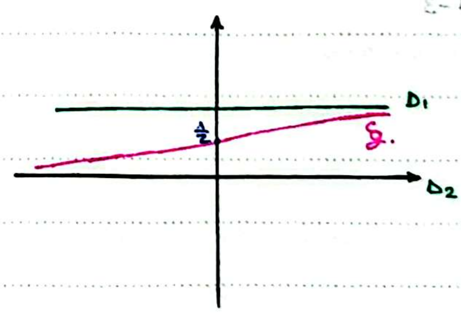
$f(0)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

c. $g(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$

$f(x)=\frac{1}{1+e^x}$

$f(-x)=\frac{1}{1+e^{-x}}=g(x)$

$\mathcal{G}$ متناظر مع $\mathcal{G}$ بالنسبة لمحور التراتيب oy



[29] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{2e^x-3}{e^x+1}$.

ⓐ لماذا المستقيمان $d_1: y=2$ و $d_2: y=-3$ مقاربان للخط C؟

ⓑ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

ⓒ اكتب معادلة المماس T في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب. $x=0$

ⓓ ادرس وضع C بالنسبة إلى T. و ارسم d_1 و d_2 و T و C.

ملاحظة : عند دراسة الإشارة
اذا لم نستطع ان نعلم لها نعدم
نشتقها ثانية وندرس تغيرات

الحل:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$

$y=-3$ مقارب أفقي عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim \frac{e^x(2-\frac{3}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=2$$

$y=2$ مقارب أفقي عند $+\infty$

$$f'(x)=\frac{2e^x(e^x+1)-e^x(2e^x-3)}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}+3e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{5e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2

c. المماس عند 0

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$

T $\boxed{y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}}$

d. الوضع النسبي :

$$f(x)-y_T=\frac{2e^x-3}{e^x+1}-\frac{5}{4}x+1$$

$$h(x)=\frac{2e^x-3}{e^x+1}-\frac{5}{4}x+1$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=2-\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$

$$h'(x)=\frac{5e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{5}{4}$$

$$=\frac{20e^x-5(e^x+1)^2}{4(e^x+1)^2}=\frac{20e^x-5(e^{2x}+2e^x+1)}{4(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{20e^x-5e^{2x}-10e^x-5}{4(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{-5e^{2x}+10e^x-5}{4(e^x+1)^2}=\frac{-5(e^{2x}-e^x+1)}{4(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{-5(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

$h'(x)=0 \rightarrow e^x-1=0 \quad e^x=1 \quad x=0$

$h(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
اشارة h		$+$	0	$-$	
C		فوق T	$(0,-\frac{1}{2})$ نقطة التماس	تحت T	

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[30] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\exp\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها. ارسم الخط C.

الحل:

$e^{\frac{x+1}{1-x}}$ $\qquad D=R$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$y=\frac{1}{e}$ مقارب أفقي عند $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$y=\frac{1}{e}$ مقارب أفقي عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=e^{\frac{2}{0^-}}=e^{-\infty}=0$ $\qquad 1-x=0 \quad x=1$

		1	
	$+$	0	$-$

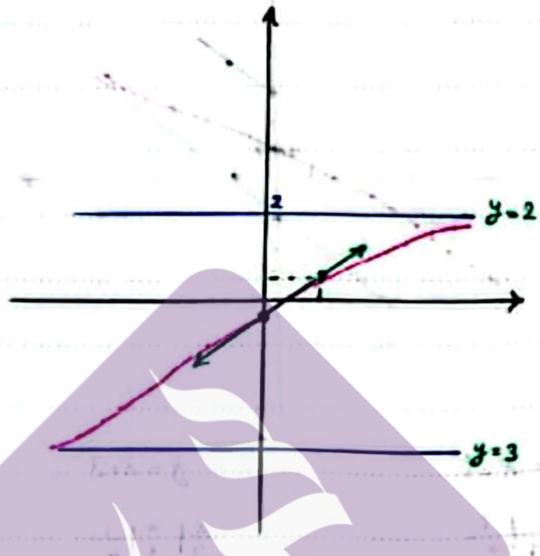
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=e^{\frac{2}{0^+}}=e^{\infty}=\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي

$f'(x)=e^{\frac{x+1}{1-x}}\left(\dfrac{1(1-x)+1(x+1)}{(1-x)^2}\right)$

$=e^{\frac{x+1}{1-x}}\left(\dfrac{1-x+x+1}{(1-x)^2}\right)=e^{\frac{x+1}{1-x}}\left(\dfrac{2}{(1-x)^2}\right)>0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	↗ $+\infty$	‖ 0	↗	$\frac{1}{e}$



$y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$

x	0	1
y	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[31] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+1}$.

ⓐ أثبت أنّ $d: y=x-1$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

ⓑ أثبت أنّ $d': y=x+3$ مقارب للخط C في جوار $-\infty$.

ⓒ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

ⓓ اكتب معادلة المماس T في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

ⓔ أدرس وضع C بالنسبة إلى T. ثُم ارسم d و d' و T و C.

الحل:

a. $d: y=x-1$ مقارب مائل عند $+\infty$ لأن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0$$

b. $d': y=x+3$ مقارب مائل عند $-\infty$ لأن

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_{d'})=\lim_{x\to-\infty}x-1+\frac{4}{e^x+1}-x-3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{e^x+1}-4=0$$

c. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$$f'(x)=1+\frac{-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$f'(x)=0 \rightarrow e^x=1 \rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ملاحظة:

d. $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

T $\boxed{y=1}$

لدراسة الوضع النسبي مع المستقيم الأفقي بعد التغيرات قد نلجأ الى سطر $f(x)$ في الجدول

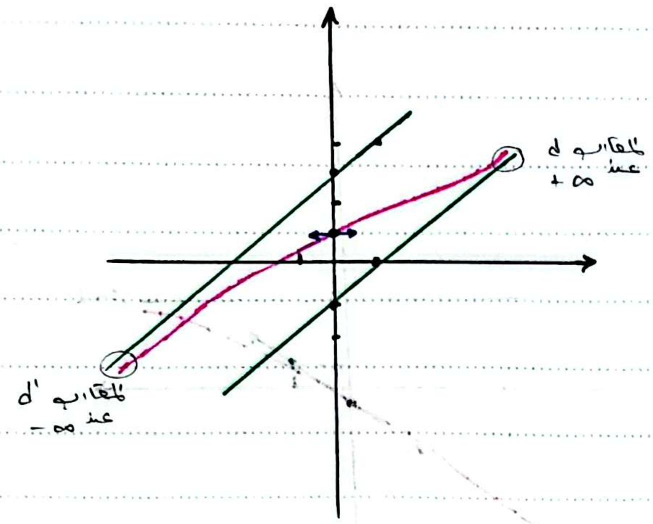
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
C		تحت T	0	فوق T	

الأرقام سالبة

نقطة التماس صفر لأنو ماقي مسافة بين النقطة والخط C

$(0,1)$

الأرقام فوق الـ 1 يعني موجبين



$y=x-1$

x	0	1
y	-1	0

$y=x+3$

x	0	1
y	3	4

سما المجد التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[32] ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\ln(e^{x}+e^{-x})$.

a) بيّن أنّ التابع f زوجي، وادرس تغيرات f على $I=[0,+\infty[$

b) أثبت أن $f(x)=x+\ln(1+e^{-2x})$

c) استنتج معادلة المقارب المائل عند $+\infty$. ثم ارسم C.

الحل:

a. $\forall x\in R \rightarrow -x\in R$ نحقق

$f(-x)=\ln(e^{-x}+e^{x})=\ln(e^{x}+e^{-x})=f(x)$

f تابع زوجي

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$f(0)=\ln(e^{0}+e^{0})=\ln 2$

$f'(x)=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}}(e^{x}+e^{-x})'$

$f'(x)=0\rightarrow e^{x}+e^{-x}=0\rightarrow e^{x}=e^{-x}\rightarrow x=-x\rightarrow 2x=0\rightarrow x=0$

$f(0)=\ln 2$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	$\ln 2$	↗	$+\infty$

b.

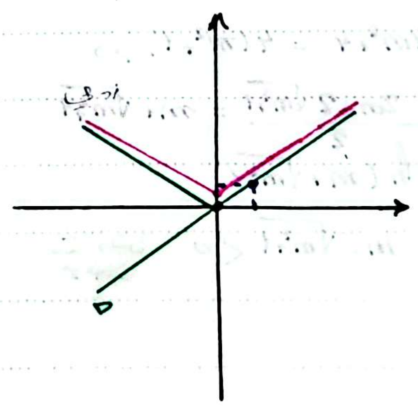
$f(x)=\ln(e^{x}+e^{-x})=\ln\left(e^{x}\left(1+\dfrac{e^{-x}}{e^{x}}\right)\right)$

$=\ln e^{x}+\ln(1+e^{-2x})=x+\ln(1+e^{-2x})$

c. $y=x$ مقارب مائل عند $+\infty$ لأن

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y_0=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-2x})=0$

Δ مقارب مائل عند $+\infty$



$y=x$

x	0	1
y	0	1

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[33] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$.

ⓐ بيّن أنّ التابع f فردي، ادرس تغيرات f ~~وارسم~~

ⓑ اكتب معادلة المماس d للخط C في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط C والمستقيم d وارسم C

ⓒ ليكن m عدداً حقيقياً. أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$. ليكن α هذا الحل.

ثم أثبت أن المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{2x}-2me^{x}-1=0$ ، و أنّ $\alpha=\ln(m+\sqrt{m^{2}+1})$.

الحل:

a.

$\forall x\in R \Rightarrow -x\in R$

$f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^{x})=-\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=-f(x)$ f فردي

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$f'(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b. $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ المماس عند 0

$\boxed{y=x}$ d

$f(x)-y_d=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})-x$

$h(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})-x$

$e^{x}\left[\frac{1}{2}(1-e^{-2x})-\frac{x}{e^{x}}\right]$

$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$

$h'(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})-1$

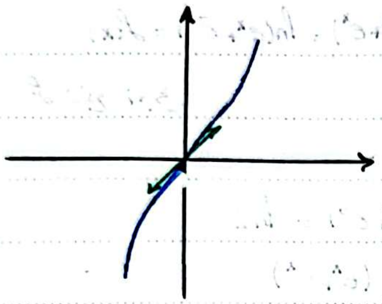
$=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}-2)=\frac{1}{2}(e^{x}+\frac{1}{e^{x}}-2)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{e^{x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(e^{x}-1)^{2}}{e^{x}}\right)=\frac{(e^{x}-1)^{2}}{2e^{x}}$

$h'(x)=0 \rightarrow (e^{x}-1)^{2}=0 \rightarrow e^{x}=1 \rightarrow x=0$

$\rightarrow f(0)=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
اشارة $h(x)$		$-$	0	$+$	
C		تحت d	(0,0) مشتركة (تماس)	فوق d	



c. $f(x)=m$

f مستمر على R   f متزايد تماماً على R

$m\in f(]-\infty,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

المعادلة $f(x)=m$ لها حل وحيد في IR

$f(x)=m$

$\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=m$

$e^{x}-e^{-x}=2m$

$e^{x}-\frac{1}{e^{x}}=2m$

$e^{2x}-1=2me^{x} \qquad e^{2x}-2me^{x}-1=0$

$D=b^{2}-4a.c$

$=4m^{2}-4(1)(-1)$

$=4m^{2}+4=4(m^{2}+1)>0$

$e^{x}=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2m+2\sqrt{m^{2}+1}}{2}=m+\sqrt{m^{2}+1}$

$\alpha=x=\ln(m+\sqrt{m^{2}+1})$

$e^{x}=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=m-\sqrt{m^{2}+1}<0$ متناقض مرفوض

سما المجد التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[34] ليكن f المعرف وفق $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$.

ⓐ جد D وأثبت $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

ⓑ أثبت أن d الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للخط C.

ⓒ أثبت أن الخط C يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

واكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها 0 منه.

ⓓ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها. وارسم كلاً من d و Δ و T،

ثم ارسم C في المعلم ذاته.

الحل:

a. $e^{2x} - e^{x} + 1 > 0 \rightarrow e^{2x} - e^{x} + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$-\infty \quad\quad +\infty$

$D = \mathbb{R}$

$e^{2x} - e^{x} + 1 = e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

$f(x) = \ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}))$

$= \ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

b. $f(x) - y_d = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x$

$= \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y_d = \ln(1 - 0 + 0) = \ln 1 = 0$

$y_d = 2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

c. $T: y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$f'(x) = 2 + \dfrac{1}{1 - e^{-x} + e^{-2x}} (e^{-x} - 2e^{-2x})$

$f'(x) = 2 + \dfrac{(e^{-x} - 2e^{-2x})}{1 - e^{-x} + e^{-2x}}$

$f'(0) = 2 + \dfrac{(e^{0} - 2e^{0})}{1 - e^{0} + e^{0}} = 2 - \dfrac{1}{1} = 1$

$f(0) = 0$

$T: y = 1(x - 0) + (0) \rightarrow T: y = x$ منصف الربع الأول والثالث

d. f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $D_1: y = 0$ مقارب افقي للخط C في جوار $-\infty$

$f'(x) = 2 + \dfrac{(e^{-x} - 2e^{-2x})}{1 - e^{-x} + e^{-2x}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2(1 - e^{-x} + e^{-2x}) + e^{-x} - 2e^{-2x} = 0$

$2 - \cancel{2e^{-x}} + \cancel{2e^{-2x}} + e^{-x} - \cancel{2e^{-2x}} = 0 \rightarrow 2 - e^{-x} = 0 \rightarrow 2 = e^{-x}$

$\ln 2 = \ln e^{-x} \rightarrow \ln 2 = -x \rightarrow x = -\ln 2$

$f(-\ln 2) = \ln(\frac{3}{4})$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

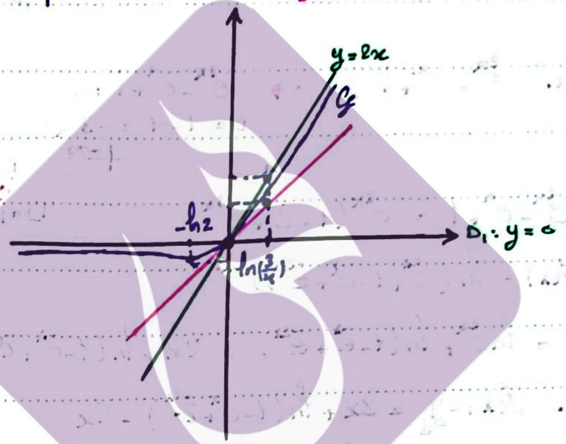
x	$-\infty$		$-\ln 2$ ($\simeq -0,7$)		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

المماس $y = x$

x	0	1
y	0	1

$d : y = 2x$

x	0	1
y	0	2



$\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 3 - \ln 4$

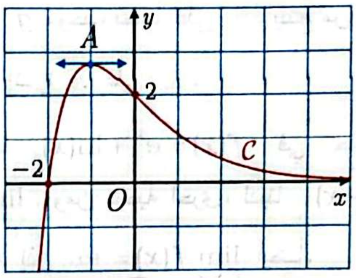
$= \ln 3 - 2\ln 2$

$\simeq 1,1 - 1,4 \simeq -0,3$

سما المجد التعليمية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

[35] C هو الخط البياني لتابعٍ f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(ax+b)e^{-x}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان. اعتماداً على ما تجد في الشكل:



ⓐ احسب قيمة a و b.

ⓑ احسب $f'(x)$ ، واستنتج إحداثيتي النقطة A الموافقة للقيمة الكبرى للتابع f.

ⓒ أثبت أنّ محور الفواصل مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

الحل:

a. $f(x)=(ax+b)e^{-x}$

$(0,2)\in C$

$f(0)=2$

$be^{0}=2 \rightarrow b=2$

$(-2,0)\in C$

$f(-2)=0$

$(-2a+b)e^{2}=0$

$-2a+b=0 \rightarrow -2a=-2 \rightarrow a=1$

$f(x)=(x+2)e^{-x}$

b. $f'(x)=e^{-x}+(-e^{-x})(x+2)$

$=e^{-x}(1-x-2)=e^{-x}(-x-1)$

المماس عند A أفقي

$f'(x)=0$

$e^{-x}(-x-1)=0 \rightarrow x=-1$

$f(-1)=e \qquad A(-1,e)$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim xe^{-x}+2e^{-x}$

$=\lim\left(\frac{x}{e^{x}}+2e^{-x}\right)$

$=0+0=0$

$y=0$ مقارب أفقي عند $+\infty$

تمارين عامة محلولة

[36] احسب التابع المشتق للتابع f.

① $f(x)=(x^2-2x)e^{x} \Rightarrow f'(x)=(x^2-2)e^{x}$

② $f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$

$\Rightarrow f'(x)=-(x^2-3x+2)e^{-x}$

③ $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{1+e^{-x}} \Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{e^{x}(e^{-x}+1)+e^{-x}(e^{x}-1)}{(e^{-x}+1)^2}=\frac{2+e^{x}-e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$$

④ $f(x)=\ln(1+e^{x}) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$

⑤ $f(x)=(\sin x+\cos x)e^{x} \Rightarrow f'(x)=2e^{x}\cos x$

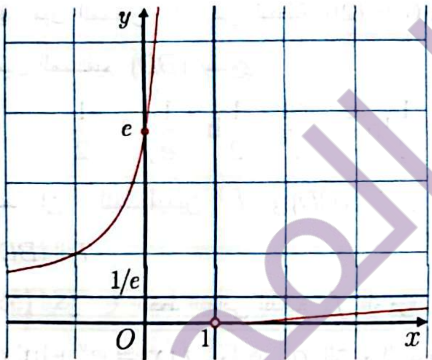
⑥ $f(x)=e^{-x}\ln x \Rightarrow f'(x)=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x\right)$

⑦ $f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1}$

[37] ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ بالصيغة $f(x)=\exp\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ وارسم خطه البياني.

الحل: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=e^{-1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e^{-1}$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$



لان

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x}{1-x}=-1$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{1-x}=-1$

و $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1+x}{1-x}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1+x}{1-x}=-\infty$

ومنه $y=e^{-1}$ مستقيم مقارب للخط البياني X للتابع f.

و $x=1$ مقارب للخط البياني X والنقطة $(1,0)$ نقطة مقاربة.

ولدينا $f'(x)=\dfrac{2}{(1-x)^2}e^{\frac{1+x}{1-x}}>0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	e^{-1} ↗	$+\infty$	‖	0 ↗	e^{-1}

[38] ليكن f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\ln(e^{-x}+1)$.

① جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة؟ وأثبت أنّ $f(x)=-x+\ln(e^{x}+1)$. استنتج أنّ C يقبل مقارباً مائلاً، وليكن d، في جوار $-\infty$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner