التابع اللوغاريتمي

1. التابع اللوغاريتمي النيبري أو الطبيعي:

- هو تابع يحول الجداء إلى مجموع ونرمز له $\ln$ حيث
$$f:]0,\infty[\to\mathbb{R}:\ f(x)=\ln x$$
- هو تابع معرف على $]0,+\infty[$ يحقق:
$$\ln 1=0 \text{ و } \ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$$
- هو تابع اشتقاقي ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$

مثال1: عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

- المقدار $\ln((x-1)(2-x))$ معرف على $D=]1,2[$.
- المقدار $\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ معرف على $D=]0,1[$.
- المقدار $\ln|x^2+2x|$ معرف عندما $x^2+2x\neq 0$ أي $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$

[1] عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

(1) $\ln(1+x)$ (2) $\ln(-x-3)$ (3) $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$

(4) $\dfrac{1}{\ln x}$ (5) $\ln(x^2-3x+2)$ (6) $\ln(x^2+4x)$

(7) $\ln(x^2)$ (8) $\ln|x+1|$ (9) $\ln\left(\dfrac{x-3}{2-x}\right)$

الحل:

(1) $\ln(1+x)$

$1+x>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow x\in]-1,+\infty[$

(2) $\ln(-x-3)$

$-x-3>0 \Rightarrow -3>x \Rightarrow x\in]-\infty,-3[$

(3) $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$

$x\neq 0$ ، $x+1>0$ ، $x>-1 \Rightarrow]-1,+\infty[$

$x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$

(4) $\dfrac{1}{\ln x}$

$x>0$ ، $]0,+\infty[$

$\ln x\neq 0$

$x\neq 1 \rightarrow \ln(1)=0$

$\Rightarrow]0,1[\cup]1,+\infty[$

(5) $\ln(x^2-3x+2)$ درجة ثانية لأنو نحدع

$x^2-3x+2>0$

$x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

$x=2$ $x=1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	
		يحقق				يحقق	

$x\in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

(6) $\ln(x^2+4x)$

$x^2+4x>0$

$x^2+4x=0$

$x(x+4)=0$

$x=0$ $x=-4$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
x^2+4x		+	0	−	0	+	
		يحقق				يحقق	

$x\in]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

(7) $\ln(x^2)$

$x^2>0$ $x^2=0$ $x=0$

x		0	
x^2	+	0	+
	يحقق		يحقق

$x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^*$

(8) $\ln|x+1|$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

(9) $\ln\left(\dfrac{x-3}{2-x}\right)$ $\dfrac{x-3}{2-x}>0$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$\dfrac{x-3}{2-x}$		−	‖	+	0	−	
				يحقق			

$x\in]2,3[$

2. خواص التابع اللوغاريتمي: أياً يكن $a>0$ و $b>0$:

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$	$\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$
$\ln 1=0$	$\ln a^n=n\ln a$

دبل كيك

مثال2: بسّط كلاً من العبارات الآتية، علماً أنّ x عدد حقيقي.

- $A=\ln\dfrac{2}{3}+\ln\dfrac{3}{2}=\ln\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{2}\right)=\ln 1=0$.
- $B=\ln 8-\ln 2=\ln\dfrac{8}{2}=\ln 4=\ln 2^2=2\ln 2$.
- $C=\ln\dfrac{16}{25}-\ln 16=\ln 16-\ln 25-\ln 16=-2\ln 5$

[2] بسِّط كتابة الأعداد الآتية:

ⓐ $a=\ln 3+\ln\frac{1}{3}$ ⓑ $b=\ln\frac{1}{16}$ ⓒ $c=2\ln\sqrt{2}$

ⓓ $d=\ln 50$ ⓔ $e=\ln\frac{16}{25}$ ⓕ $f=\ln 250$

ⓖ $g=\ln 81+\ln\frac{1}{27}-\ln 72-\ln\frac{7}{8}$

ⓗ $h=\ln\sqrt{75}-\ln 15-\ln\sqrt{27}$

الحل:

a. $a=\ln 3+\ln\frac{1}{3}$

$a=\ln(3\times\frac{1}{3})=\ln(1)=0$ ط1

$a=\ln 3+\ln 1-\ln 3=\ln(1)=0$ ط2

b. $b=\ln\frac{1}{16}$

$=\ln 1-\ln 16=0-\ln 2^4=-4\ln 2$

c. $c=2\ln\sqrt{2}$

$c=\ln(\sqrt{2})^2=\ln 2$ ط1

$c=2\ln(2)^{\frac{1}{2}}=2(\frac{1}{2})\ln(2)=\ln(2)$ ط2

d. $d=\ln 50$

$=\ln(25\times 2)$

$=\ln(25)+\ln(2)\quad=\ln(5)^2+\ln(2)$

$=2\ln(5)+\ln(2)$

e. $e=\ln(\frac{16}{25})$

$=\ln 16-\ln 25$

$=\ln 2^4-\ln 5^2$

$=4\ln 2-2\ln 5$

f. $f=\ln 250$

$=\ln(125\times 2)$

$=\ln(5)^3+\ln(2)$

$=3\ln 5+\ln 2$

g. $g=\ln 81+\ln\frac{1}{27}-\ln 72-\ln\frac{7}{8}$

$=\ln 81+\ln\frac{1}{27}-(\ln 72+\ln\frac{7}{8})$

$=\ln(81\times\frac{1}{27})-\ln(72\times\frac{7}{8})$

$=\ln(3)-\ln(9\times 7)$

$=\ln(\frac{3}{9\times 7})=\ln(\frac{1}{21})$

$=\ln 1-\ln 21$

$=-\ln 21$

$=-\ln(3\times 7)$

$=-(\ln 3+\ln 7)=-\ln 3-\ln 7$

h. $h=\ln\sqrt{75}-\ln 15-\ln\sqrt{27}$

$=\ln 5\sqrt{3}-\ln(5\times 3)-\ln 3\sqrt{3}$

$=\cancel{\ln 5}+\cancel{\ln\sqrt{3}}-\cancel{\ln 5}-\ln 3-\ln 3-\cancel{\ln\sqrt{3}}$

$=-2\ln 3$

$=\ln(3)^{-2}$

$=\ln(\frac{1}{3^2})=\ln(\frac{1}{9})$

[3] أثبت أنّ $\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})=0$.

الحل:

$L_1=\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})$

$=\ln((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))$

$=\ln(4-3)$

$=\ln(1)=0=L_2$

[4] قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

ⓐ $x=\ln 5,\quad y=\ln 2+\ln 3$

ⓑ $x=2\ln 3,\quad y=3\ln 2$

الحل:

a. $x=\ln 5\qquad y=\ln 2+\ln 3$

$x=\ln 5\qquad y=\ln(2\times 3)=\ln 6$

$\rightarrow y>x$

b. $x=2\ln 3\qquad y=3\ln 2$

$x=\ln 3^2\qquad =\ln 2^3$

$=\ln 9\qquad =\ln 8$

$\rightarrow x>y$

3. حل المعادلات

الخطوات:

- نوجد شرط الحل E
- نوجد حلول المعادلة ثم ندرس انتماء الحلول إلى شرط الحل.

ملاحظة: لحل المعادلة $\ln a = \ln b$ نكتفي بشرط طرف واحد.

نراعي القاعدة $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

مثال3: حل المعادلات الآتية:

ⓐ $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$.

نكتفي بشرط الطرف الاول $E =]\frac{4}{3}, +\infty[$.

$$\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$$
$$3x-4 = x^2-4$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x_1 = 0 \notin E,\quad x_2 = 3 \in E_g$$

الحل هو $S = \{3\}$.

ⓑ $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

شرط الحل:

$2x-3>0$ و $6-x>0$ و $x>0$ ومنه $E =]\frac{3}{2}, 6[$.

$$\frac{1}{2}\ln(2x-3) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$$
$$\ln(2x-3) = 2\ln(6-x) - \ln x$$
$$\ln(2x-3) + \ln x = \ln(6-x)^2$$
$$\ln(2x^2-3x) = \ln(6-x)^2$$
$$2x^2-3x = (6-x)^2$$
$$x^2+9x-36 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-3) = 0$$
$$x_1 = -12 \notin D, x_2 = 3 \in D \Rightarrow S = \{3\}$$

ملاحظة: نفترض أن حل المعادلة $\ln(x) = 1$ هو العدد $x = e$

أي $\ln e = 1$

نضرب الطرفي بالعدد حقيقي m نجد $m\ln e = m$.

ومنه $\ln(e^m) = m$

أ حل المعادلة $\ln x = m$ هو $x = e^m$

حيث **العدد النيبري** e يساوي تقريباً 2.7182818284590.

[5] حل المعادلات الآتية:

ⓐ $\ln(x+11) = \ln(2x+3)$ ⓑ $\ln(x+1) = \ln(x^2-1)$

ⓒ $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$ ⓓ $\ln x^2 = \ln(2x^2+8x)$

ⓔ $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$ ⓕ $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$

ⓖ $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$ ⓗ $\ln(1-x) = -2$

ⓘ $\ln(x-2) = 2 + \ln(x+1)$ ⓙ $(\ln x)^2 = 16$

الحل:

$\ln = \ln$ نكتفي طرف واحد

$\ln = \ln + \ln$ نشترط كل حد

a. $\ln(x+11) = \ln(2x+3)$

$x+11>0 \Rightarrow x>-11$

$E =]-11, +\infty[$

$x+11 = 2x+3 \rightarrow -x = -8 \rightarrow x = 8 \in E$

$S = \{8\}$

b. $\ln(x+1) = \ln(x^2-1)$

$x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$E =]-1, +\infty[$

$x+1 = x^2-1 \Rightarrow x^2-x-2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

$x = 2 \in E \quad x = -1 \notin E$

$S = \{2\}$

c. $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

$x>0 \quad x>-4 \quad x>0$

$-4 \quad 0$

$E =]0, +\infty[$

$\ln x^2 = \ln(x+4)(2x)$

$x^2 = 2x^2+8x \qquad x^2+8x = 0$

$x(x+8) = 0$

$x = 0 \notin E \qquad x = -8 \notin E$

$S = \emptyset$

d. $\ln x^2 = \ln(2x^2+8x)$

$x^2>0 \rightarrow x \neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
	+	0	+

$E = R \setminus \{0\}$

$x^2 = 2x^2+8x \rightarrow x^2+8x = 0 \rightarrow x(x+8) = 0$

$x = 0 \notin E \qquad x = -8 \in E$

$S = \{-8\}$

E. $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$

$x>-11 \quad x>-3 \quad x>-2$

$-11 \quad -3 \quad -2$

$E =]-2, +\infty[$

$\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)$

$x+11 = x^2+5x+6$

$x^2+4x-5 = 0 \qquad (x+5)(x-1) = 0$

$x = -5 \notin E \qquad x = 1 \in E$

$S = \{1\}$

h. $\ln(1-x) = -2$

$1-x>0 \Rightarrow x<1 \qquad E =]-\infty, 1[$

$\ln(1-x) = \ln e^{-2}$

$1-x = e^{-2} \rightarrow x = 1-e^{-2}$

$S = \{1-e^{-2}\}$

j. $(\ln x)^2 = 16$

$x>0 \qquad E =]0, +\infty[$

إما $\ln x = 4$

$\ln x = \ln e^4$

$x = e^4$

أو $\ln x = -4$

$\ln x = \ln e^{-4}$

$x = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$

$S = \left\{\frac{1}{e^4}, e^4\right\}$

f. $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$

$2x>0 \rightarrow x>0 \Rightarrow E =]0, +\infty[$

$2x = x^2-1 \rightarrow x^2-2x-1=0$

$\Delta = b^2-4a.c$

$= 4-4(1)(-1) = 8 > 0$

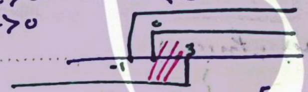
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{2} = 1+\sqrt{2} \in E$

$x_2 = 1-\sqrt{2} \notin E$

$S = \{1+\sqrt{2}\}$

g. $\underbrace{\frac{1}{2}\ln(2x)}_{\substack{2x>0 \\ x>0}} = \underbrace{\ln(3-x)}_{x<3} - \underbrace{\ln\sqrt{x+1}}_{x>-1}$

شرط اللوغاريتم اقوى من شرط الجذر



$E =]0, 3[$

$\cancel{\ln}\sqrt{2x} = \cancel{\ln}\left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}\right)$

$\sqrt{2x} = \frac{3-x}{\sqrt{x+1}} \qquad 2x = \frac{(3-x)^2}{x+1}$

$2x^2+2x = 9-6x+x^2$

$x^2+8x-9=0 \qquad (x+9)(x-1)=0$

$x=-9 \notin E \qquad x=1 \in E$

$S = \{1\}$

i. $\underbrace{\ln(x-2)}_{x>2} = 2 + \underbrace{\ln(x+1)}_{x>-1}$

$E =]2, +\infty[$

$\ln(x-2) = \ln e^2 + \ln(x+1)$

$\ln(x-2) = \ln(e^2(x+1))$

$x-2 = e^2x+e^2$

$x-e^2x = 2+e^2$

$(1-e^2)x = 2+e^2 \qquad x = \frac{2+e^2}{1-e^2} < 0 \notin E$

$S = \emptyset$

4. حل المتراجحات

الخطوات:

- نوجد شرط الحل E
- نوجد حلول المتراجحة ثم نقاطع الحلول مع شرط الحل.

ملاحظة: لحل المتراجحة $\ln g(x) < \ln h(x)$ نكتفي بشرط الطرف الاصغر. ونراعي القاعدة $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

مثال4: حل المتراجحات الآتية:

ⓐ $\ln(x^2-4) \le \ln(-3x)$.

نكتفي بشرط الطرف الأصغر أي $x^2-4>0$

ومنه $(x-2)(x+2)>0$ أي $E=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

$$\ln(x^2-4) \le \ln(-3x)$$
$$x^2-4 \le -3x$$
$$(x+4)(x-1) \le 0 \Rightarrow x \in [-4,1]$$

مجموعة حلول المتراجحة هي $S=[-4,-2[$

ⓑ $\ln 3 \le \ln(5-x)+\ln(x-1)$ المتراجحة معرفة في حالة $x<5$ و $x>1$، ومنه شرط $E=]1,5[$.

ومنه $\ln 3 \le [\ln(5-x)(x-1)]$

$(x-2)(x-4) \le 0$ ومنه $\ln 3 \le \ln(-x^2+6x-5)$

حلول المتراجحة هي $[2,4]$

ⓒ $(\ln x+2)(\ln x-3) \le 0$ شرط الحل $]0,+\infty[$

وينعدم الطرف الأول عند $x=e^{-2}, x=e^3$

x	0		e^{-2}		e^3		$+\infty$
$(\ln x+2)(\ln x-3)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

حلول المتراجحة هي $[e^{-2},e^3]$.

ⓓ $0.2 \ge \left(\frac{2}{5}\right)^n$ تكافئ $\ln(0.2) \ge n\ln(0.4)$ ولكن $\ln(0.4)<0$

ومنه $n \ge \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.4)} = \frac{\ln 5}{\ln 5-\ln 2} \approx 1.76$. ومنه $n \ge 2$.

ⓔ $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \ge 2$ تكافئ $n \times \ln\left(1+\frac{3}{100}\right) \ge \ln 2$ وهي تكافئ $n \ge \frac{\ln 2}{\ln(1.03)} \approx 23.45$، فمجموعة قيم n هي $n \ge 24$.

[6] حلّ كلّ متراجحة فيما يأتي:

ⓐ $\ln(x-2) \le \ln(2x-1)$ ⓑ $\ln(3-x) \le \ln x+\ln(x+1)$

ⓒ $\ln x \le \ln(x^2-2x)$ ⓓ $\ln(6x+4) \le \ln(3x^2-x-2)$

ⓔ $\ln(x+1) \ge \ln(x^2-1)$ ⓕ $\ln(3x^2-x) \le \ln x+\ln 2$

ⓖ $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \ge \ln x$ ⓗ $3\ln x > \ln(3x-2)$

الحل:

a. $\ln(x-2) \le \ln(2x-1)$

$x-2>0$

$x>2$

$\rightarrow E =]2,+\infty[$

$x-2 \le 2x-1 \rightarrow -1 \le x$ $\quad -1,+\infty[$

$\rightarrow S =]2,+\infty[$

b. $\ln(3-x) \le \ln x+\ln(x+1)$

$3-x>0$ $\quad x>0$ $\quad x+1>0$

$x<3$ $\quad]0,+\infty[$ $\quad x>-1$

$]-\infty,3[$ $\quad]-1,+\infty[$

$\rightarrow E =]0,3[$

$\ln(3-x) \le \ln(x^2+x)$

$3-x \le x^2+x$

$0 \le x^2+2x-3$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ $\quad x=1$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$]-\infty,-3]\cup[1,+\infty[$

$\rightarrow S = [1,3[$

e. $\ln(x+1) \geq \ln(x^2-1)$

$x^2-1>0$

$x^2-1=0$

$(x-1)(x+1)=0$

$X=1 \quad X=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$E =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$x+1 \geq x^2-1$

$0 \geq x^2-x-2$

$x^2-x-2=0$

$(X-2)(x+1)=0$

$X=2 \quad x=-1$

	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$[-1, 2]$

$\Rightarrow S =]1, 2]$

f. $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$

$3x^2-x>0 \qquad x>0$

$3x^2-x=0 \qquad]0,+\infty[$

$x(3x-1)=0$

$x=0 \quad x=\frac{1}{3}$

		0		$\frac{1}{3}$	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$E =]\frac{1}{3},+\infty[$

$\ln(3x^2-x) \leq \ln(2x)$

$3x^2-x \leq 2x$

$3x^2-3x \leq 0$

$3x^2-3x=0$

$3x(x-1)=0$

$X=0 \quad x=1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x^2-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$[0, 1]$

$\Rightarrow S =]\frac{1}{3}, 1]$

c. $\ln x \leq \ln(x^2-2x)$

$x>0$

$E =]0,+\infty[$

$x \leq x^2-2x$

$0 \leq x^2-3x$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$X=0 \quad x=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$]-\infty,0] \cup [\ ,+\infty[$

$\Rightarrow S = [3,+\infty[$

d. $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2-x-2)$

$6x+4>0$

$6x>-4$

$x>-\frac{2}{3}$

$E =]-\frac{2}{3},+\infty[$

$6x+4 \leq 3x^2-x-2$

$0 \leq 3x^2-7x-6$

$3x^2-7x-6=0$

$a=3 \quad b=-7 \quad c=-6$

$D = b^2-4a.c$

$= 49-4(3)(-6) = 121 > 0 \qquad \sqrt{121}=11$

$X_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{7+11}{6} = 3$

$X_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{7-11}{6} = \frac{-2}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$3x^2-7x-6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [3,+\infty[$

$\Rightarrow S = [3,+\infty[$

$(x-1)(x^2+x-2)=0$

b) $x-1=0$ .... $x=1$

د) $(x+2)(x-1)=0$

$x=-2 \quad x=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^3-3x+2		$-$	0	$+$	0	$+$	
			م		م		

$]-2,1[\,\cup\,]1,+\infty[$

$\Rightarrow S=]\frac{2}{3},1[\,\cup\,]1,+\infty[$

g. $\ln(1+\frac{2}{x}) \geq \ln x$
$x>0$

$E=]0,+\infty[$

$1+\frac{2}{x} \geq x$

$0 \geq x-1-\frac{2}{x}$

$0 \geq \frac{x^2-x-2}{x}$

$x^2-x-2=0$ البسط $x=0$ المقام

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2 \quad x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-x-2}{x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
		م				م			

$]-\infty,-1]\,\cup\,]0,2]$

$\Rightarrow S=]0,2]$

h. $3\ln x > \ln(3x-2)$

$x>0 \qquad 3x-2>0$

$x>\frac{2}{3}$

$]0,+\infty[\qquad]\frac{2}{3},+\infty[$

$E=]\frac{2}{3},+\infty[$

$\ln x^3 > \ln(3x-2)$

$x^3 > 3x-2$

$x^3-3x+2>0$

$x^3-3x+2=0$

بالتجريب: $(1)^3-3(1)+2=0$

$x=1$ يعدم المقدار نقسم قسمة اقليدية

على $x-1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-3x+2 & x-1 \\
\hline
-(x^3-x^2) & x^2+x-2 \\
x^2-3x+2 & \\
-(x^2-x) & \\
-2x+2 & \\
-(-2x+2) & \\
00 &
\end{array}
$$

[7] حل كلاً من المعادلة والمتراجحة المعطاة

ⓐ $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$ ، و $(\ln x)^2-2\ln x-3\ge 0$.

الحل:

a. $(\ln\ )^2-2\ln x-3=0$

حل 1: $x>0 \Longrightarrow E=]0,+\infty[$

$a=1 \quad b=-2 \quad c=-3$

$D=b^2-4ac=4+12=16 \qquad \sqrt{D}=4$

$\ln x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+4}{2}=3 \rightarrow \ln x=3 \rightarrow x=e^3$

$\ln x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-4}{2}=- \rightarrow \ln x=- \rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

حل 2: $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$

$(\ln x-3)(\ln x+1)=0$

اما $\ln x=3 \rightarrow x=e^3$

او $\ln x=-1 \rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

حل المتراجحة:

$(\ln x)^2-2\ln x-3\geq 0$

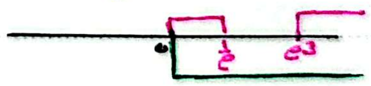
$x>0 \rightarrow E=]0,+\infty[$

$(\ln x)^2-2\ln x-3=0$

$x=e^3 \qquad x=\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
$(\ln x)^2-2\ln x-3$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow]0,\frac{1}{e}]\cup[e^3,+\infty[$



$S=]0,\frac{1}{e}]\cup[e^3,+\infty[$

[8] جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

ⓐ $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ \ln x+\ln y=\ln 3 \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} 2\ln x+\ln y=7 \\ 3\ln x-5\ln y=4 \end{cases}$

ⓒ $\begin{cases} (\ln x)(\ln y)=-12 \\ \ln(xy)=1 \end{cases}$

الحل:

a. $x^2+y^2=10$

$\ln x+\ln y=\ln 3$

$x>0 \qquad y>0$

$x\in]0,+\infty[\qquad y\in]0,+\infty[$

نطبق خواص اللوغاريتم في المعادلة الثانية

$\ln x+\ln y=\ln 3$

$\ln(xy)=\ln 3$

$x.y=3$

حل جملة المعادلتين

$x^2+y^2=10$ (1)

$x.y=3$ (2)

من (2) * $\boxed{x=\frac{3}{y}}$

نعوض في (1) ب *

$\frac{9}{y^2}+y^2=10$

$9+(y^2)^2=10y^2$

$(y^2)^2-10y^2+9=0$

نفرض $y^2=t$

$t^2-10t+9=0$

$\underbrace{(t-1)(t-9)=0}$

$y^2=1 \qquad\qquad y^2=9$

$y=1$ مقبول $\quad y=-1$ مرفوض $\qquad y=3$ مقبول $\quad y=-3$ مرفوض

نعوض ب * $\qquad\qquad$ نعوض ب *

$x=3 \qquad\qquad x=1$

الحل الأول $(3,1)$ $\qquad$ الحل الثاني $(1,3)$

b. $2\ln x+\ln y=7$ ①

$3\ln x-5\ln y=4$ ②

$x>0 \quad y>0$

$x\in\,]0,+\infty[\quad y\in\,]0,+\infty[$

من ① نجد : $\boxed{\ln y=7-2\ln x}$ ③

نعوض عنه ② :

$3\ln x-5(7-2\ln x)=4$

$3\ln x-35+10\ln x=4$

$13\ln x=39 \rightarrow \ln x=\frac{39}{13}=3$

$\ln x=\ln e^3 \rightarrow x=e^3$

نعوض عنه ③ : $\ln y=7-6=1=\ln e^1$

$y=e \rightarrow S=\{e^3,e\}$

c. $(\ln x)(\ln y)=-12$

$\ln(xy)=1$

$E:\ x>0 \quad y>0$

$(\ln x)(\ln y)=-12$

$\ln x+\ln y=1$

$\ln x=4=\ln e^4 \rightarrow x=e^4$

$\ln y=-3=\ln e^{-3} \rightarrow y=e^{-3}$

$S=\{(e^4,e^{-3}),(e^{-3},e^4)\}$ لأنهم متناظرين

[9] كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة جذران مختلفان؟

$$x^2-2x+\ln(m+1)=0$$

الحل:

لكي يكون للمعادلة حلان يجب ان يكون

$\Delta>0$

$b^2-4ac>0$

شرط الحل: $m>-1$

$m\in\,]-1,+\infty[$

$4-4(1)(\ln(m+1))>0$

$4>4\ln(m+1)$

$1>\ln(m+1)$

$\ln e>\ln(m+1)$

$e>m+1 \rightarrow m<e-1$

$m\in\,]-1,e-1[$

مثال5: حل كلاً من المعادلات الآتية:

① $\ln|x+2|+\ln|x-2|=0$

② $\ln|x-2|+\ln(x+4)=3\ln 2$

③ $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$

الحل:

① $\ln|x+2|+\ln|x-2|=0$

شرط الحل $E=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

وهي تكافئ $|x-2||x+2|=1$ أو $|x^2-4|=1$.

فإما أن يكون $x^2=5$ أو يكون $x^2=3$.

ومنه مجموعة حلول المعادلة $S=\{-\sqrt{5},-\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$

② $\ln|x-2|+\ln(x+4)=3\ln 2$

شرط الحل $E=\,]-4,2[\cup]2,+\infty[$.

$|x-2|(x+4)=8$

فإما أن يكون $x>2$ و $x^2+2x-16=0$

ومنه $x=\sqrt{17}-1$ (الجذر الآخر مرفوض).

أو يكون $x<2$ و $x^2+2x=0$

ومنه $x=0$ و $x=-2$.

مجموعة الحلول هي $\{-2,0,\sqrt{17}-1\}$.

③ $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$ شرط الحل $E=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2},0,1\}$.

وهي تكافئ $|2x^2+x-3|=x^2$

إما $x^2+x-3=0$

ومنه $x=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

أو $3x^2+x-3=0$

ومنه $x=\frac{-1-\sqrt{37}}{6}, x=\frac{-1+\sqrt{37}}{6}$.

مجموعة الحلول هي

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{37}}{6},\frac{-1-\sqrt{37}}{6},\frac{-1+\sqrt{13}}{2},\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

5. نهاية التابع اللوغاريتمي:

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$

$\ln 1=0$ $\quad \ln\,]1,+\infty[\,>0$ $\quad \ln x\in\mathbb{R}$

$\ln(0^+)=-\infty$ $\quad \ln\,]0,1[\,<0$ $\quad D_{\ln}=]0,+\infty[$

$\ln(+\infty)=+\infty$ $\quad \frac{+\infty}{0^+}=+\infty$ $\quad \frac{+\infty}{0^-}=-\infty$

قواعد النهايات

$\boxed{\ln(1)} \rightarrow \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$

$\boxed{\ln(\infty)} \rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

$\boxed{\ln(0)} \rightarrow \lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$

في حالات عدم التعيين غالباً نتبع

حالة $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ و $+\infty-\infty$: عامل مشترك أو قواعد

حالة $0\times(\pm\infty)$: نشر أو قواعد

حالة $\frac{0}{0}$: قواعد

$\ln 1 \to \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ مقلوب 1

$\ln\infty \to \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ مقلوبا $\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\ln 0 \to \lim\limits_{x\to0}x\ln x=0^-$ مقلوب $\frac{1}{0^-}=-\infty$

مثال6: احسب كلاً من نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$:

ⓐ $f(x)=x^2-3\ln x \quad a=+\infty$

نكتب $f(x)=x^2\left(1-\frac{3}{x}\times\frac{\ln x}{x}\right)=f(x)=x^2\left(1-3\times\frac{\ln x}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3\ln x}{x^2}\right)=1$.

ⓑ $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x \quad a=0$

نكتب $f(x)=\frac{1+x\ln x}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$

لأنّ $\lim\limits_{x\to0}(x\ln x)=0$ والمقام يسعى إلى الصفر بقيم موجبة.

ⓒ $f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x+2) \quad a=+\infty$

$f(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ln 2$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2}=2$.

ⓓ $f(x)=\frac{x+\ln x}{x} \quad a=+\infty$

نكتب $f(x)=\frac{x(1+\frac{\ln x}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}=\frac{1+\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

[10] جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه.

ⓐ $f(x)=x-\ln x$ ⓑ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ⓒ $f(x)=(x^2-x)\ln x$ ⓓ $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$

ⓔ $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ⓕ $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

ⓖ $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ ⓗ $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$

ⓘ $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x-1)$ ⓙ $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

ⓚ $f(x)=x(1-\ln x)$ ⓛ $f(x)=x+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

ⓜ $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ ⓝ $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$

الحل:

a. $f(x)=x-\ln x \qquad D=]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0+\infty=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty-\infty$ ع.ت.ع

$=\lim x\left[1-\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty(1-0)=+\infty$

b. $f(x)=\frac{\ln x}{x} \qquad D=]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\frac{\ln 0}{0}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ قواعد ع.ت.ع $\frac{\infty}{\infty}$

h. $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{x}$ $D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{+\infty}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1 - 0 = 1$

j. $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$ $D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 + \ln 1 - \ln 0 = \infty + \infty = +\infty$

$f(x) = x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty + \ln 1 = \infty + 0 = \infty$

i. $f(x) = \dfrac{1}{x}(\ln x - 1)$ $D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

k. $f(x) = x(1 - \ln x)$ $D =]0, +\infty[$

$f(x) = x - x\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 - 0 = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(1 - \infty) = -\infty$

L. $f(x) = x + x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

$1 + \dfrac{1}{x} > 0$ $\dfrac{x+1}{x} > 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\frac{x+1}{x}$		+	0	−	‖	+	

$D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

عند $\pm\infty$

أ) $f(x) = x\left(1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty(1 + \ln 1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty(1 + \ln 1) = +\infty$

b) $f(x) = x + x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}\cdot x \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$= x + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to \pm\infty \\ \frac{1}{x}\to 0}} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$ عند -1

$f(x) = x + (x)(1+x)\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ عند 0

$= x + (x+1)\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 + (0+1)(0) = 0$

c. $f(x) = (x^2 - x)\ln x$ $D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \overset{\text{بسيط}}{\infty}(\infty) = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$= \lim x \cdot x\ln x - x\ln = 0 \cdot 0 - 0 = 0$

d. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ $D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ $\infty - \infty$ ح.ع.ت

$= \lim \dfrac{1}{x}\left[1 + \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right]$

$= \lim \dfrac{1}{x}\left[1 + x\ln x\right] = \infty(1 + 0) = \infty$

e. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ $D =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\ln 0}{0^+} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$

$= \lim \dfrac{\ln x}{x} \cdot \dfrac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$

f. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{\ln 0} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

g. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$

$\dfrac{x+1}{x-4} > 0$

$x - 4 \neq 0$ $x \neq 4$ $x = -1$

حسب مجموعة تعريف الـ ln

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\frac{x+1}{x-4}$		+	0	−	‖	+	
المراجعة		م	‖		‖	م	

ليست مقبولة

$D =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \ln 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \ln\left(\dfrac{5}{0^+}\right) = \ln +\infty = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \ln 0 = -\infty$

m. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$x \geq 0$ $\quad x > 0$ $\quad \ln x \neq 0$

$[0, +\infty[$ $\quad]0, +\infty[$ $\quad x \neq 1$

$D =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

$=]0, 1[\cup]1, +\infty[$

عند 0:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

عند 1: $x = 1$ $\quad \ln x = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\ln x$	0	1
	$-$	$+$

لا يوجد لـ f نهاية عند 1

عند $+\infty$:

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$= \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\sqrt{x}}{2 \ln \sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}(+\infty) = +\infty$

n. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$

$x + 1 \neq 0 \quad x \neq -1$ $\quad x > 0$

$]0, +\infty[$

$D =]0, +\infty[\setminus \{-1\}$

$=]0, +\infty[$

عند 0:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{0+1} = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

عند $+\infty$:

$f(x) = \dfrac{x \ln x}{x(1 + \frac{1}{x})} = \dfrac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{1+0} = +\infty$

6: اشتقاق التابع الأسي واللوغاريتمي:

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- عندما يكونا لدينا حشوة غير x نضرب بمشتق الحشوة.

مثال7: احسب $f'(x)$ لكل من التوابع الآتية :

ⓐ $f(x) = x^2 + \ln x$ ومنه $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$

ⓑ $f(x) = \ln(x^3+1)$ أي $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+1}$

[11] جد $f'(x)$ لكلٍ من التوابع الآتية:

ⓐ $f(x) = x - \ln x$ ⓒ $f(x) = \ln(x^2+1)$

ⓑ $f(x) = x\ln x$ ⓓ $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

ⓔ $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$ ⓕ $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{x}$

ⓖ $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ ⓗ $f(x) = (x^2 - x)\ln x$

الحل:

a. $f(x) = x - \ln x$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

b. $f(x) = x\ln x$

$f'(x) = (1)(\ln x) + (\frac{1}{x})x = \ln x + 1$

c. $f(x) = \ln(x^2+1)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

d. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{(\frac{1}{x})(x) - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

e. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-4}}\left(\frac{x-4-x-1}{(x-4)^2}\right) = \frac{x-4}{x+1}\left(\frac{-5}{(x-4)^2}\right)$

$= \frac{-5}{(x+1)(x-4)}$

f. $f(x) = \frac{x-\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{(1-\frac{1}{x})(x) - (x-\ln x)}{x^2} = \frac{x-1-x+\ln x}{x^2} = \frac{-1+\ln x}{x^2}$

g. $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x(x+1)}$

h. $f(x) = (x^2-x)\ln x$

$f'(x) = (2x-1)\ln x + (\frac{1}{x})(x^2-x)$

$= (2x-1)\ln x + x - 1$

مبرهنة: إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على المجال I وموجباً تماماً على I، كان التابع $x \mapsto \ln(u(x))$ اشتقاقياً على I .

[12] أثبت أنّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f' .

ⓐ $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(1+x^2)$

ⓑ $I =]1,+\infty[, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

ⓒ $I =]0,+\infty[, \quad f(x) = x^2 + \ln(x)$

الحل:

ملاحظة: في التابع المركب اللوغاريتمي نحلل ان الحشوة موجبة تماماً واشتقاقياً

a. $f(x) = \ln(1+x^2) \qquad I = \mathbb{R}$

إن f اشتقاقي على R حيث

$x \mapsto 1+x^2$ موجب تماماً واشتقاقي على R لأنه تابع كثير حدود

$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

b. $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ $\quad I=]1,+\infty[$

إن f اشتقاقي على I حيث:

$x\mapsto \frac{x-1}{x+1}$ موجب تماماً واشتقاقي على I لأنه تابع كسري

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\left(\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}\right)=\frac{x+1}{x-1}\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)$$
$$=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

c. $f(x)=x^2+\ln x$ $\quad I=]0,+\infty[$

إن f اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين حيث:

$x\mapsto x^2$ اشتقاقي على I لأنه مرجعي

$x\mapsto \ln x$ 〃 〃 I 〃 〃

$$f'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$$

[13] f المعرف على $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=2x+\ln x$.

ⓐ بيّن أنّ f اشتقاقي على I، واحسب $f'(x)$

ⓑ اكتب معادلة للمماس للخط للتابع f في النقطة التي فاصلتها 1

الحل:

a. f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين حيث:

$x\mapsto \ln x$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ لأنه مرجعي

$x\mapsto 2x$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ لأنه كثير حدود فهو اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=2+\frac{1}{x}$$

b. $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=3(x-1)+2$

$y=3x-3+2$

$T\ /\ \boxed{y=3x-1}$

[14] نتأمل التابع f المعرف على $I=[0,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}x^2(1-\ln x), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

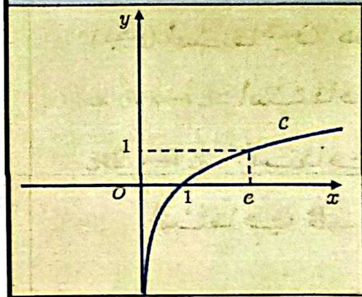
احسب $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$، واستنتج أنّ f اشتقاقي عند الصفر

الحل:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\frac{x^2(1-\ln x)}{x}$$
$$=\lim x(1-\ln x)=0$$

f اشتقاقي عند 0 والمماس أفقي عند 0

7. دراسة التابع اللوغاريتمي

التابع $\ln$ تابع متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$. التابع $\ln$ مرجعي، يمكن ان نقوم بكتابة خواصها دون اثبات.	
قيم تقريبية:	$\ln 2\approx 0.7,\quad \ln 3\approx 1.1,\quad \ln 5\approx 1.6,\quad \sqrt{2}\approx 1.4,\quad \sqrt{3}\approx 1.7,\quad \sqrt{5}\approx 2.2$

[15] ادرس تغيرات التابع f المعرف وفق $f(x)=\ln x$ وارسم C.

الحل:

$D =]0,+\infty[$

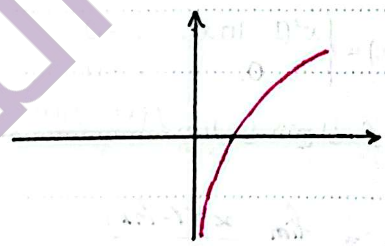
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

مقارب شاقولي $x=0$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



$C \cap ox$:

$f(x)=0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x=1$

[16] f المعرف على $]1,+\infty[$ وفق $f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

ⓐ أثبت $d: y=x+1$ مقارب عند $+\infty$. وادرس الوضع النسبي

ⓑ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها. ارسم d ثم الخط البياني C.

الحل:

a. $y=x+1$ مقارب مائل عند $+\infty$ لأن:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_d = \lim_{x\to+\infty} 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$

الوضع النسبي: $f(x)-y_d = 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

لدراسة اشارة $\ln$ نقارن الحشوة مع الواحد بشرط ان يكون البسط والمقام موجبان

تأخذ $\ln$ الحدوين ل $\frac{x}{x-1} > 1$ لأن البسط أكبر من المقام

$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$

$f(x)-y_d > 0$

C فوق d

b. f معرف واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 1} f(x) = 2+2\ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

C يقبل مقارب شاقولي $\Delta: x=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1+2\left(\frac{1}{\frac{x}{x-1}} \times \frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right)$

$= 1+2\left(\frac{x-1}{x} \times \frac{-1}{(x-1)^2}\right) = 1 + \frac{-2}{x(x-1)}$

$= \frac{x^2-x-2}{x(x-1)}$

$f'(x) = 0$

$x^2-x-2=0 \qquad (x-2)(x+1)=0$

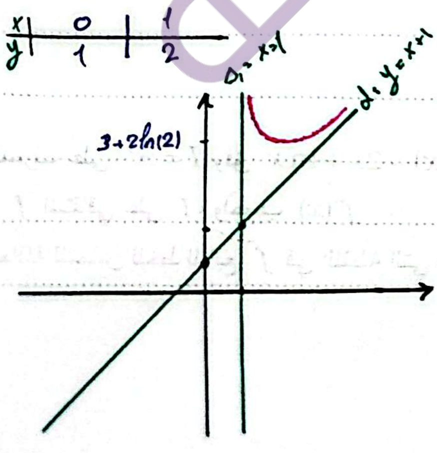
$x=2 \qquad x=-1$ مرفوض $\notin D_f$

$f(2) = 3+2\ln(2)$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$3+2\ln 2 \simeq 4.4$	↗	$+\infty$

لرسم المقارب: $d: y=x+1$

x	0	1
y	1	2



[17] f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$

ⓐ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

ⓑ أثبت $d: y=x-\ln 2$ مقارب عند $+\infty$. وادرس الوضع النسبي

ⓒ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى $]1,2[$.

ⓓ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني C.

الحل:

a. f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0} f(x)=0-\ln(2+\frac{1}{0^+})=-\ln(\infty)=-\infty$

$\Delta: x=0$ مقارب شاقولي للخط C

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$f(x)=x-\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

$f'(x)=1-\left(\frac{x}{2x+1}\cdot\frac{2x-2x-1}{x^2}\right)$

$=1+\frac{1}{x(2x+1)}>0$

f متزايد تماماً

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b. $d: y=x-\ln 2$

$f(x)-y_d=x-\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)-x+\ln 2$

$=\ln 2-\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)=\ln\left(\frac{2}{\frac{2x+1}{x}}\right)=\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_d=\ln(1)=0$

$\Leftarrow$ $d: y=x-\ln 2$ مقارب مائل للخط C جوار $+\infty$

$\frac{2x}{2x+1}<1$ نأخذ $\ln$ الطرفين

$\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)<0$

$f(x)-y_d<0$

C تحت d

c. f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$

فهو مستمر ومتزايد تماماً على $]1,2[$

$f(1)=1-\ln 3<0$

$f(2)=2-\ln\left(\frac{5}{2}\right)>0$

$f(1)\cdot f(2)<0$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α حيث $\alpha\in]1,2[$

مثال8: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$.

ⓐ لماذا المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط C؟

ⓑ ادرس الوضع النسبي للخطين d و C.

الحل: ⓐ ليكن g التابع المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)-y_d=x+1-\frac{\ln x}{x}-(x+1)=-\frac{\ln x}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y_d=0$. فالمستقيم $d: y=x+1$ مقارب للخط C.

ⓑ ندرس إشارة $f(x)-y_d$، التي تماثل إشارة $-\ln x$ فنجد

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y_d$	+	0	−
C	فوق d		تحت d

مثال9: ادرس تغيرات كلٍ منها وارسم خطه البياني C.

ⓐ $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

• $\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

ومنه المحورين الإحداثيين مقاربان للخط C.

• $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ينعدم f' فقط عند $x=e$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	e^{-1}	↘ 0

ⓑ يقطع T محور التراتيب في النقطة التي فاصلتها 0 أي $K(0,\ln m-1)$.

لمّا كانت إحداثيتا M هما $(m,\ln m)$ استنتجنا أنّ $H(0,\ln m)$.

$$\overrightarrow{KH}=\begin{bmatrix}0\\ \ln m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \ln m-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\vec{j}$$

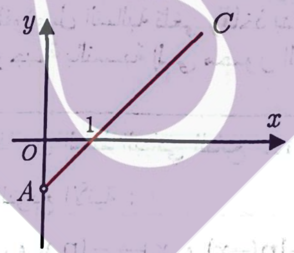
ⓒ لتكن M كيفية من الخط $\mathcal{C}$. ننشئ H المسقط القائم للنقطة M على محور التراتيب، ثُمّ نرسم K صورة H وفق الانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$. فيكون (KM) مماس $\mathcal{C}$ في النقطة M.

مثال11: ارسم في معلم مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحقّقة للشرط.

ⓐ $\ln x=\ln(y+1)$ ⓑ $\ln y=2\ln x$ ⓒ $\ln x+\ln y=0$

الحل

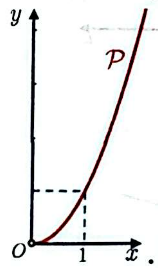
ⓐ العلاقة $\ln x=\ln(y+1)$ معرفة بشرط $x>0$ و $y>-1$ و $x=y+1$ أو $d: y=x-1$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ هي نصف المستقيم $[AX)$ من d



دون طرفه $A(0,-1)$.

ⓑ العلاقة $\ln y=2\ln x$ معرفة بشرط $x>0$ و $x>0$.

$\ln y=2\ln x$ تكافئ $\ln y=\ln(x^2)$ أو $y=x^2$. والنقاط $M(x,y)$ هي نصف قطع مكافئ معادلته $y=x^2$ مرسوم في الربع



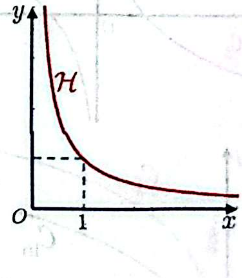
الأول عدا ذروته $O(0,0)$.

ⓒ العلاقة $\ln y+\ln x=0$ معرفة بشرط $x>0$ و $x>0$.

$\ln y+\ln x=0$ هي تكافئ $\ln y=-\ln x$

أي $\ln y=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ أي $y=\frac{1}{x}$.

النقاط $M(x,y)$ هي فرع القطع الزائد والمرسوم في الربع الأول.



8. إثبات صحة متراجحة

- لإثبات صحة المتراجحة ننقل جميع الحدود إلى طرف ونسميه $f(x)$ وندرس اطراده.
- حيث دراسة الاطراد مثل التغيرات ولكن من دون نهايات.
- اثبات صحة المتراجحة غير حل المتراجحة في الفقرة 6.

مثال12: أثبت أنّ $\ln x<2\sqrt{x}$ أياً يكن $x>0$.

الحل: $2\sqrt{x}-\ln x>0$

نعرف f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.

التابع f اشتقاقي على I،

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x}=\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$$

ينعدم هذا المشتق عند $x=1$ وإشارته تماثل إشارة $x-1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

بالاستعانة بجدول الاطراد نستنتج أنّ $f(x)\geq 2>0$ أياً يكن $x>0$، أي إنّ $2\sqrt{x}-\ln x>0$، أو $\ln x<2\sqrt{x}$.

[18] أثبت أنّ $\ln x\leq 2(\sqrt{x}-1)$، أياً يكن $x>0$.

الحل:

$\ln x-2\sqrt{x}+2\leq 0$

$f(x)=\ln x-2\sqrt{x}+2$

$f(x)\leq 0$ وهذا يكافئ

$D=]0,+\infty[$

$f'(x)=\frac{1}{x}-2\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{x}$

$f'(x)=0 \rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{x}=0$

$1-\sqrt{x}=0 \rightarrow 1=\sqrt{x} \rightarrow x=1$

$f(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$f(1)=0$ أكبر قيم التابع

$\forall x\in]0,+\infty[\rightarrow f(x)\leq 0$

[19] أثبت أنّ $\ln x \leq x-1$، أياً يكن $x>0$.

باختيار $x=e^{1/3}$ و $x=e^{-1/3}$، احصر e.

الحل:

$\ln x - x + 1 \leq 0$

$f(x) = \ln x - x + 1$

$f(x) \leq 0$ دهنا يكافئ

$]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$f'(x) = 0$

$\frac{1-x}{x} = 0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow 1=x$

$f(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	0	↘	

نحوص بالمشتق

$f(1)=0$ اكبر قيم التابع

$\forall x \in]0,+\infty[\Rightarrow f(x) \leq 0$

$\ln x \leq x-1$

$x = e^{\frac{1}{3}}$

$\ln e^{\frac{1}{3}} \leq e^{\frac{1}{3}} - 1$

$\frac{1}{3} \leq e^{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^3 \leq \left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3$

$\Rightarrow \boxed{\frac{64}{27} \leq e}$

$x = e^{-\frac{1}{3}}$

$\ln e^{-\frac{1}{3}} \leq e^{-\frac{1}{3}} - 1$

$-\frac{1}{3} \leq e^{-\frac{1}{3}} - 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \leq \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$\frac{8}{27} \leq e^{-1} \Rightarrow \frac{8}{27} \leq \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \boxed{e \leq \frac{27}{8}}$

$\frac{64}{27} \leq e \leq \frac{27}{8}$

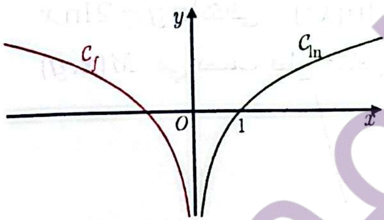
9. استنتاج رسم منحني التابع:

- $f_1(x) = f(-x)$ يكون C_1 نظير C بالنسبة إلى محور التراتيب. أي $(x,y) \to (-x,y)$
- $f_1(x) = -f(x)$ يكون C_1 نظير C بالنسبة إلى محور الفواصل. أي $(x,y) \to (x,-y)$
- $f_1(x) = -f(-x)$ يكون C_1 نظير C بالنسبة إلى المبدأ. أي $(x,y) \to (-x,-y)$
- $f_1(x) = f(x)+b$ يكون C_1 ناتج عن انسحاب C بالمتجه $+b\vec{j}$. أي $(x,y) \to (x,y+b)$
- $f_1(x) = f(x+a)$ يكون C_1 ناتج عن انسحاب C بالمتجه $-a\vec{i}$. أي $(x,y) \to (x-a,y)$
- $f_1(x) = |f(x)|$ تبقى النقاط ذات التراتيب الموجبة كما هي والنقاط ذات التراتيب السالبة نأخذ بدلاً عنها نظائرها بالنسبة إلى محور الفواصل
- $f_1(x) = f(|x|)$ تبقى النقاط ذات الفواصل الموجبة كما هي والنقاط ذات الفواصل السالبة تلغى ونأخذ بدلاً عنها نظائر النقاط ذات الفواصل الموجبة بالنسبة إلى محور التراتيب وفق مجموعة التعريف.

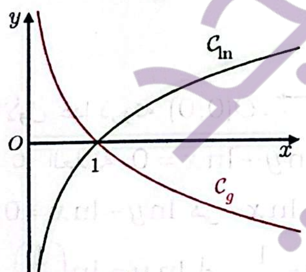
مثال13: انطلاقاً من الخط البياني للتابع $x \mapsto \ln x$، ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية :

$x \mapsto \ln(-x)$، و $x \mapsto -\ln x$ و $x \mapsto -\ln(-x)$، و $x \mapsto 1+\ln x$.

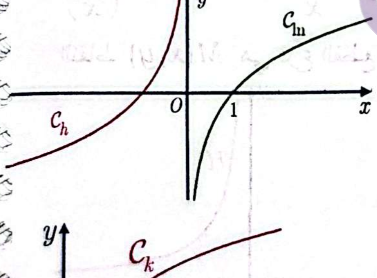
الحل:



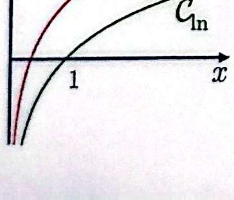
- $f(x) = \ln(-x)$ يكون C_f نظير $C_{\ln}$ بالنسبة إلى Oy.



- $g(x) = -\ln(x)$ يكون C_g نظير $C_{\ln}$ بالنسبة إلى محور الفواصل.



- $h(x) = -\ln(-x)$ يكون C_h نظير $C_{\ln}$ بالنسبة إلى محور المبدأ.



- $k(x) = 1+\ln(x)$ يكون C_k ناتج من $C_{\ln}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$.

تمارين عامة

[20] f المعرف على $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

ⓐ أثبت أنّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

ⓑ نظِّم جدولاً يبيّن جهة اطراد f .

ⓒ استنتج أنّ $\frac{1}{x}+\ln x-1\geq 0$ أياً يكن $x\in I$.

الحل:

a. f اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين

حيث: $x\to\frac{1}{x}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ فهو اشتقاقي على $]0,+\infty[$ لأنه تابع مرجعي

$x\to\ln x$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ لأنه تابع مرجعي

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}$

b. $f'(x)=0$

$-1+x=0 \rightarrow x=1$

$f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

c. نلاحظ أن: $f(x)\geq 1$

$\frac{1}{x}+\ln x\geq 1$

$\frac{1}{x}+\ln x-1\geq 0$ وهو المطلوب

[21] أثبت أنّ المستقيم $y=x-1$ مقارب للخط البياني للتابع $f:x\mapsto x-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ في جوار $+\infty$.

الحل:

$f(x)=x-x\ln(1+\frac{1}{x})$

$f(x)-y_\Delta$

$=x-x\ln(1+\frac{1}{x})-x+1$

$=1-x\ln(1+\frac{1}{x})=1-x\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

$=1-\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)-y_\Delta=1-1=0$ لأن $\lim_{\substack{x\to+\infty\\ \frac{1}{x}\to 0}}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=1$

$\Rightarrow \Delta: y=x-1$

مقارب مائل للخط G في جوار $+\infty$

[22] ليكن f المعرّف على $D_f=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$:

$f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

a) أثبت أن $\Delta: y=2x-1$ مقارب، وادرس الوضع النسبي

b) ادرس تغيرات التابع f ، على $]0,+\infty[$.

c) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على $]0,+\infty[$ ، ثمّ ارسم C .

d) استنتج رسم $g(x)=-2x+1+\ln(\frac{1+x}{x})$.

الحل:

a. $f(x)-y_\Delta=2x-1+\ln(\frac{x}{1+x})-2x+1$

$=\ln(\frac{x}{1+x})$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=\ln(1)=0$

$\Delta: y=2x-1$ مقارب مائل للخط G

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق

$f(x)-y_\Delta=\ln(\frac{x}{1+x})$

$f(x)-y_\Delta=0$

$\ln(\frac{x}{1+x})=0 \rightarrow \frac{x}{1+x}=1$

$x=1+x \rightarrow 0\neq 1$ تناقض

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f(x)-y_D$	$+$	‖		‖	$-$
الوضع النسبي	C فوق D	‖		‖	C تحت D

b. $f(x) = 2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -1+\ln(0) = -\infty$

$x=0$ معادلة مقارب شاقولي لـ C

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty + \ln(1) = +\infty$

$f'(x) = 2 + \left(\frac{1+x}{x} \times \frac{1+x-x}{(1+x)^2}\right)$

$= 2 + \frac{1}{x(1+x)} > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

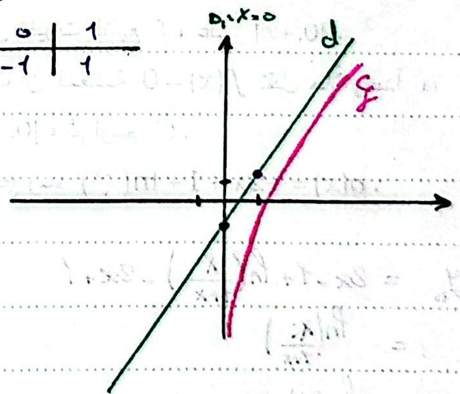
c. f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$

$0 \in f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α على $]0,+\infty[$

الرسم: $d: y=2x-1$

x	0	1
y	-1	1



$g(x) = -2x+1+\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$

$f(x) = 2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

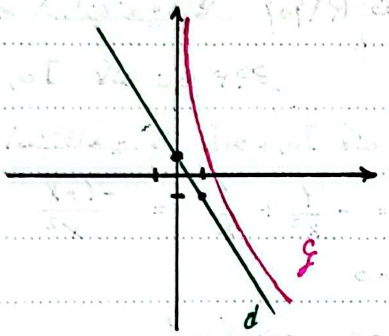
$-f(x) = -\left(2x-1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)$

$= -2x+1-\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

$= -2x+1+\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)^{-1}$

$= -2x+1+\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = g(x)$

G متناظر مع C بالنسبة لمحور الفواصل



[23] ليكن f المعرّف على $]0,+\infty[$: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

a) ادرس تغيرات التابع. ثمّ ارسم C.

b) استنتج حلول المعادلة $2^x = x^2$

c) قارن بين π^e, e^π.

الحل:

a. $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$X=0$ مقارب شاقولي

$\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$ ح.ع.ت $\frac{\infty}{\infty}$

$y=0$ مقارب أفقي

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0 \Longrightarrow 1-\ln x=0$

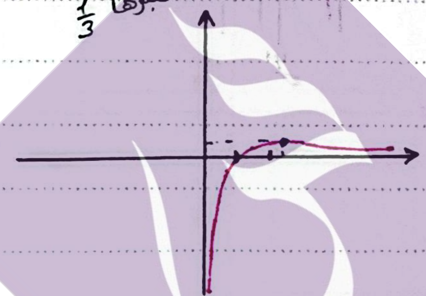
$\ln x = 1$

$\ln x = \ln e^1$

$x=e \Rightarrow f(e)=\frac{1}{e}$

x	0		e		π		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$			
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘			0

نجربها $\frac{1}{3}$



التقاطع مع ox:

$f(x)=0 \Rightarrow \frac{\ln x}{x}=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$

ملاحظة: عند استنتاج حلول معادلة بعد تغيرات $f(x)$ نجعلها تحوي

b. $2^x = x^2$

$\ln 2^x = \ln x^2 \Rightarrow x\ln 2 = 2\ln x$

نقسم على x

$\ln 2 = 2\frac{\ln x}{x}$

نقسم على 2

$\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln x}{x}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{\ln 2}{2}$

$f(2)=\frac{\ln 2}{2}$: نلاحظ ان 2 حل لها لأن

ونلاحظ بالتجريب ان 4 حل اخر

$f(4)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{2\ln 2}{4}=\frac{\ln 2}{2}$

c. $\pi^e,\ e^\pi$

$e<\pi$

؟؟ f متناقص تماماً على $[0,\pi]$

$f(e) > f(\pi)$ ؟؟

$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln\pi}{\pi}$

$\pi \ln e > e\ln\pi$

$\ln e^\pi > \ln \pi^e$

$e^\pi > \pi^e$

[24] لتكن $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

ⓐ ادرس تغيرات $f:x\mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ على $]0,+\infty[$.

ⓑ $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. أثبت $S_n=\ln(n+1)$. ما نهايتها.

الحل:

a. $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to0} f(x) = \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$

$\mathcal{G}_f$ مقارب شاقولي للخط $D_1 : x=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln(1)=0$

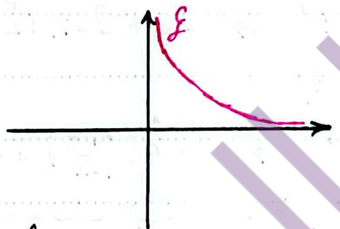
$\mathcal{G}_f$ مقارب افقي للخط $D_2 : y=0$ في جوار $+\infty$

$f'(x)=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-x-1}{x^2}$

$=\frac{-1}{x(x+1)} <0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

Add: ارسم $\mathcal{G}$



Add2: ادرس اطراد المتتالية $U_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

f متناقص تماماً ومنه المتتالية متناقصة تماماً

b. $S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$

مجموع الحدود ← حسابية

← هندسية

← نحوص الحدود

$U_1=\ln(2)$

$U_2=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$U_3=\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

$\vdots$

$U_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\Rightarrow S_n=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$

$\Rightarrow S_n=\ln(n+1)$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n=\ln(\infty)=+\infty$

[25] ليكن f المعرف على $I =]-1,1[$ وفق $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

ⓐ أثبت أنَّ f تابع فردي.

ⓑ أثبت أنَّ f اشتقاقي على I .

ⓒ ادرس تغيرات f على $[0,1[$. ثم ارسم الخط البياني.

الحل:

a. شرط التابع الفردي :

$\forall x \in]-1,1[\Rightarrow -x \in]-1,1[$

$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)$

$= \ln\left(\frac{1+x}{-x+1}\right)^{-1} \Rightarrow = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$

f فردي ومنه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

b. إن f اشتقاقي على I حيث

$x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$ موجب تماماً واشتقاقي على I لأنه تابع كسري

c. f معرف واشتقاقي على $[0,1[$

$f(0) = \ln(1) = 0$

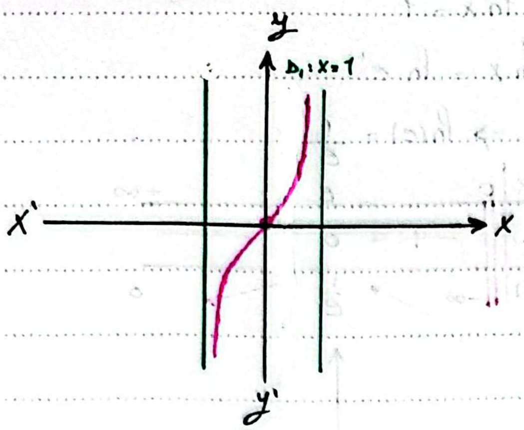
$\lim_{x \to 1} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$

C_f يقبل مقارب شاقولي معادلته $D_1 : x = 1$

$f'(x) = \frac{1-x}{x+1} \times \frac{1-x+x+1}{(1-x)^2}$

$= \frac{2}{(x+1)(\ }$ > 0

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



[26] ليكن f المعطى وفق : $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$.

ⓐ تحقّق أنَّ D_f ، مجموعة تعريف f ، هي $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

ⓑ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه.

ⓒ أثبت أنَّ f متناقص تماماً على كلٍ من مجالي D_f .

ⓓ ارسم في معلمٍ متجانس الخط البياني C .

الحل:

a. $\frac{2x}{x-1} > 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\frac{2x}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
المتراجحة		م				م	

$D =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

b. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 2$

$y = \ln 2$ مقارب أفقي عند $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$

$y = \ln 2$ مقارب أفقي عند $+\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$x = 0$ مقارب شاقولي

$\lim_{x \to 1} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0}\right) = +\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي

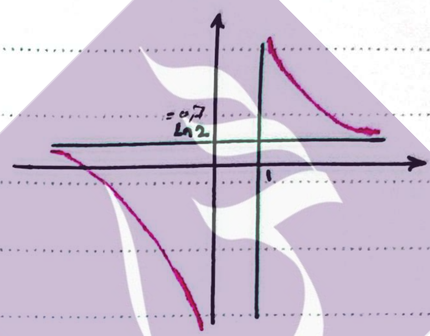
c. $f'(x) = \frac{x-1}{2x} \cdot \left(\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}\right)$

$= \frac{-2}{2x(x-1)} < 0$

مشتقة اللوغاريتم موجب دوماً

f متناقص تماماً

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||		||	$-$	
$f(x)$	$\ln 2$	↘	$-\infty$ ||		|| $+\infty$	↘	$\ln 2$



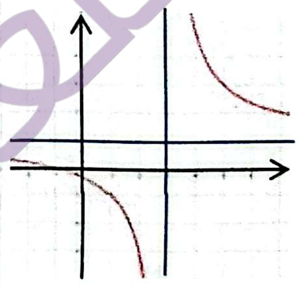
مركز التناظر:

تكون النقطة (x_0,y_0) مركز تناظر إذا كان:

$\boxed{① \; x\in D \Rightarrow 2x_0-x\in D \quad ② \; f(x)+f(2x_0-x)=2y_0}$

ويكون C_f متناظر بالنسبة النقطة (x_0,y_0).

مثال: التابع $x\mapsto \frac{x+1}{x-3}$ له مركز تناظر هو $I(3,1)$.



$D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$ و $2x_0-x=6-x$

الشرط① أياً كان $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ فإن

ومنه $-x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$6-x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$

الشرط②

$$f(x)+f(2x_0-x)=f(x)+f(6-x)$$
$$=\frac{x+1}{x-3}+\frac{6-x+1}{6-x-3}$$
$$=\frac{x+1}{x-3}+\frac{7-x}{3-x}=$$
$$\frac{x+1}{x-3}+\frac{-7+x}{x-3}$$
$$=\frac{2(x-3)}{x-3}=2=2y_0$$

[27] ليكن: $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$ و $D_f=]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$.

a) أثبت أن $I(1,0)$ مركز تناظر.

b) ادرس تغيرات التابع f على $]2,+\infty[$ ثم ارسم الخط C.

الحل:

a. $I(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{0})$

$D_f =]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

$2x_0 - x = 2-x$

$2y_0 = 0$

① $\forall x \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ نضرب ب (-1)

$-x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ نجمع $(+2)$

$\Rightarrow 2-x \in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

② $f(x)+f(2-x) \overset{?}{=} 0$

$L_1 = f(x)+f(2-x)$

$= \ln\left(\frac{x}{x-2}\right) + \ln\left(\frac{2-x}{2-x-2}\right)$

$= \ln\left(\frac{x}{x-2} \cdot \frac{2-x}{-x}\right)$

$= \ln(1) = 0 = L_2$

$I(1,0)$ مركز تناظر ل C

b. f معرفة واشتقاقية على $]2,+\infty[$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$

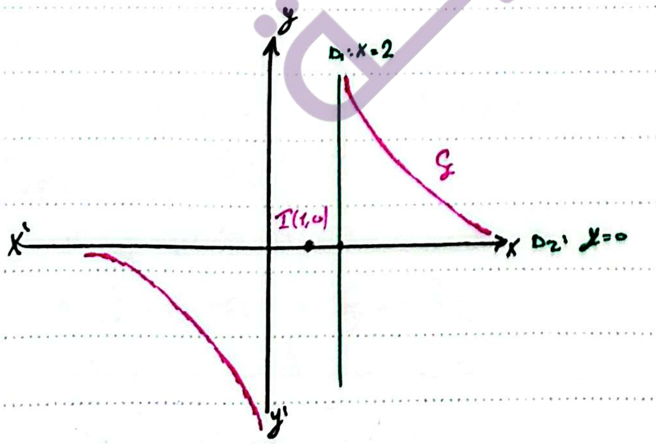
C يقبل مقارب شاقولي $D_1: x=2$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$D_2: y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$f'(x) = \frac{x-2}{x} \times \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x(x-2)} < 0$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	0



[28] ليكن f التابع المعرّف على D بوضع $f(0)=0$ و $f(x)=\dfrac{x}{x-\ln x}$. و C الخط البياني للتابع f .

a) أثبت صحة المتراجحة $\ln x < x$.

b) جد مجموعة تعريف f ثم أثبت أنّ f مستمرّ عند الصفر.

c) ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر.

d) عيّن إن أمكن المماس للخط C عند مبدأ الإحداثيات.

e) ما نهاية f عند $+\infty$؟ ثُمّ ادرس تغيرات f .

f) أعط معادلة للمماس T للخط C في النقطة التي فاصلتها 1.

g) ارسم الخط C.

h) استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=\dfrac{\ln x}{\ln x - x}$

الحل:

[29] ليكن f المعرّف على $]0,+\infty[$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$

a) أثبت أن $\Delta : y = x + \frac{1}{2}$ مقارب، وادرس الوضع النسبي

b) ادرس اطراد التابع $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

c) أثبت أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ وادرس تغيرات التابع f .

d) أثبت أن للمعادلة $2x^2 + (1-2\lambda)x + \ln x^2 = 0$ حل وحيد

e) ارسم C .

الحل:

a. $\Delta : y = x + \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Δ مقارب مائل عند $+\infty$

الوضع النسبي $f(x) - y_\Delta = \frac{\ln x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$\frac{\ln x}{x}$	||	$-$	0	$+$	
C	||	تحت Δ	$(1, \frac{3}{2})$ مشتركة	فوق Δ	

b. $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

$g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

$g'(x) = 0 \to 2x^2 = 1 \to x^2 = \frac{1}{2} \to x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} + 1 - \ln(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= \frac{3}{2} - (\ln(1) - \ln(\sqrt{2}))$

$= \frac{3}{2} + \ln(\sqrt{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	||	$\searrow$	$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$	$\nearrow$	

$g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$ اصغر قيم التابع

$\forall x \in]0, +\infty[\Rightarrow g(x) \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$

$g(x) > 0$

c. $f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)}{x^2}$

$= 1 + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

النهايات :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d. $2x^2 + (1-2\lambda)x + \ln x^2 = 0$

$2x^2 + x - 2\lambda x + 2\ln x = 0$

$2x^2 + x + 2\ln x = +2\lambda x$ نقسم على $2x$

$\frac{2x^2}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{2\ln x}{2x} = \lambda$

$x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x} = \lambda$ $f(x) = \lambda$

f مستمر على $]0,+\infty[$

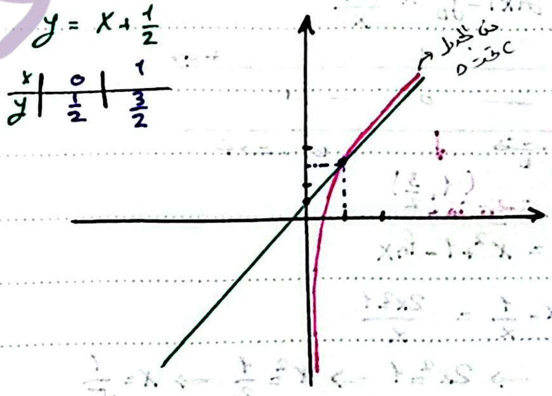
f متزايد تماما على $]0,+\infty[$

$\lambda \in f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

المعادلة $f(x)=\lambda$ لها حل وحيد

$y = x + \frac{1}{2}$

x	0	1
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$



[30] ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

ⓐ تحقّق $P(-1) = 0$. استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x) = (x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ من الدرجة الثانية.

ⓑ حل المتراجحة $P(x) \le 0$.

ⓒ استنتج حل المتراجحة $2\ln x + \ln(2x+5) \le \ln(2-x)$.

الحل:

a. $P(-1) = -2+5-1-2 = 0$

-1 يعدم $P(x)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+5x^2+x-2 & x+1 \\ -2x^3 \mp 2x^2 & 2x^2+3x-2 \\ \hline 3x^2+x-2 & \\ -3x^2 \mp 3x & \\ \hline -2x-2 & \\ -2x-2 & \\ \hline 0\;\;0 & \end{array}$$

$P(x) = (x+1)(2x^2+3x-2)$

b. $P(x) \le 0$

$(x+1)(2x^2+3x-2) = 0$

اما $x = -1$

او $\underbrace{2x^2+3x-2=0}_{\times 2} \Rightarrow x^2+3x-4=0$

$2(x+\frac{4}{2})(x-\frac{1}{2}) = 0$

$x=-2$ $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
الجداء		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		م				م			

$S =]-\infty,-2] \cup [-1,\frac{1}{2}]$

[31] (دورة 2 - 2019) ليكن f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$.

1. عين a,b علماً أن المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم $y = 3x$.
2. لماذا المستقيم d الذي معادلته $y = 4x - 4$ مقارب للخط C؟ وادرس الوضع النسبي للخطين d و C.

الحل:

1. $A(1,0) \in C$

$f(1) = 0$

$a + b - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -b}$ (1)

$y = 3x \quad m = 3$

$f'(1) = 3$

$f'(x) = a - \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2}$

$f'(1) = a - \frac{1}{1} = 3 \Rightarrow \boxed{a = 4}$

$\Rightarrow \boxed{b = -4}$

$f(x) = 4x - 4 - \frac{\ln x}{x}$

b. $y = 4x - 4$ مقارب مائل عند $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y_\Delta = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$

$f(x) - y_d = -\frac{\ln x}{x}$

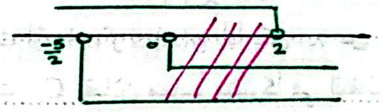
x	0		1		$+\infty$
$-\frac{\ln x}{x}$	‖	$+$	0	$-$	
C	‖	فوق Δ	$(1,0)$	تحت Δ	

لأن فيه (-)

هنا يتقاطع مع Δ

c. $2\ln x + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$

$x > 0 \quad x > \frac{-5}{2} \quad x < 2$



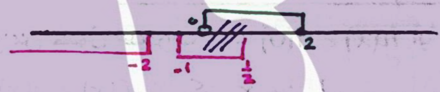
$E =]0, 2[$ مفتوح لأن ماخذه مساواة بشرط الحل

$\ln(x^2)(2x+5) \leq \ln(2-x)$

$2x^3 + 5x^2 \leq 2 - x$

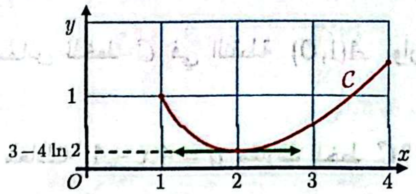
$2x^3 + 5x^2 + x - 2 \leq 0$

$p(x) \leq 0$



$S' =]0, \frac{1}{2}]$

[32] نتأمّل تابعاً f معرّفاً على المجال $I=[1,4]$ وفق $f(x)=ax+b+c\ln x$ حيث a و b و c أعداد حقيقية



ⓐ أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

ⓑ جد قيم a و b و c ثم اكتب عبارة $f(x)$.

الحل:

تمارين عامة محلولة

[33] f و g المعرفين على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق

$f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$:

ⓐ أثبت أنَّ $g(x)\le f(x)$ أياً يكن x من I .

ⓑ أثبت C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x=0$.

الحل: ⓐ لدينا $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

نشكل التابع h المعرف على I بالصيغة $h(x)=f(x)-g(x)$.

$h'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

x	-1 $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$h(x)$	$\searrow$ $\quad$ 0 $\quad$ $\nearrow$

نستنتج من جدول التغيرات $h(x)\ge h(0)=0$ أياً كانت x من I .

ومنه $f(x)\ge g(x)$ أياً يكن x من I .

ⓑ لدينا أن $f(0)=g(0)=0$ ومنه $(0,0)$ نقطة مشتركة بين الخطين ولإيجاد المماس في النقطة $(0,0)$ نجد $f'(0)=g'(0)=1$

ومنه $y=x$ هو مماس مشترك للخطين C_f و C_g في المبدأ.

[34] ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]1,+\infty[$ وفق $f(x)=x+\ln(x^2-1)$

ⓐ أثبت أنَّ f متزايد تماماً على I .

ⓑ أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α . ثم أثبت أنَّ $1<\alpha<\sqrt{1+\dfrac{1}{e}}$.

الحل: ⓐ $f(x)=x+\ln(x^2-1)$ على المجال $I=]1,+\infty[$

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2-1}>0$ ومنه يكون f متزايداً تماماً على I .

ⓑ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ ومنه $f(I)=]-\infty,+\infty[$

أي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى I .

$$f\left(\sqrt{1+e^{-1}}\right)=\sqrt{1+e^{-1}}+\ln e^{-1}=\sqrt{1+e^{-1}}-1=\frac{e^{-1}}{\sqrt{1+e^{-1}}+1}>0$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=-\infty$$

ولان f متزايداً تماماً على I نجد

$0\in f(]1,\sqrt{1+e^{-1}}[)=]-\infty,\dfrac{e^{-1}}{\sqrt{1+e^{-1}}+1}[$ أي $1<\alpha<\sqrt{1+e^{-1}}$

[35] أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f' .

① $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$ و $I=]e,+\infty[$.

② $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I=]1,+\infty[$.