المتتاليات

1. تعريف المتتالية:

هي تابع مجموعة تعريفه مجموعة الأعداد الطبيعية أو جزء غير منته منها متعاقب أي بالشكل $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$.

♣ للمتتالية عددٌ لا نهائيٌ من الحدود.

ويمكن التعبير عنها بعدة طرق منها:

• طريقة التعريف الصريح أي بدلالة n أي بالشكل $u_n = f(n)$

مثال1: $u_n = (n+1)^2$ جد u_1, u_2, u_3 و $u_{n+1}, u_n + 1$

$u_1 = 4, \ u_2 = 9, \ u_3 = 16,$

$u_{n+1} = (n+2)^2, \ u_n + 1 = (n+1)^2 + 1$

[1] $u_n = 2n+3$ جد u_1, u_2, u_3 و $u_{n+1}, u_n + 1$.

الحل:

$U_1 = 2(1)+3 = 5$

$U_2 = 2(2)+3 = 7$

$U_3 = 2(3)+3 = 9$

$U_n + 1 = 2n+3+1 = 2n+4$

$U_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+2+3 = 2n+5$

[2] $u_n = 1+2+\cdots+n$ جد u_1, u_2, u_3 و u_{n+1} و $u_{n+1} - u_n$.

الحل:

$U_1 = 1$

$U_2 = 1+2 = 3$

$U_3 = 1+2+3 = 6$

$U_{n+1} = 1+2+\dots n+(n+1)$

$U_{n+1} - U_n = n+1$

[3] $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ جد u_1, u_2, u_3 و u_{n+1} و $u_{n+1} - u_n$.

الحل:

$U_1 = 1$

$U_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$U_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1}$

• طريقة التدريج وأحد أشكالها هو الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

مثال2: $u_{n+1} = 3u_n - 2$ و $u_0 = 2$ جد u_1, u_2, u_3 و u_{n+2}

$u_1 = 3u_0 - 2 = 4, \ u_2 = 3u_1 - 2 = 10, \ u_3 = 3u_2 - 2 = 28$

$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2$

[4] $u_{n+1} = 2u_n + 3$ و $u_0 = 2$ جد u_1, u_2, u_3.

الحل:

$U_1 = 2U_0 + 3 = 2(2)+3 = 7$

$U_2 = 2U_1 + 3 = 2(7)+3 = 17$

$U_3 = 2U_2 + 3 = 2(17)+3 = 37$

[5] $u_{n+1} = (u_n)^2 - 1$ و $u_0 = 2$ جد u_1, u_2, u_3.

الحل:

$U_1 = (U_0)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$U_2 = (U_1)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

$U_3 = (U_2)^2 - 1 = 64 - 1 = 63$

[6] $u_{n+1} = u_n{}^2 + n - 2$ و $u_0 = -2$ جد u_1, u_2, u_3.

الحل:

$U_1 = U_0^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$U_2 = U_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$U_3 = U_2^2 = 9$

2. اطراد متتالية معرفة بالتعريف الصريح:

♣ هنا نستعمل مبرهنة الاطراد:

$(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

و $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \ge 0 \Leftrightarrow$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$

$(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

و $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \le 0 \Leftrightarrow$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le 1$

$(u_n)_{n\ge0}$ ثابتة $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 0$ أو $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

♣ تكون المتتالية مطردة إذا حققت صفة واحدة من السابق.

♣ يوجد ثلاث طرق لدراسة اطراد متتالية معرفة بالتعريف الصريح:

طريقة الطرح: نوجد $u_{n+1}-u_n$ ونقارن مع الصفر.

طريقة القسمة: نوجد $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونقارن مع الواحد

طريقة التابع: نعرف f بالعلاقة $u_n=f(n)$ ونشتق التابع ونقارن مع الصفر. ويكون اطراد المتتالية من اطراد التابع والعكس غير صحيح بالضرورة.

مثال3: ادرس اطراد المتتالية المعرفة بالعلاقة $u_n=3n+5$

الحل: نوجد $u_{n+1}=3(n+1)+5=3n+8$

طريقة الطرح نلاحظ $u_{n+1}-u_n=3n+8-(3n+5)=3>0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً.

طريقة القسمة $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n+8}{3n+5}>1$ فالمتتالية متزايدة تماماً.

طريقة التابع نعرف f بالعلاقة $u_n=f(n)$ أي $f(x)=3x+5$

فيكون $f'(x)=3>0$ فالتابع متزايد تماماً على المجال $[0,+\infty[$

فالمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً.

غالبية: عند دراسة اطراد متتالية معرفة بالتعريف الصريح غالباً في حالة

- ○ التابع الكسري والجذري: نستعمل طريقة التابع.
- ○ وجود n ضمن (أس أو عاملي فقط) نستعمل طريقة القسمة.
- ○ متتالية المجاميع وباقي الحالات نستعمل طريقة الطرح.

♣ لا يمكن استعمال طريقة القسمة الا إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماماً

♣ الرمز $n!$ يعني جداء العدد n تنازليا إلى الواحد

أي $n!=n\times(n-1)\times\cdots\times1$ وأن $0!=1$.

مثل: $3!=3\times2\times1=6,\quad 5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

يمكن كتابة $5!=5\times4!$ وهكذا $n!=n\times(n-1)!$

[7] ادرس جهة اطراد كل من المتتاليات الآتية.

ⓐ $u_n=n^2+3$ ⓑ $u_n=\sqrt{3n+1}$ ⓒ $u_n=\frac{2n-1}{n+4}$

ⓓ $u_n=\frac{n!}{2^n}$ ⓔ $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ ⓕ $u_n=2^n$

ⓖ $u_n=-\frac{1}{n}$ ⓗ $u_n=\frac{n^2}{n!}$ ⓘ $u_n=\frac{n}{10^n}$

الحل:

a. $U_n=n^2+3$

$U_{n+1}=(n+1)^2+3=n^2+2n+1+3=n^2+2n+4$

$U_{n+1}-U_n=n^2+2n+4-n^2-3=2n+1>0$

(U_n) متزايدة تماماً

b. $U_n=\sqrt{3n+1}$

$f(x)=\sqrt{3x+1}\qquad f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}>0$

f متزايد تماماً $\Rightarrow$ (U_n) متزايدة تماماً

العاملي: $0!=1$

① لا يمكن اختصار العاملي الا مع نفسه

② $(2n)!\neq 2(n!)$

③ $(n+100)!=(n+100)(n+99)!$

c. $U_n=\frac{2n-1}{n+4}$

$f(x)=\frac{2x-1}{x+4}\qquad f'(x)=\frac{2(x+4)-(2x-1)}{(x+4)^2}$

$=\frac{2x+8-2x+1}{(x+4)^2}=\frac{9}{(x+4)^2}>0$

f متزايد تماماً $\Leftarrow$ (U_n) متزايدة تماماً

d. $U_n=\frac{n!}{2^n}$

$U_{n+1}=\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}-\frac{n!}{2^n}$

$=\frac{(n+1)!-2n!}{2^{n+1}}=\frac{(n+1)n!-2n!}{2^{n+1}}=\frac{n!\,(n+1-2)}{2^{n+1}}$

$=\frac{n!\,(n-1)}{2^{n+1}}$ موجب ... موجب

الإشارة من إشارة $n-1$

$n-1=0\Rightarrow n=1$

المتتاليات تأخذ آخر إشارة عالين

n		1	
$n-1$	$-$	0	$+$

$U_{n+1}-U_n\geq 0$ تساوي الصفر عند 1

المتتالية متزايدة بدءاً من $n=1$ بعدد طبيعي

ملاحظة: $U_{n+1}-U_n=2n-3$

$n=\frac{3}{2}$

n		$\frac{3}{2}$	
$2n-3$	$-$	0	$+$

$U_{n+1}-U_n>0$ متزايدة تماماً بدءاً من $n=2$

e. $U_n=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$

$U_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}$

$U_{n+1}=U_n+\frac{1}{2^{n+1}}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{1}{2^{n+1}}>0$ متزايدة تماماً

f. $U_n=2^n$

$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=\frac{2^n\times2^1}{2^n}=2>1$ متزايدة تماماً

g. $U_n=-\frac{1}{n}$

$f(x)=-\frac{1}{x}\qquad f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$

f متزايد تماماً ومنه المتتالية متزايدة تماماً

$h.$ $U_n = \frac{n^2}{n!}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} - \frac{n^2}{n!}$

$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)n!} - \frac{n^2}{n!} = \frac{n+1-n^2}{n!}$

$-n^2 + n + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-1)(1) = 5$

$n_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad n_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
$- - - -$	0	$+ + +$	0	$- - -$

$U_{n+1} - U_n < 0$ متناقصة تماماً بدءاً من $n=2$

ط 2:

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}$

$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2}$

$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{n^2}$

$= \frac{n+1}{n^2} < 1$

U_n متناقصة تماماً بدءاً من $n=2$

$i.$ $U_n = \frac{n}{10^n}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{10^{n+1}} - \frac{n}{10^n} = \frac{n+1-10n}{10^{n+1}} = \frac{-9n+1}{10^{n+1}}$

$-9n+1 = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{9}$

	$\frac{1}{9}$	
$+ \quad +$	0	$- - - -$

$U_{n+1} - U_n < 0$

متناقصة تماماً بدءاً من $n=1$.

ط 2: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \frac{n+1}{10^{n+1}} \times \frac{10^n}{n} = \frac{n+1}{10^n \times 10} \times \frac{10^n}{n}$

$= \frac{n+1}{10n} < 1$ $\qquad U_n$ متناقصة تماماً بدءاً $n=1$

3. المتتاليات الحسابية:

المتتالية الحسابية: هي متتالية ينتج كل حد فيها عن سابقه بجمعه إلى عدد ثابت نسميه أساس المتتالية ونرمز له بالرمز r.

مثل $\underbrace{3,\ 5}_{+2},\ 7,\ 9,\ldots.$ الأساس هو $r = 2$

إثباتها نثبت أن $u_{n+1} - u_n$ ثابت لا يتعلق بالدليل n.

[8] $u_n = -5n + 1$ في حالة $n \in \mathbb{N}$ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية

الحل:

$U_{n+1} - U_n = -5(n+1) + 1 - (-5n+1)$

$= -5n - 5 + 1 + 5n - 1 = -5$ ثابت

المتتالية حسابية أساسها $r = -5$

التعريف الصريح: أي بدلالة n هو $u_n = u_m + (n-m)r$

[9] $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 2 وفيها $u_1 = 4$ احسب u_n بدلالة n.

الحل:

$U_1 = 4 \qquad r = 2$

$U_n = U_1 + (n-1)(2)$

$U_n = 4 + 2n - 2 \longrightarrow U_n = 2 + 2n$

التعريف بالتدريج: أي بدلالة u_n هو $u_{n+1} = u_n + r$

[10] $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية $u_0 = 2, u_{n+1} = u_n + 3$ أثبت أنها حسابية وعين أساسها.

الحل:

$U_{n+1} = U_n + 3$ المتتالية حسابية لأنها من الشكل

أساسها $r = 3$

خاصة: a و b و c حدود متوالية في متتالية حسابية فإن $\frac{a+c}{2} = b$

[11] m و $2m$ و 12 حدود متوالية في متتالية حسابية احسب m.

الحل:

$\frac{12+m}{2} = 2m \longrightarrow 12 + m = 4m$

$12 = 3m \longrightarrow m = 4$

عدد الحدود عدد الحدود $u_i, u_{i+1}, \cdots, u_j$ هو $j - i + 1$.

[12] ما عدد الحدود $u_{30}, u_{31}, \cdots, u_{50}$.

الحل:

$j - i + 1 = 50 - 30 + 1 = 21$

مجموع الحدود $S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{أول حد} + \text{آخر حد}}{2}$

[13] ليكن $u_n = -5n + 3$ حسابية. جد $u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

الحل:

$S = \frac{U_1 + U_{10}}{2} \times 10$

$U_1 = -2 \qquad U_{10} = -47$

$S = \frac{-2-47}{2} \times 10 = -49 \times 5 = -245$

4. المتتاليات الهندسية:

المتتالية الهندسية: هي متتالية ينتج كل حد فيها عن سابقه بضربه بعدد ثابت نسميه أساس المتتالية ونرمز له بالرمز q.

مثل $\underbrace{3,\ 6}_{\times 2},\ 12, 24, ...$ الأساس هو $q=2$

إثباتها نثبت أن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثابت لا يتعلق بالدليل n.

[14] $u_n = 7^{n+1}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$ أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ هندسية.

الحل:

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{7^{n+2}}{7^{n+1}} = 7$ ثابت

هندسية أساسها $q=7$

يفيد حساب :
① الأساس : اذا علم حدين
② كل الحدود (U_n بدلالة n حد عام) اذا علم حد اول واساس

التعريف الصريح: أي بدلالة n هو $u_n = u_m q^{n-m}$

[15] $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1=-2$ احسب u_n بدلالة n.

الحل:

$U_n = U_m\, q^{n-m} \Rightarrow U_n = U_1\, q^{n-1}$

$U_n = (-2)(3)^{n-1} \Rightarrow U_n = (-2)\left(\frac{3^n}{3}\right)$

$\Rightarrow U_n = \left(\frac{-2}{3}\right)(3^n)$

التعريف بالتدريج: أي بدلالة u_n هو $u_{n+1} = q \times u_n$

[16] $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية $u_0 = 1,\ u_{n+1} = 6u_n$ أثبت أنها هندسية وعين أساسها.

الحل:

لدينا $U_{n+1} = 6U_n$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 6$

هندسية أساسها $q=6$

خاصة: a و b و c حدود متوالية في متتالية هندسية فإن $b^2 = ac$

[17] 3 و m و 12 حدود متوالية في متتالية هندسية احسب m.

الحل:

$m^2 = (12)(3) = 36$

$\overbrace{m^2 = 36}$

$m = 6$ ، $m = -6$

اذا طلب q: $3, 6, 12$ ، $q = 2$ ؛ $3, -6, 12$ ، $q = -2$

Add : $12, m, 3$ حدود متوالية من متتالية هندسية الاقيمة q اذا علمت انها متتالية متزايدة ؛ $q = 2$

مجموع الحدود $S = (\text{أول حد}) \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

$S = \frac{a(1-q^k)}{1-q}$

[18] $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_1 = -2$ احسب $u_1 + u_2 + \dots + u_6$

الحل:

$S = \frac{a(1-q^k)}{1-q}$

$a = U_1 = -2 \qquad q = 2 \qquad k = j-i+1 = 6-1+1 = 6$

$S = \frac{-2(1-2^6)}{1-2} = 2(1-64) = 2(-63) = -126$

[19] ليكن $u_n = 2\times 3^{n+2}$ هندسية. جد $u_1 + u_2 + \dots + u_5$.

الحل:

$S = \frac{a(1-q^k)}{1-q}$

$a = U_1 = 2(3)^3 = 54 \qquad k = j-i+1 = 5-1+1 = 5$

$q = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2\times 3^{n+3}}{2\times 3^{n+2}} = \frac{2\times 3^n \times 3^3}{2\times 3^n\times 3^2} = 3$

$\Rightarrow S = \frac{54(1-3^5)}{1-3} = 6234$

ملاحظة : حسابية : $U_{n+1} - U_n = r$

الهندسية : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

[20] ليكن $u_n = -5n+3$ في حالة $n \in \mathbb{N}$ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ حسابية وجد أساسها وادرس اطرادها

الحل: $u_{n+1} - u_n = (-5n-2) - (-5n+3) = -5$

الفرق ثابت فهي حسابية.

$u_{n+1} - u_n = -5 < 0$ الفرق سالب تماماً فهي متناقصة تماماً.

	الحسابية	الهندسية
مثال	$\underbrace{2,\ 5}_{+3},\ 8,\ 11, ...$	$\underbrace{2,\ 6}_{\times 3},\ 18,\ 54, ...$
الصريح	$u_n = u_m + (n-m)r$	$u_n = u_m q^{n-m}$
التدريج	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
اثباتها	نثبت أن $u_{n+1} - u_n$ ثابت لا يتعلق بالدليل n	نثبت أن $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثابت لا يتعلق بالدليل n
خاصة	a و b و c متوالية في متتالية حسابية فإن $\frac{a+c}{2} = b$	a و b و c متوالية من متتالية هندسية فإن $b^2 = ac$
الحدود	عدد الحدود $S = u_i + u_{i+1} + \dots + u_j$ هو $j - i + 1$.	
المجموع	$S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{أول حد} + \text{آخر حد}}{2}$	$S = (\text{أول حد}) \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

مثال4: ليكن $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية وجد أساسها وادرس اطرادها

الحل: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \dfrac{3^{n+1}}{2^n} = \dfrac{2}{3}$ القسمة ثابتة فهي هندسية.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3} < 1$ القسمة أصغر تماماً من 1 فهي متناقصة تماماً.

- ♣ إذا علم حدان من متتالية حسابية أو هندسية نستعمل قاعدة التعريف الصريح لإيجاد الأساس.
- ♣ لا نستطيع جمع متتالية حسابية أو هندسية وفق القاعدة ألا إذا كانت حدودها متعاقبة.

مثال5: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$ احسب r ثم اكتب u_n بدلالة n ثم احسب u_{20}.

الحل: $u_n = u_m + (n-m)r \Rightarrow u_5 - u_2 = (5-2)r$

$-54 = 3r \Rightarrow r = -18$

$u_n = u_m + (n-m)r \Rightarrow u_n = 41 + (n-2)(-18)$

$u_n = 77 - 18n \Rightarrow u_{20} = -283$

مثال6: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_7 = \frac{1}{1080}$ و $u_{10} = \frac{25}{2197}$ احسب q ثم اكتب u_n بدلالة n ثم جد u_{30}

الحل: $u_n = u_m q^{n-m} \Rightarrow u_{10} = u_7 \cdot q^{10-7}$

$$\frac{25}{2197} = \frac{1}{1080} q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{25 \times 1080}{2197} = \frac{5^3 \times 6^3}{13^3}$$

ومنه $q = \dfrac{30}{13}$ أي $u_n = u_m q^{n-m} = \dfrac{25}{2197} \cdot \left(\dfrac{30}{13}\right)^{n-10}$

ومنه $u_{30} = u_{10} \cdot \left(\dfrac{30}{13}\right)^{30-10} = \dfrac{25}{2197} \cdot \left(\dfrac{30}{13}\right)^{20}$.

[21] الأسئلة الآتية تتعلق بمتتاليات حسابية أو هندسية:

ⓐ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$ احسب u_n بدلالة n، واستنتج $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

ⓑ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$ احسب u_n بدلالة n، واستنتج $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$ و $u_2 + u_4 + u_6 \cdots + u_{2n}$.

ⓒ احسب المجموع $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10$.

ⓓ احسب المجموع $s = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{81}$.

ⓔ احسب بدلالة n، المجموع $s = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \ldots - \dfrac{1}{2^n}$.

الحل:

a. حسابية $U_1 = -2$ $r = 3$

$U_n = U_m + (n-m)r$

$U_n = U_1 + (n-1)(3)$

$U_n = -2 + 3n - 3 \Rightarrow U_n = 3n - 5$

حساب الجموع $U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_{20}$

$S = \dfrac{k(a+L)}{2}$

$a = U_1 = 3(1) - 5 = -2$

$L = U_{20} = 3(20) - 5 = 55$

$k = j - i + 1 = 20 - 1 + 1 = 20$

$S = \dfrac{20(-2+55)}{2} = 10(+53) = 530$

b. هندسية $U_1 = -2$ $q = 3$

$U_n = U_m \cdot q^{n-m}$

$U_n = U_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow U_n = (-2)(3)^{n-1}$

$\Rightarrow U_n = \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot 3^n$

حساب الجموع $U_1 + U_2 + \ldots + U_7$

$S = \dfrac{a(1-q^k)}{1-q}$

$a = U_1 = -2$ $q = 3$ $k = j - i + 1 = 7 - 1 + 1 = 7$

$S = \dfrac{-2(1-3^7)}{1-3} = 1 - 3^7 = -2186$

ملاحظة: ان عدد الحدود $j - i + 1$ لا يمكن استخدامه الا اذا كان الفرق 1 ان لم يكن واحد : $\dfrac{j-i}{\text{الفرق}} + 1$

$U_2 + U_4 + \ldots + U_{2n}$

$S = \dfrac{a(1-q^k)}{1-q}$

$a = U_2 = \left(\frac{-2}{3}\right)(9) = -6$

$k = \dfrac{j-i}{2} + 1 = \dfrac{2n-2}{\underset{\text{الفرق}}{2}} + 1 = n - 1 + 1 = n$

$q = (\text{الأساس القديم})^{\text{الفرق}} = (3)^2 = 9$

$S = \dfrac{-6(1-9^n)}{1-9} = \dfrac{3}{4}(1-9^n)$

c. $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \ldots + 10$

مجموع حدود متتالية حسابية:

$S = \dfrac{k(a+L)}{2}$

$a = \frac{1}{2}$ $L = 10$ $k = \dfrac{10 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{19}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = 20$

$\Rightarrow S = \dfrac{20\left(\frac{1}{2} + 10\right)}{2} = 10\left(\frac{21}{2}\right) = 105$

d. $S = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{81}$

$S = (\frac{1}{3})^0+(\frac{1}{3})^1+(\frac{1}{3})^2+\dots+(\frac{1}{3})^4$

مجموع حدود متتالية هندسية.

$q=\frac{1}{3}$ $\quad a=1$ $\quad k=j-i+1=4-0+1=5$

$S=\frac{a(1-q^k)}{1-q}$

$=\frac{1(1-(\frac{1}{3})^5)}{1-\frac{1}{3}}$ $\qquad S=\frac{3}{2}(1-(\frac{1}{3})^5)$

ملاحظة: الحسابية: عدد الحدود من الحدود

الهندسية: من الأس.

e. $U_n = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\dots-\frac{1}{2^n}$

$=1-[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}]$

$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \rightarrow k=j-i+1=n-1+1=n$

$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 1-(1-(\frac{1}{2})^n)$

$=1-1+(\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^n$

[22] a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية عينها علما $a+b+c=26$ و $abc=216$.

الحل:

1) a ، b ، c هندسية $\quad b^2=a.c$

2) $a+b+c=26$

3) $abc=216$

نعوض 1) في 3)

$b^2.b=216 \Rightarrow b^3=216 \Rightarrow b=6$

$a.c=36$ $\quad 18, 2 \quad 12, 3$

$a+b+c=26$

$a+c=20$

$a=18\ ,\ c=2$

أو $a=2\ ,\ c=18$

[23] a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a\neq 0$ و a و b و c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، أساسها q. ولدينا $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية. احسب q.

الحل:

1) a ، b ، c هندسية

2) $3a$ ، $2b$ ، c حسابية

من 1) $a \longrightarrow b \longrightarrow c$

$a \xrightarrow{\times q} aq \xrightarrow{\times q} aq^2$

من 2) $2b=\frac{3a+c}{2}$

$2aq=\frac{3a+aq^2}{2} \Rightarrow 4aq=3a+aq^2$

نقسم على $a\neq 0$

$4q=3+q^2 \Rightarrow q^2-4q+3=0$

$(q-3)(q-1)=0$

$q=3 \qquad q=1$

5. الإثبات بالتدريج (الاستقراء الرياضي):

♣ نستعمل الاستقراء لإثبات صحة خاصة تحوي العدد الطبيعي n

♣ الخطوات

① نكتب الخاصة $E(n)$

② نثبت صحة $E(n_0)$ حيث أصغر عدد يمكن التعويض فيه

③ نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$ اعتمادا على $E(n)$

مثال7: $n\geq 1$ عدد طبيعي أثبت أن $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

الحل:

$E(n) \longrightarrow 1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

نثبت صحة $E(1)$:

$E(1) \longrightarrow L_1=1$

$L_2=\frac{1(1+1)}{2}=1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$: هو: تحويل

$E(n) \longrightarrow 1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ها: إظهار

نثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n+1) \longrightarrow \underbrace{1+2+3+\dots+(n+1)}_{L_1}=\underbrace{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}_{L_2}$

$$L_1 = \underbrace{1+2+3+\cdots+n}+(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = L_2$$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة

مثال8: في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ أثبت أن

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحل:

$$E(n) \longrightarrow 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$E(1) \longrightarrow 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$1 = 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$$E(n) \longrightarrow 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نثبت صحة $E(n+1)$

$$E(n+1) \longrightarrow \underbrace{1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3}_{L_1} = \underbrace{\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}}_{L_2}$$

$$L_1 = 1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

$$= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+n+1\right] = (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right]$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = L_2$$

$E(n+1)$ محققة $\longleftarrow$ $E(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 1$

مثال9: أثبت أنه مهما كان n كان 4^n+2 مضاعفاً للعدد 3.

$E(n) \rightarrow$ «4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3»

$E(n+1) \rightarrow$ «$4^{n+1}+2$ مضاعفٌ للعدد 3»

الحل: نثبت صحة الخاصة $E(0)$:

$E(0) \rightarrow$ «$4^0+2=3$ مضاعفٌ للعدد 3»

ومنه $E(0)$ محققة نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$

من الخاصة $E(n)$ يوجد عدد طبيعي k يحقق $4^n+2=3k$

أي $4^n = 3k-2$.

$$4^{n+1}+2 = 4^n\times 4+2 = (3k-2)\times 4+2$$
$$= 12k-8+2 = 12k-6$$
$$= 3(4k-2) = 3k''$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فتكون $E(n)$ صحيحة.

مثال10: أثبت صحة الخاصتين الآتيتين أياً كان العدد الطبيعي n.

① «$2^{3n}-1$ مضاعفٌ للعدد 7».

② «n^3+2n مضاعفٌ للعدد 3».

الحل: ① لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أن العدد $2^0-1=0$ مضاعفٌ للعدد 7.
- لنفترض أن $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $2^{3n}-1=7k$ عندئذ

$$2^{3(n+1)}-1 = 8\times 2^{3n}-1 = 8(7k+1)-1 = 7(8k+1)$$

ومنه $2^{3(n+1)}-1$ مضاعف للعدد 7 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة ومنه صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n

② لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية n^3+2n مضاعف للعدد 3.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أن العدد $0^3+2\times 0=0$ مضاعفٌ للعدد 3.
- لنفترض أن $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $n^3+2n=3k$ عندئذ

$$(n+1)^3+2(n+1) = n^3+2n+3(n^2+n+1)$$
$$= 3\left(k+n^2+n+1\right)$$

ومنه $(n+1)^3+2(n+1)$ مضاعف للعدد 3 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

مثال11: أثبت $n \geq 1$: $1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n! = (n+1)!-1$

الحل: $E(n) \rightarrow 1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n! = (n+1)!-1$

$E(n+1) \rightarrow 1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+(n+1)\times(n+1)! = (n+2)!-1$

نثبت صحة الخاصة $E(1)$: $E(1) \rightarrow 1=1$.

ومنه $E(1)$ محققة نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$

$$\ell_1 = E(n+1) \rightarrow 1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots n\times n!+(n+1)\times(n+1)!$$
$$= (n+1)!-1+(n+1)\times(n+1)!$$
$$= (n+1)![1+n+1]-1 = (n+1)!(n+2)-1$$
$$= (n+2)!-1 = \ell_2$$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فتكون $E(n)$ صحيحة.

[24] $n \geq 1$ عدد طبيعي و $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

ⓐ احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 وعبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n

ⓑ أثبت عند عدد طبيعي $n \geq 1$ أن: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

الحل:

a. $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

$S_1 = 1^2 = 1 \qquad S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \qquad S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2$

$\rightarrow S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

b. $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad n \geq 1$

$E(n) \longrightarrow S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نثبت صحة $E(1)$:

$E(1) \longrightarrow S_1 = \dfrac{1(2)(3)}{6}$

$1 = 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$E(n) \longrightarrow S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n+1) \longrightarrow \underbrace{S_{n+1}}_{L_1} = \underbrace{\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}_{L_2}$

$L_1 = S_{n+1}$

$= S_n + (n+1)^2$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= (n+1)\left[\dfrac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right]$

$= (n+1)\left(\dfrac{2n^2+n}{6} + n + 1\right)$

$= (n+1)\left(\dfrac{2n^2+n+6n+6}{6}\right)$

$= (n+1)\left(\dfrac{2n^2+7n+6}{6}\right)$

$= \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = L_2$

$E(n+1)$ محققة $\leftarrow$ $E(n)$ صحيحة

[25] ليكن $x > -1$ أثبت أن المتراجحة $(1+x)^n \geq 1 + nx$

الحل:

$E(n) \longrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$

نثبت $E(0)$:

$E(0) \longrightarrow (1+x)^0 \geq 1$

$1 \geq 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$E(n) \longrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n+1) \longrightarrow \underbrace{(1+x)^{n+1}}_{L_1} \geq \underbrace{1 + (n+1)x}_{L_2}$

$L_1 = (1+x)^{n+1}$

$L_1 = (1+x)^n (1+x)^1$

$L_1 \geq (1+nx)(1+x) \qquad L_1 \geq 1 + nx + x + nx^2$

$L_1 \geq 1 + (n+1)x + nx^2$ لأن $nx^2 \geq 0$

$L_1 \geq 1 + (n+1)x$

$L_1 \geq L_2$

ملاحظة في المتراجحات يمكن تكبير الكبير أو تصغير الصغير.

[26] في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$، أثبت صحة الخاصة $n! \geq 2^{n-1}$.

الحل:

$E(n) \longrightarrow n! \geq 2^{n-1}$

نثبت صحة $E(1)$:

$E(1) \longrightarrow 1! \geq 2^0$

$1 \geq 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$E(n) \longrightarrow n! \geq 2^{n-1}$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n+1) \longrightarrow \underbrace{(n+1)!}_{L_1} \geq \underbrace{2^n}_{L_2}$

$L_1 = (n+1)! \qquad L_1 = (n+1)n!$

$L_1 \geq (n+1)2^{n-1} \Rightarrow L_1 \geq (1+1)2^{n-1} \Rightarrow L_1 \geq 2 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 1$)

$L_1 \geq 2^n \Rightarrow L_1 \geq L_2$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة من أجل $n \geq 1$

للاستعداد بل ندرس اشارة ادخواص

[27] ⓐ أثبت، أياً كان العدد $n \geq 2$، أن $3 \times n^2 \geq (n+1)^2$.

ⓑ ما أصغر عدد $n \in \mathbb{N}^*$ تكون $E(n) \to 3^n \geq 2^n + 5n^2$ صحيحة؟

ⓒ أثبت أن $E(n)$ صحيحة، أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 5$.

الحل:

a. $3n^2 \geq (n+1)^2 \qquad n \geq 2$

$l_1 = 3n^2$

$= n^2 + n^2 + n^2$

$\geq n^2 + 2n + 1 \qquad n \geq 2,\ n^2 \geq 2n$

$\geq (n+1)^2 = l_2$

b. $E(n) \to 3^n \geq 2^n + 5n^2$

$E(1) \to 3 \geq 2+5$ ✗

$E(2) \to 9 \geq 4+20$ ✗

$E(3) \to 27 \geq 8+45$ ✗

$E(4) \to 81 \geq 16+80$ ✗

$E(5) \to 243 \geq 32+125$ محققة

$n = 5$ أي

c. $E(n) \to 3^n \geq 2^n + 5n^2$

$E(5)$ محققة

نفرض صحة $E(n)$

$E(n) \to 3^n \geq 2^n + 5n^2$

نثبت صحة $E(n+1)$

$E(n+1) \to \underbrace{3^{n+1}}_{l_1} \geq \underbrace{2^{n+1} + 5(n+1)^2}_{l_2}$

$l_1 = 3^{n+1}$

$= 3 . 3^n$

$\geq 3(2^n + 5n^2)$

$\geq 3 \times 2^n + 3 \times 5n^2$

$\geq 2 \times 2^n + 5(3n^2)$

$\geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$

لأن $3n^2 \geq (n+1)^2$ من الطلب ⓐ

[28] أثبت صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n.

ⓐ $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3

ⓑ $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7»

الحل:

a. $4^n + 5 = 3k$

$E(n) \to 4^n + 5 = 3k$

نثبت صحة $E(0)$

$E(0) \to 1 + 5 = 3k$

$6 = 3k$

$2 = k \in \mathbb{N}$ محققة

نفرض صحة $E(n)$:

$E(n) \to 4^n + 5 = 3k$

$4^n = 3k - 5$

ونثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n+1) \to \underbrace{4^{n+1} + 5}_{l_1} = \underbrace{3k'}_{l_2}$

$l_1 \quad 4^{n+1} + 5$

$= 4 \times 4^n + 5$

$= 4(3k-5) + 5 \qquad = 12k - 20 + 5$

$= 12k - 15 \qquad = 3(4k-5)$

$= 3k' = l_2$

b. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$

$E(n) \to 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0) \to 3^{0+1} + 2^{0+2} = 7 = 7k$

نفرض صحة $E(n)$: $E(n) \to 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$

نثبت صحة $E(n+1)$: $E(n+1) \to 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7k'$

$\ell_1 = 3^{2n+3} + 2^{n+3}$

$= 3^{2n+1+2} + 2^{n+2+1} = 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \cdot 2^1$

من الفرض $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k \leftarrow 3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$

$= (7k - 2^{n+2})9 + 2 \times 2^{n+2} = 63k - 9 \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 2^{n+2}$

$= 63k - 7 \cdot 2^{n+2} = 7(9k - 2^{n+2})$

$= 7k' = \ell_2$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة.

6. اطراد متتالية معرفة بالتدريج:

لدراسة اطراد متتالية معرفة بالتدريج نخمن الاطراد بإيجاد الحدود الأولى ثم نثبت صحة التخمين بالتدريج ولكن احياناً نستعمل طريقة الطرح أو القسمة.

مثال12: ادرس جهة اطراد المتتالية $u_{n+1} = 2u_n - 8$ حيث $u_0 = 2$

الحل: نوجد الحدود الأولى $u_0 = 2,\ u_1 = -4$ نخمن أن المتتالية متناقصة تماماً نثبت صحة التخمين بالتدريج

$E(n) \to u_{n+1} < u_n$

$E(n+1) \to u_{n+2} < u_{n+1}$

نثبت صحة الخاصة $E(0) \to u_1 < u_0 : -4 < 2 : E(0)$

ومنه الخاصة $E(0)$ محققة.

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$

$u_{n+1} < u_n$

$2u_{n+1} < 2u_n$

$2u_{n+1} - 8 < 2u_n - 8$

$u_{n+2} < u_{n+1}$

ومنه $E(n+1)$ صحيحة فتكون $E(n)$ صحيحة.

♣ عند وجود عاملي أو أس n أو متتالية معرفة بالتدريج لا نستعمل طريقة التابع.

[29] أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالعلاقات $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$ متزايدة تماماً

الحل:

$E(n) \to U_{n+1} > U_n$

نثبت صحة $E(0)$:

$E(0) \to U_1 \overset{?}{>} U_0 \qquad U_1 = \sqrt{6+U_0} = \sqrt{6}$

محققة $\sqrt{6} > 0$

نفرض صحة $E(n)$: $E(n) \to U_{n+1} > U_n$

نثبت صحة $E(n+1)$: $E(n+1) \to U_{n+2} > U_{n+1}$

$U_{n+1} > U_n$

$6 + U_{n+1} > 6 + U_n$

$\sqrt{6+U_{n+1}} > \sqrt{6+U_n}$

$U_{n+2} > U_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة والمتتالية متزايدة تماماً

[30] بين أي المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطردة.

ⓐ $\left\{u_0 = 8, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2\right.$ ⓑ $\left\{u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2\right.$

ⓒ $u_0 = 2,\ u_{n+1} = u_n - 3$ ⓓ $\{u_0 = 1,\ u_{n+1} = 2u_n$

الحل:

a. $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2 \qquad U_0 = 8$

$U_0 = 8 \qquad U_1 = \frac{3}{4}(8) + 2 = 8$

نخمن ان المتتالية ثابتة ونثبت ذلك بالتدريج

$E(n) \longrightarrow U_{n+1} = U_n$

نثبت صحة $E(0)$،

$E(0) \longrightarrow U_1 \overset{?}{=} U_0$

محققة $8 = 8$

نفرض صحة $E(n)$: $E(n) \longrightarrow U_{n+1} = U_n$

نثبت صحة $E(n+1)$: $E(n+1) \longrightarrow U_{n+2} = U_{n+1}$

$U_{n+1} = U_n$

$\frac{3}{4}U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n$

$\frac{3}{4}U_{n+1} + 2 = \frac{3}{4}U_n + 2$

$U_{n+2} = U_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة والمتتالية ثابتة

b. $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2 \qquad U_0 = 2$

$U_0 = 2 \qquad U_1 = \frac{3}{4}U_0 + 2 = \frac{3}{4}(2) + 2 = \frac{7}{2}$

نخمن ان المتتالية متزايدة تماماً ونثبت ذلك بالتدريج

$E(n) \longrightarrow U_{n+1} > U_n$

نثبت صحة $E(0)$:

$E(0) \longrightarrow U_1 > U_0$

محققة $\frac{7}{2} > 2$

$U_n = \frac{5}{3^n} = 5\left(\frac{1}{3^n}\right) = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$-1 < q = \frac{1}{3} < 1$

$\lim_{n\to\infty} U_n = 5(0) = 0$

متقاربة من 0

نفرض صحة $E(n)$ ، $E(n) \to U_{n+1} > U_n$

ونثبت صحة $E(n+1)$ ، $E(n+1) \to U_{n+2} > U_{n+1}$

$U_{n+1} > U_n$

$\frac{3}{4}U_{n+1} > \frac{3}{4}U_n$

$\frac{3}{4}U_{n+1} + 2 > \frac{3}{4}U_n + 2$

$U_{n+2} > U_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة والمتتالية متزايدة تماماً

c. $U_{n+1} = U_n - 3$ $\quad U_0 = 2$

$U_{n+1} - U_n = -3 < 0$ متناقصة تماماً

d. $U_{n+1} = 2U_n$ $\quad U_0 = 1$

$U_0 = 1 \quad U_1 = 2U_0 = 2 \quad U_3 = 2U_2 = 4$

حدود المتتالية موجبة تماماً

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 > 1$ متزايدة تماماً

7. نهاية متتالية معرفة بالتعريف الصريح:

♣ نوجد نهايتها باعتبارها تابع أي حسب المبرهنة:

ليكن f تابعاً معرفاً على المجال $]a,+\infty[$، ولتكن $u_n = f(n)$ عندما $a \le n$ إذا كان $\lim_{n\to\infty} f(x) = \ell$ كان $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$

[31] احسب نهاية كل من $x_n = \frac{3n}{2n-1}$ و $y_n = n^3 - n + 1$

الحل:

$X_n = \frac{3n}{2n-1}$ $\qquad y_n = n^3 - n + 1$

$\lim_{n\to+\infty} X_n = \frac{3}{2}$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$

متقاربة من $\frac{3}{2}$ $\qquad$ متباعدة نحو $+\infty$

نوجد النهاية باعتبارها تابع والناتج

عدد: متقاربة من العدد

$+\infty$: متباعدة نحو $+\infty$

♣ في حالة q^n نتبع القاعدة:

$U_n = \left(\frac{2}{7}\right)^n$

$-1 < q = \frac{2}{7} < 1$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ متقاربة من 0

$U_n = \left(\frac{7}{2}\right)^n$

$q = \frac{7}{2} > 1$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

$U_n = \frac{1}{3^n}$ (ط1)

$= \frac{1^n}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$-1 < q = \frac{1}{3} < 1$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ متقاربة من 0

(ط2) $V_n = 3^n$

$q = 3 > 1$

$\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{\infty} = 0$ متقاربة من 0

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1<q<1 \\ +\infty & q>1 \\ 1 & q=1 \\ \text{ليس للمتتالية نهاية} & q\le -1 \end{cases}$$

[32] احسب نهاية كل من المتتاليتين $x_n = \frac{3^n}{2^n}$ و $y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n}$

الحل:

$X_n = \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ $\qquad y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n} = \left(\frac{10}{10.1}\right)^n$

$q = \frac{3}{2} > 1$ $\qquad -1 < q = \frac{10}{10.1} < 1$

$\lim_{n\to+\infty} X_n = +\infty$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$

متباعدة نحو $+\infty$ $\qquad$ متقاربة من 0

$-1 \le (-1)^n \le 1$

غالبية: في حالة وجود $\cos\infty, \sin\infty, (-1)^n$ نتبع مبرهنة الإحاطة.

مبرهنة الإحاطة: لتكن ثلاث متتاليات $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ و $(w_n)_{n\ge1}$ إذا تحقق $w_n \le u_n \le v_n$ عند كل n أكبر من عدد n_0 و $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

مبرهنة المقارنة: لتكن متتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$، ولنفترض أن $u_n \le v_n$ عند كل n أكبر من n_0 عندئذ

إذا كان $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ كان $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

وإذا كان $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ كان $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

[33] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$. تحقق أن $-\frac{1}{\sqrt{n}} \le u_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}$، ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$.

الحل:

$-1 \le \cos(2n) \le 1$ نقسم على $\sqrt{n} > 0$

$\frac{-1}{\sqrt{n}} \le \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{-1}{\sqrt{n}} \le U_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

حسب الإحاطة $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

متقاربة من 0

[34] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة بالصيغة $u_n = n+1-\cos n$ تحقق أن $n \le u_n \le n+2$، وذلك $n \ge 1$ ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge1}$.

الحل:

$-1 \le \cos n \le 1$

$1 \ge -\cos n \ge -1$

$n+2 \ge U_n \ge n$

$n \le U_n \le n+2$

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

حسب المقارنة

$\to \lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

متباعدة نحو $+\infty$

[35] لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{3n}$. جد نهاية $(u_n)_{n\ge1}$.

الحل:

$-1 \le (-1)^n \le 1$

$2n-1 \le 2n+(-1)^n \le 2n+1$

نقسم على $3n$ $0<3n$

$\dfrac{2n-1}{3n} \le U_n \le \dfrac{2n+1}{3n}$

$\lim_{n \to +\infty} \dfrac{2n-1}{3n} = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{2n+1}{3n} = \dfrac{2}{3}$

حسب الإحاطة

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{2}{3}$

متقاربة من $\dfrac{2}{3}$

[36] فيما يأتي احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ في حال وجودها:

ⓐ $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$ ⓑ $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+5}$

ⓒ $u_n = \dfrac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2}$ ⓓ $u_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$

ⓔ $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi+1}{2n+1}\right)$ ⓖ $u_n = \dfrac{n!-2}{n!}$

الحل:

a. $U_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{2}{3}$ متقاربة من $\dfrac{2}{3}$

b. $U_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+5}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{2n}{3} = +\infty$

متباعدة نحو $+\infty$

c. $U_n = \dfrac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2}$

$U_n = \dfrac{-3n^2+2n+4}{2n^2+4n+2}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = -\dfrac{3}{2}$ متقاربة من $-\dfrac{3}{2}$

d. $U_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$

$N = \dfrac{4n-3}{n+1}$ $\lim_{n \to +\infty} N = 4$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{N \to +4} \sqrt{N} = \sqrt{4} = 2$

e. $U_n = \sin\left(\dfrac{n\pi+1}{2n+1}\right)$

$N = \dfrac{n\pi+1}{2n+1}$ $\lim_{n \to \infty} N = \dfrac{\pi}{2}$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{N \to \frac{\pi}{2}} \sin N = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ متقاربة من 1

g. $U_n = \dfrac{n!-2}{n!}$

$U_n = \dfrac{n!}{n!} - \dfrac{2}{n!} = 1 - \dfrac{2}{n!}$

لدينا $n! \ge n$

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$ حسب المقارنة

$\lim_{n \to \infty} U_n = 1 - \dfrac{2}{\infty} = 1 - 0 = 1$

8. استعمال تعريف النهاية:

♣ لحساب مجهول موجود في البسط والمقام من نفس الدرجة نقسم البسط على المقام قسمة اقليدية ثم نكتب الكسر يساوي ناتج القسمة باقي القسمة على المقسوم عليه.

♣ $-a < x < a \Leftrightarrow |x| < a$ أي عند وجود مقدار بين عدد ومعكوسه نحذف الجزء السالب ونضع المقدار بالقيمة المطلقة

♣ نغير جهة التراجح عند الضرب أو القسمة على سالب أو قلب الطرفين.

[37] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in \left]-10^{-3}, 10^{-3}\right[$ عند كل $n > n_0$.

الحل:

$U_n \in \left]-10^{-3}, 10^{-3}\right[$

$-10^{-3} < U_n < 10^{-3}$

$-10^{-3} < \dfrac{1}{n\sqrt{n}} < 10^{-3}$

$\left|\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right| < 10^{-3}$

$\dfrac{1}{n\sqrt{n}} < \dfrac{1}{10^{3}}$

$n\sqrt{n} > 10^{3}$

نربع الطرفين

$n^3 > 10^6$

$(n)^3 > (10^2)^3$

$n > 10^2$

$n_0 = 10^{+2} = 100$

[38] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n = n\sqrt{n}$ جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > 10^6$ عند كل n أكبر تماماً من n_0.

الحل:

$U_n > 10^6$

$n\sqrt{n} > 10^6$

$n^3 > 10^{12}$

$(n)^3 > (10^4)^3$

$n > 10^4$

$n_0 = 10^4 = 10000$

[39] لتكن $u_n = \dfrac{3n+1}{n-1}$ وتساوي نهايتها 3. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n \in]2.98, 3.02[$ عند n أكبر تماماً من n_0.

الحل:

$2,98 < U_n < 3,02$

$2,98 < \dfrac{3n+1}{n-1} < 3,02$

$\begin{array}{r|l} 3n+1 & n-1 \\ -3n+3 & 3 \\ \hline 4 & \end{array}$

$2,98 < 3 + \dfrac{4}{n-1} < 3,02$

$-0,02 < \dfrac{4}{n-1} < 0,02$

$\left|\dfrac{4}{n-1}\right| < 0,02$

$\dfrac{4}{n-1} < \dfrac{2}{100}$

$\dfrac{n-1}{4} > 50 \qquad n-1 > 200$

$n > 201$

$n_0 = 201$

9. محدودية متتالية:

♣ نقول إن المتتالية محدودة من الأعلى، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M يحقق $u_n \le M$ يسمى M عنصراً راجحاً على $(u_n)_{n\ge0}$

♣ نقول إن متتالية محدودة من الأدنى، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي m يحقق $t_n \ge m$ يسمى m عنصراً قاصراً عن المتتالية $(t_n)_{n\ge0}$.

الحدود الراجحة	حدود المتتالية	الحدود القاصرة

الحد الأعلى

الحد الأدنى

♣ نقول عن متتالية محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى والأدنى.

♣ الحد الأعلى هو أصغر الحدود الراجحة.

♣ الحد الأدنى هو أكبر الحدود القاصرة.

غالبية: لإيجاد محدودية متتالية بالتعريف الصريح

♣ نستعمل المحدوديات:

$-1 \le \sin n \le 1, -1 \le \cos n \le 1, \quad 0 \le \sin^2 n \le 1, \quad 0 \le \cos^2 n \le 1,$

♣ نقارن مع الصفر أو مع الواحد.

♣ في حال وجود مجهول ومربعه نتمم الى مربع كامل.

♣ نستعمل شرط البدء $n \ge n_0$

♣ إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = +\infty$ فليس للمتتالية حد أعلى

♣ إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = -\infty$ فليس للمتتالية حد أدنى

♣ أحيانا نستعمل دراسة التغيرات.

$-1 \le \sin n \le 1, -1 \le \cos n \le 1, \quad 0 \le \sin^2 n \le 1,$

$0 \le \cos^2 n \le 1, \ (\ )^2 \ge 0, \quad \sqrt{\ } \ge 0, \quad |\ | \ge 0$

وأيضاً نستعمل شرط البدء $n \ge n_0$ وأحيانا نستعمل دراسة التغيرات.

[40] بين إذا $(u_n)_{n\ge1}$ محدودة، أو محدودة من الأعلى، أو من الأدنى.

ⓐ $u_n = 3 + 2\sin n$ ⓑ $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ ⓒ $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$

ⓓ $u_n = \dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}}$ ⓔ $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ⓕ $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}}$

ⓖ $u_n = n^2 + 2n - 1$ ⓗ $u_n = 3\cos n$ ⓘ $u_n = (-1)^n \times n^2$

الحل:

.a $U_n = 3 + 2\sin n$

$-1 \le \sin n \le 1$

نضرب بـ 2

$-2 \le 2\sin n \le +2$

نجمع 3

$1 \le 3 + 2\sin n \le 5$

$1 \le U_n \le 5$

محدودة من الأدنى والأعلى فهي محدودة

.b $U_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$

$\dfrac{1}{n^2} \ge 0$

$1 + \dfrac{1}{n^2} \ge 1$

$U_n \ge 1$

$\dfrac{1}{n^2} \le 1$ لأن المبسط أصغر من المقام

$1 + \dfrac{1}{n^2} \le 2$

$U_n \le 2$

$1 \le U_n \le 2$ محدودة

.c $U_n = \dfrac{1}{1+n^2}$

$\dfrac{1}{1+n^2} \geq 0$ $\dfrac{1}{1+n^2} \leq 1$

$U_n \geq 0$ $U_n \leq 1$ لأن البسط أصغر من المقام

إذا كانت حرمان نقط

$0 \leq U_n \leq 1$ محدودة

.d $U_n = \dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}}$

$\dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}} \leq 0$

$U_n \leq 0$

$n \geq 1$

$2n \geq 2$

$2n+3 \geq 5$

$\sqrt{2n+3} \geq \sqrt{5}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}} \geq \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$

$U_n \geq \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$

$\rightarrow \dfrac{-2}{\sqrt{5}} \leq U_n \leq 0$ محدودة

.e $U_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} \geq 0$ $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1$

$U_n \geq 0$ $U_n \leq 1$

$\rightarrow 0 \leq U_n \leq 1$ محدودة

.f $U_n = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}}$

$\sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}} \geq 0$ $\dfrac{n^2-1}{n^2+1} \leq 1$

$U_n \geq 0$ محدودة من الأدنى $\sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}} \leq 1$

$U_n \leq 1$ محدودة من الأعلى

$\rightarrow 0 \leq U_n \leq 1$ محدودة

.g $U_n = n^2+2n-1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ غير محدودة من الأعلى

$U_n = n^2+2n-1 \xrightarrow{\text{اتمام المربع الكامل}} U_n = n^2+2n+1-1-1$

$U_n = (n+1)^2-2$

$n \geq 1$

$n+1 \geq 2$

$(n+1)^2 \geq 4 \rightarrow (n+1)^2-2 \geq 2 \rightarrow U_n \geq 2$ محدودة من الأدنى

د لكنها غير محدودة

♣ للمقارنة مع الصفر ندرس إشارة.

♣ للمقارنة مع الواحد نقارن البسط مع المقام.

♣ للمقارنة مع عدد آخر ننقل للطرف الأول وندرس إشارة.

.h $U_n = 3.\cos n$

$-1 \leq \cos n \leq 1$

$-3 \leq 3.\cos n \leq 3$

$-3 \leq U_n \leq 3$

محدودة من الأدنى بـ -3

ومن الأعلى بـ 3

.i $U_n = (-1)^n \times n^2$

$U_n = \begin{cases} -n^2 & \text{فردي } n \\ n^2 & \text{زوجي } n \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{cases} -\infty & \text{فردي } n \\ +\infty & \text{زوجي } n \end{cases}$

غير محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى فهي غير محدودة.

---

① مبرهنات الإحاطة

② المقارنة مع الصفر والواحد

③ شروط البدء

④ $\lim U_n = +\infty$ غير محدودة من الأعلى

$\lim U_n = -\infty$ ″ الأدنى

⑤ دراسة تغيرات

متتالية محدودة بالتحريب التدريجي

[41] تأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

أثبت أن $1 \leq u_n \leq 3$، أياً يكن العدد الطبيعي n.

الحل:

إثبات $U_n \geq 1$ إثبات $U_n \leq 3$

$U_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1} \geq 1$

$U_n \geq 1$

لأن البسط أكبر من المقام

$U_n - 3 \leq 0$

$U_n - 3$

$= \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 3$

$= \dfrac{n^2+n+1-3n^2+3n-3}{n^2-n+1}$

$= \dfrac{-2n^2+4n-2}{n^2-n+1}$ ⊖ ⊕

$-2n^2+4n-2$

$\Delta = 0$

$n^2-n+1 \quad \Delta < 0$

$\rightarrow 1 \leq U_n \leq 3$

[42] المتتالية $(u_n)_{n\geq 4}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n^2-5n+6}$.

أثبت أنها محدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{1}{2}$.

للإثبات: نضع الحدود بطرف وندرس إشارة أو في الطرف فرق الدراسة

الحل:

ليتم المطلوب يجب إثبات $U_n \leq \dfrac{1}{2}$

$U_n = \dfrac{1}{n^2-5n+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+\frac{24}{4}}$

$= \dfrac{1}{(n-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}}$

$n \geq 4$ من شرط البدء

$n-\frac{5}{2} \geq 4-\frac{5}{2}$

$n-\frac{5}{2} \geq \frac{3}{2}$

$(n-\frac{5}{2})^2 \geq \frac{9}{4}$

$(n-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4} \geq 2$

$\dfrac{1}{(n-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}} \leq \dfrac{1}{2} \rightarrow U_n \leq \dfrac{1}{2}$

وهو المطلوب

[43] (دورة 2 – 2019) $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$

ⓐ ادرس اطراد المتتالية.

ⓑ اثبت 2 عنصراً راجحاً عليها.

ⓒ جد نهايتها وجد العدد n_0 يجعل $u_n \in]1.9,2.1[$ عند $n > n_0$

الحل:

a. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

$f'(x) = \dfrac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$

f متزايد تماماً ⟵ U_n متزايدة تماماً

b. يجب اثبات ان $U_n \leq 2$

$U_n - 2 \leq 0$

$U_n - 2 = \dfrac{2n-1}{n+1} - 2 = \dfrac{2n-1-2n-2}{n+1} = \dfrac{-3}{n+1} \leq 0$

2 راجح

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

$1{,}9 < U_n < 2{,}1$

$1{,}9 < \dfrac{2n-1}{n+1} < 2{,}1$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ n+1 & 2n-1 \\ & -2n \mp 2 \\ & -3 \end{array}$$

$1{,}9 < 2 - \dfrac{3}{n+1} < 2{,}1$

$-0{,}1 < \dfrac{-3}{n+1} < 0{,}1$

$\left|\dfrac{-3}{n+1}\right| < \dfrac{1}{10}$

$\dfrac{n+1}{3} > 10$

$n+1 > 30$

$n > 29$

$n > n_0$

$\rightarrow n_0 = 29$

[44] ليكن $-1 < q < 1$، ولنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة $u_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n$ جد قيمة $S = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

الحل: مجموعة حدود من متتالية هندسية

$U_n = 1 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$-1 < q < 1 \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{1}{1-q}$

تقارب متتالية: تكون المتتالية متقاربة إذا كانت نهايتها عدد وتكون متباعدة إذا كانت نهايتها $+\infty$ أو $-\infty$ أو لها نتائج متعددة.

[45] ادرس تقارب ⓐ $x_n = \dfrac{3^n-2^n}{3^n-1}$ ⓑ $y_n = \dfrac{10^n-1}{10^n+1}$.

الحل:

a. $X_n = \dfrac{3^n-2^n}{3^n-1}$

$= \dfrac{3^n\left[1-\frac{2^n}{3^n}\right]}{3^n\left[1-\frac{1}{3^n}\right]} = \dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$ متقاربة من 1

b. $U_n = \dfrac{10^n-1}{10^n+1}$

$\dfrac{10^n\left[1-\frac{1}{10^n}\right]}{10^n\left[1+\frac{1}{10^n}\right]} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{10}\right)^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{1-0}{1-0} = 1.$ متقاربة من 1

10. نهاية متتالية معرفة بالتدريج:

♣ **مبرهنة** كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة وكل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة.

كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى نهايتها $+\infty$ وكل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى نهايتها $-\infty$

♣ **لإثبات تقارب متتالية غالباً** نثبت أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى فتكون متقاربة من حدها الأعلى ℓ أو ثبت أنها متناقصة ومحدودة من الأدنى فتكون متقاربة من حدها الأدنى ℓ.

♣ في حالة المتتالية معرفة بالتعريف الصريح يكون ℓ نهايتها باعتبارها تابع. وفي حالة المتتالية معرفة بالتدريج يكون ℓ حل المعادلة $f(x) = x$ بشرط أن يكون التابع مستمر عند ℓ.

♣ بعد حل المعادلة $f(x) = x$ نختر النهاية اعتمادا على:

– نهاية المتتالية ℓ من المجال المغلق للمحدودية.

– الحد الأول والاطراد.

مثال 13: المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

ⓐ أثبت أن $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$.

ⓑ استنتج أن العدد 3 راجح على لمتتالية $(u_n)_{n\ge0}$.

ⓒ أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة.

الحل: ⓐ لنضع الخاصة $E(n)\to\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$ في حالة $n\ge1$.

$$E(n+1)\to\frac{1}{(n+1)!}\le\frac{1}{2^n}$$

الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $\frac{1}{1!}=1=\frac{1}{2^0}$.

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$

$$\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n!}\le\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^n}$$

ⓑ
$$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

$$\le1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\le1+\frac{1-\left(\frac12\right)^n}{1-\frac12}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

فالعدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

ⓒ نلاحظ أن المتتالية متزايدة $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$، وهي محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

مثال14: المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة وفق $u_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$

① أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة.

② أثبت أنّ $u_n\le2-\frac{1}{n}$ أياً يكن $n\ge1$.

③ ماذا يمكنك أنْ تستنتج بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

الحل: ① للانتقال من الحد u_n إلى الحد الذي يليه u_{n+1} نجمع إلى u_n العدد الموجب تماماً $\frac{1}{(n+1)^2}$

أي $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$ فالمتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة.

② لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $u_n\le2-\frac{1}{n}$ في حالة $n\ge1$.

- الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنها تنص على أن $u_1=\frac{1}{1^2}\le2-\frac{1}{1}$
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ عندئذ

محدودية ← طرح ← خواص

تدريج ← استقراء

$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{(n+1)^2}\le2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\le2-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}$$

لأن

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{-1}{n(n+1)^2}<0$$

ومنه $u_{n+1}\le2-\frac{1}{n+1}$

أي إن الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً

③ لدينا $(u_n)_{n\ge1}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

♣ **لإثبات محدودية أو اطراد لمتتالية بالتدريج نستعمل الاستقراء.**

[46] نعرف $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0=1$ و $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$

ⓐ أثبت بالتدريج أن $0\le u_n\le2$، أياً كان n

ⓑ أثبت بالتدريج أن $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً

ⓒ استنتج تقاربها وحدد نهايتها.

$E(n)\to0\le U_n\le2$

نثبت صحة $E(0)$

الحل:

a. $E(0)\to0\le U_0\le2$ ... $0\le1\le2$ محققة

$E(n)\to0\le U_n\le2$ ... نفرض صحة $E(n)$:

$E(n+1)\to0\le U_{n+1}\le2$ ... نثبت صحة $E(n+1)$:

$0\le U_n\le2$

$2\le2+U_n\le4$

$\sqrt2\le\sqrt{2+U_n}\le\sqrt4\to0\le U_{n+1}\le2$

$E(n+1)$ محققة $\Leftarrow$ $E(n)$ صحيحة

b. $E(n)\to U_{n+1}>U_n$

$E(0)\to U_1>U_0$ ... $\sqrt3>1$ محققة ... نثبت صحة $E(0)$:

$E(n)\to U_{n+1}>U_n$ ... نفرض صحة $E(n)$:

$E(n+1)\to U_{n+2}>U_{n+1}$ ... نثبت صحة $E(n+1)$:

$U_{n+1}>U_n$

$2+U_{n+1}>2+U_n$

$\sqrt{2+U_{n+1}}>\sqrt{2+U_n}\to U_{n+2}>U_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة ← $E(n)$ صحيحة

c. بما أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة من حدها الأعلى

$f(x) = x$

$\sqrt{2+x} = x \qquad x \geq 0$

$2 + x = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2 \qquad x = -1$ مرفوض

[47] $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6}$

ⓐ أثبت أن التابع $x \mapsto \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايدٌ تماماً

ⓑ استنتج أن $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$، أياً كان العدد n.

ⓒ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

ⓓ ادرس تقاربها وحدد نهايتها.

الحل:

a. $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+6}$

$f'(x) = \dfrac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2} = \dfrac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2} = \dfrac{14}{(2x+6)^2} > 0$

f متزايدة تماماً

b. $E(n) \longrightarrow \frac{1}{2} < U_n \leq 1$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0) \longrightarrow \frac{1}{2} < U_0 = 1 \leq 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$: $E(n) \longrightarrow \frac{1}{2} < U_n \leq 1$

نثبت صحة $E(n+1)$: $E(n+1) \longrightarrow \frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$

$\frac{1}{2} < U_n \leq 1$

بما أن f متزايدة تماماً نجد:

$f(\frac{1}{2}) < f(U_n) \leq f(1)$

$\frac{1}{2} < U_{n+1} \leq \frac{5}{8} \leq 1$

$\rightarrow \frac{1}{2} < U_{n+1} \leq 1$

c. $E(n) \longrightarrow U_{n+1} < U_n$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0) \longrightarrow U_1 \overset{?}{<} U_0$

$\frac{5}{8} < 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$: $E(n) \rightarrow U_{n+1} < U_n$

نثبت صحة $E(n+1)$: $E(n+1) \rightarrow U_{n+2} < U_{n+1}$

$U_{n+1} < U_n$

بما أن f متزايد تماماً نجد:

$f(U_{n+1}) < f(U_n)$

$U_{n+2} < U_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة والمتتالية متناقصة تماماً

d. بما أن المتتالية متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من حدها الأدنى ℓ الذي هو حل المعادلة $f(x) = x$

$\dfrac{3x+2}{2x+6} = x$

$2x^2 + 6x = 3x + 2 \qquad 2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4a.c = 9 + 16 = 25$

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$ مقبول

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-5}{4} = -2$ مرفوض

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{2}$

11. متتاليات متجاورة:

نقول عن متتالتين انهما **متجاورتان**، إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة، وكانت نهاية الفرق صفر وعندها تكون المتتاليتان متقاربتين ولهما النهاية نفسها.

مثال15: المتتاليتان المعرفتان وفق $t_n = -\dfrac{1}{2n+4}$ و $s_n = \dfrac{1}{n+1}$

أثبت أنهما متجاورتان ثم عين نهايتهما المشتركة.

الحل: $s_{n+1} - s_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$

فالمتتالية $(s_n)_{n\ge0}$ متناقصة تماماً.

$$t_{n+1}-t_n=-\frac{1}{2n+6}+\frac{1}{2n+4}=\frac{2}{(2n+4)(2n+6)}>0$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً. و $\lim_{n\to+\infty}(s_n-t_n)=0$

فالمتتاليتين $(t_n)_{n\ge0}$ و $(s_n)_{n\ge0}$ متجاورتان ومتقاربتان من 0.

[48] $(t_n)_{n\ge1}$ و $(s_n)_{n\ge1}$ المعرفتان وفق $t_n=\frac{n-1}{n}$

و $s_n=1+\frac{1}{n^2}$. أثبت أنهما متجاورتان ثم عين نهايتهما المشتركة.

الحل:

أولاً: ندرس الاطراد:

$t_n=\frac{n-1}{n}$ $\qquad$ $S_n=1+\frac{1}{n^2}$

$f(x)=\frac{x-1}{x}$ $\qquad$ $g(x)=1+\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=\frac{x-x+1}{x^2}=\frac{1}{x^2}>0$ $\qquad$ $g'(x)=\frac{0-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}<0$

f متزايد تماماً ومنه $\qquad$ متناقص تماماً ومنه

المتتالية S_n متناقصة تماماً $\qquad$ المتتالية t_n متزايدة تماماً

الشرط الأول محقق

$\lim_{n\to+\infty} t_n - S_n = 1-1=0$

والشرط الثاني محقق ومنه المتتاليتان متجاورتان

النهاية المشتركة:

$\lim t_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

[49] (دورة 1 – 2018) $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ المعرفتان وفق

$x_n=5-\frac{1}{n}$ و $y_n=5+\frac{1}{n^2}$. ادرس اطرادهما وعلل تجاورهما

الحل:

أولاً: ندرس الاطراد:

$X_n=5-\frac{1}{n}$ $\qquad$ $y_n=5+\frac{1}{n^2}$

$f(x)=5-\frac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x)=5+\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ $\qquad$ $g'(x)=-\frac{2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}<0$

f متزايد تماماً ومنه $\qquad$ g متناقصة تماماً ومنه

X_n متزايدة تماماً $\qquad$ y_n متناقصة تماماً

الشرط الأول محقق

$\lim_{n\to+\infty} X_n - y_n = 5-5=0$

والشرط الثاني محقق والمتتاليتان متجاورتان.

[50] تبين إن كانت المتتاليتان $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ متجاورتين أم لا.

ⓐ $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$ $\qquad$ $y_n=x_n+\frac{1}{n}$

ⓑ $x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$ $\qquad$ $y_n=x_n+\frac{1}{2n}$

الحل:

a. $X_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$

$y_n = X_n+\frac{1}{n}$

أولاً ندرس الاطراد

$X_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$

$X_{n+1} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$

$X_{n+1} = X_n+\frac{1}{(n+1)^2}$

$X_{n+1}-X_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$ $\qquad$ X_n متزايدة تماماً

$y_n = X_n+\frac{1}{n}$

$y_{n+1} = X_{n+1}+\frac{1}{n+1}$

$y_{n+1}-y_n = X_{n+1}+\frac{1}{n+1}-X_n-\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$

$=\frac{1+n+1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n}$

$=\frac{n+2}{(n+1)^2}-\frac{1}{n}=\frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}$

$=\frac{-1}{n(n+1)^2}<0$

y_n متناقصة تماماً والشرط الأول محقق

لدينا $y_n = X_n+\frac{1}{n}$

$y_n - X_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to+\infty} y_n - X_n = 0$

والشرط الثاني محقق

فالمتتاليتان متجاورتان.

b. $y_n = x_n + \frac{1}{2n}$

$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{\ }$

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{2n+1} + \frac{-1}{2n+2} > 0$ متزايدة تماماً

$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + \frac{1}{2n+2} - x_n - \frac{1}{2n}$

$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n}$

$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0$ متناقصة تماماً

$\lim_{n\to+\infty} y_n - x_n = \lim \frac{1}{2n} = 0$

متجاورتان

ملاحظة: في حالة $u_{n+1} = f(u_n)$ يكون

مهما يكن العدد x من D يكن $f(x)$ عنصراً من D

مطابقات:

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$$
$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + xa + a^2)$$
$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1})$$

تمارين عامة

[51] لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ معرفة تدريجياً وفق $v_0 = 1$ و $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$.

ⓐ تحقق أن $v_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

ⓑ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n = \frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية.

ⓒ استنتج عبارة v_n بدلالة n ثم جد نهايتها.

الحل:

a. $E(n) \to v_n > 0$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0) \to v_0 > 0$

$1 > 0$

تحققة

نفرض صحة $E(n)$: $E(n) \to v_n > 0$

نثبت صحة $E(n+1)$: $E(n+1) \to v_{n+1} > 0$

$v_n > 0$

$1 + v_n >$

$\frac{v_n}{1+v_n} > 0$

$v_{n+1} > 0$

b. $u_n = \frac{1}{v_n}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$

$\frac{1}{\frac{v_n}{1+v_n}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1+v_n-1}{v_n} = \frac{v_n}{v_n} = 1 = r$

u_n حسابية اساسها $r=1$

c. $u_n = u_m + (n-m)r$

$u_n = u_0 + (n-0)r$

$u_n = \frac{1}{v_0} + nr$

$\Rightarrow u_n = 1+n$

$v_n = \frac{1}{u_n}$

$= \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

[52] (دورة 1 − 2017) نتأمل $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق:

$x_0=3$ ، $x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n-2$ و $y_n=x_n+3$.

ⓐ أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ هندسية.

ⓑ احسب y_n ثم x_n بدلالة n.

ⓒ احسب $S_n=y_0+\cdots+y_n$ و $S'_n=x_0+\cdots+x_n$ بدلالة n.

ⓓ استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq0}$ و $(S'_n)_{n\geq0}$.

الحل:

a. $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{x_{n+1}+3}{x_n+3}$

$=\frac{\frac13 x_n-2+3}{x_n+3}=\frac{\frac13 x_n+1}{x_n+3}=\frac{\frac13(x_n+3)}{x_n+3}=\frac13$

هندسية $q=\frac13$

b. الحد الأول: $y_0=x_0+3=3+3=6$

الحد العام: $y_n=y_m\cdot q^{n-m}$

$y_n=y_0\cdot q^{n-0}=6\left(\frac13\right)^n$

لدينا $y_n=x_n+3$

$x_n=y_n-3$

$x_n=6\left(\frac13\right)^n-3$

c. $S_n=y_0+y_1+\cdots+y_n$

مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q=\frac13$

حدها الأول: $y_0=6$

عدد الحدود: $k=j-i+1=n-0+1=n+1$

$S_n=\frac{6\left(1-\left(\frac13\right)^{n+1}\right)}{1-\frac13}$

$S_n=\ \left(1-\left(\frac13\right)^{n+1}\right)$

$S'_n=x_0+x_1+\cdots+x_n$

$=y_0-3+y_1-3+y_2-3+y_3-3+\cdots y_n-3$

$=\underbrace{y_0+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n}_{S_n}-3-3-3\cdots-3$

$=S_n-3(n+1)$ عدد الحدود

d. $-1<q=\frac13<1$

$\lim_{n\to+\infty}S_n=9(1-0)=9$

$\lim_{n\to+\infty}S'_n=9(1-0)-\infty=-\infty$

[53] المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $u_0=3$ وعند كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=\frac{2}{u_n+1}$. ولتكن $(t_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $t_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$.

ⓐ أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية واحسب نهايتها.

ⓑ استنتج $(u_n)_{n\geq0}$ بدلالة n واحسب نهايتها.

الحل:

a. $\frac{t_{n+1}}{t_n}=\frac{\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}}{\frac{u_n-1}{u_n+2}}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}\cdot\frac{u_n+2}{u_n-1}$

$=\frac{\frac{2}{u_n+1}-1}{\frac{2}{u_n+1}+2}\cdot\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{\frac{2-u_n-1}{u_n+1}}{\frac{2+2u_n+2}{u_n+1}}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}$

$\frac{-u_n+1}{2u_n+4}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=\frac{-(u_n-1)}{2(u_n+2)}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}=-\frac12$

t_n هندسية أساسها $q=-\frac12$

$t_n = t_m \cdot q^{n-m} = t_0 \cdot q^n = \frac{2}{5} \cdot (-\frac{1}{2})^n \quad -1 < q < 1$

$\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$

b. $t_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$

$t_n U_n + 2t_n = U_n - 1$

$t_n U_n - U_n = -2t_n - 1$

$U_n (t_n - 1) = -2t_n - 1$

$U_n = \dfrac{-2t_n - 1}{t_n - 1} = \dfrac{-\frac{4}{5}(-\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{2}{5}(-\frac{1}{2})^n - 1}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{-1}{-1} = 1$

[54] تأمل المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة وفق $u_n = 5 - \dfrac{10}{n^2}$،

ⓐ أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً.

ⓑ جد عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

ⓒ جد نهاية المتتالية ثم حدد الحد الأعلى.

ⓓ بين أي الأعداد الآتية راجح 0، 6، 4.99999، 5 ؟

الحل:

a. $U_n = 5 - \dfrac{10}{n^2}$

$f(x) = 5 - \dfrac{10}{x^2}$

$f'(x) = 0 - \dfrac{0 - 20x}{x^4} = \dfrac{20x}{x^4} > 0$

f متزايد تماماً ومنه المتتالية متزايدة تماماً

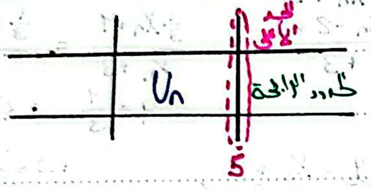
b. $U_n = 5 - \dfrac{10}{n^2}$

$U_n \le 5$

5 عنصر راجح

c. $\lim_{n\to+\infty} U_n = 5$ متقاربة من 5

بما ان المتتالية متزايدة تماماً ومحددة من الأعلى فهي متقاربة من حدها الأعلى الذي هو نهايتها



0 : ليس حد راجح

6 : حد راجح

4,99999 : ليس حد راجح

5 : حد راجح

[55] (دورة 2 – 2021) لتكن $(u_n)_{n\ge0}$: $u_0 = \dfrac{5}{2}$, $u_{n+1} = 2 + (u_n - 2)^2$

ⓐ أثبت $2 \le u_n \le 3$. ثم أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ متناقصة

ⓑ هل هي متقاربة؟ ثم جد نهايتها.

الحل:

a. $E(n) \longrightarrow 2 \le U_n \le 3$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0) \longrightarrow 2 \le U_0 \le 3$

$2 \le \frac{5}{2} \le 3$ محققة

نفرض صحة $E(n)$: $E(n) \longrightarrow 2 \le U_n \le 3$

ونثبت صحة $E(n+1)$ ، $E(n+1) \longrightarrow 2 \le U_{n+1} \le 3$

$2 \le U_n \le 3$

$0 \le U_n - 2 \le 1$

$0 \le (U_n - 2)^2 \le 1$

$2 \le 2 + (U_n - 2)^2 \le 3$

$2 \le U_{n+1} \le 3$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة

$E(n) \longrightarrow U_{n+1} \leq U_n$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0) \longrightarrow U_1 \leq U_0$

$\frac{9}{4} \leq \frac{5}{2}$ محققة

نفرض صحة $E(n)$: $E(n) \longrightarrow U_{n+1} \leq U_n$

نثبت صحة $E(n+1)$: $E(n+1) \longrightarrow U_{n+2} \leq U_{n+1}$

$U_{n+1} \leq U_n$

$U_{n+1} - 2 \leq U_n - 2$

$(U_{n+1}-2)^2 \leq (U_n-2)^2$

$2+(U_{n+1}-2)^2 \leq 2+(U_n-2)^2$

$U_{n+2} \leq U_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة والمتتالية متناقصة

التكملة

b. بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من حدها الأدنى الذي هو حل المعادلة

$f(x) = x$

$2+(x-2)^2 = x$

$2+x^2-4x+4 = x$

$x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$

$x=2 \quad x=3$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$ حد البدء ومتناقص

[56] $(u_n)_{n\geq0}$ معرفة وفق $u_0 = \dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1} = u_n^{\,2} - 2u_n + 2$.

ⓐ أثبت أن $1 \leq u_n \leq 2$ أيا يكن $n \in \mathbb{N}$.

ⓑ أثبت أن $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$ أيا يكن $n \in \mathbb{N}$.

ⓒ اعتماداً على السابق استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

ⓓ أهي متقاربة؟ وحدد نهايتها.

الحل:

$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

$= U_n^2 - 2U_n + 1 - 1 + 2$

$= (U_n - 1)^2 + 1$

a. $E(n) \longrightarrow 1 \leq U_n \leq 2$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0) \longrightarrow 1 \leq U_0 = \frac{3}{2} \leq 2$ محققة

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n) \longrightarrow 1 \leq U_n \leq 2$

$E(n+1) \longrightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq 2$

$1 \leq U_n \leq 2$ بتطبيق التربيع ؟؟

$0 \leq U_n - 1 \leq 1$

$0 \leq (U_n-1)^2 \leq 1$

$1 \leq (U_n-1)^2+1 \leq 2$

$1 \leq U_{n+1} \leq 2$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة.

b. $U_{n+1} - U_n$

$U_n^2 - 2U_n + 2 - U_n$

$U_n^2 - 3U_n + 2$

$(U_n - 2)(U_n - 1)$

c. وجدنا أن : $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$

ولدينا أيضاً : $1 \leq U_n \leq 2$

$U_n - 1 \geq 0 \qquad U_n - 2 \leq 0$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$

والمتتالية متناقصة

d. بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من حدها الأدنى ℓ الذي هو حل المعادلة

$f(x) = x$

$x^2 - 2x + 2 = x$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$

$x = 2 \qquad x = 1$

والمتتالية متناقصة و $U_0 = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

[57] (دورة 2 – 2017) المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$:

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

ⓐ أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$ متتالية متناقصة.

ⓑ أثبت أن $0 \leq u_n \leq 1$، ثم استنتج $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة وجد نهايتها.

الحل:

a. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < 0$

f متناقص تماماً ومنه المتتالية متناقصة تماماً.

b. $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$0 \le U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le$

موجب كل حد موجب   لأن البسط أصغر من المقام

$\Rightarrow 0 \le U_n \le 1$

بما ان المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى

فهي متقاربة ونهايتها:

$U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{\infty} = 0$ متقاربة من 0

[58] $(u_n)_{n\ge0}$ معرّفة وفق: $u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$

لتكن $(v_n)_{n\ge0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - 2u_n$

a) أثبت أنّ $(v_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية.

b) عبّر عن v_n بدلالة n

الحل:

a. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{U_{n+2}-2U_{n+1}}{U_{n+1}-2U_n} = \frac{5U_{n+1}-6U_n-2U_{n+1}}{U_{n+1}-2U_n}$

$= \frac{3U_{n+1}-6U_n}{U_{n+1}-2U_n} = \frac{3(U_{n+1}-2U_n)}{U_{n+1}-2U_n} = 3$

هندسية $q = 3$

b. الحد الأول: $v_0 = U_1 - 2U_0 = 4 - 2 = 2$

الحد العام: $v_n = v_m \cdot q^{n-m}$

$v_n = v_0 \cdot q^{n-0}$

$v_n = (2)(3)^n$

[59] لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ معرّفة: $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

ⓐ ادرس اطراد المتتالية.

ⓑ أثبت بالتدريج أنّ $u_n \ge n^2$ ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\ge0}$.

ⓒ احسب $u_1,\ u_2,\ u_3$ ثم خمن u_n بدلالة n واثبت ذلك.

الحل:

a. $U_{n+1} = U_n + 2n + 3$

$U_{n+1} - U_n = 2n + 3 > 0$ تزايدية تماماً

b. $E(n) \longrightarrow U_n \ge n^2$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0) \longrightarrow U_0 = 1 \ge 0$ محققة

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n) \longrightarrow U_n \ge n^2$

$E(n+1) \longrightarrow U_{n+1} \ge (n+1)^2$

$L_1 = U_{n+1}$

$= U_n + 2n + 3$

$\ge n^2 + 2n + 3$

$\ge n^2 + 2n + 1$

$\ge (n+1)^2 = L_2$

$E(n+1)$ صحيحة ومنه $E(n)$ محققة.

وجدنا أن: $U_n \ge n^2$

$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

حسب المقارنة:

$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ متباعدة

c. $U_1 = U_0 + 2(0) + 3 = 1 + 0 + 3 = 4$

$U_2 = U_1 + 2(1) + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$

$U_3 = U_2 + 2(2) + 3 = 9 + 4 + 3 = 16$

نخمن أن: $U_n = (n+1)^2$

ونثبت ذلك بالتدريج:

$E(n) \longrightarrow U_n = (n+1)^2$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0) \longrightarrow U_0 = 1 = (0+1)^2$

$1 = 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n) \longrightarrow U_n = (n+1)^2$

$E(n+1) \longrightarrow U_{n+1} = (n+2)^2$

$L_1 = U_{n+1}$

$= U_n + 2n + 3$

$= (n+1)^2 + 2n + 3$

$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

$= n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 = L_2$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة.

[60] جد نهاية المتتاليات $(x_n)_{n\ge1}$ و $(y_n)_{n\ge1}$ و $(w_n)_{n\ge1}$ و $(t_n)_{n\ge1}$:

$$x_n=\frac{n^2+1}{n+1},\quad y_n=\frac{x_n}{n},\quad w_n=x_n-n,\quad t_n=\frac{y_n-1}{w_n-1}$$

الحل:

$X_n = \frac{n^2+1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} X_n = +\infty$ متباعدة

$y_n = \frac{X_n}{n} = \frac{\frac{n^2+1}{n+1}}{n} = \frac{n^2+1}{n^2+n}$

$\lim_{n\to+\infty} y_n = 1$ متقاربة من 1

$w_n = X_n - n = \frac{n^2+1}{n+1} - n = \frac{n^2+1-n^2-n}{n+1}$

$= \frac{-n+1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} w_n = -1$ متقاربة من -1

$t_n = \frac{y_n-1}{w_n-1}$

$\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{1-1}{-1-1} = \frac{0}{-2} = 0$ متقاربة من 0

عند ايجاد مجموع حدود متتالية تحوي طرح او لوغاريتم نحلل ...

[61] ليكن $x_n=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$ و $S_n=x_0+x_1+\cdots+x_n$

عبّر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\ge0}$

الحل:

$S_n = x_0+x_1+x_2+\dots+x_n$

$= (\frac{1}{-1}-\cancel{\frac{1}{1}}) + (\cancel{\frac11} - \cancel{\frac13})+(\cancel{\frac13}-\cancel{\frac15})+\cancel{\dots}+(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1})$

$= -1-\frac{1}{2n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = -1$

[62] (دورة 1 – 2019) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بالصيغة:

$$u_n = 1+\frac13+\frac1{3^2}+\frac1{3^3}+\frac1{3^4}+\cdots+\frac1{3^n}$$

ⓐ ادرس اطراد المتتالية.

ⓑ اثبت أن $u_n=\frac12(3-\frac1{3^n})$ واستنتج عنصراً راجحاً عليها

ⓒ هل هي متقاربة؟ ثم جد نهايتها وحدها الأعلى.

الحل:

a. $U_{n+1} = 1+\frac13+\frac1{3^2}+\frac1{3^3}+\frac1{3^4}+\dots+\frac1{3^n}+\frac1{3^{n+1}}$

$U_{n+1}=U_n+\frac1{3^{n+1}}$

$U_{n+1}-U_n=\frac1{3^{n+1}}>0$

متزايدة تماماً

b. مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q=\frac13$

$S = 1\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\quad k=n-0+1=n+1$

$=1\,\frac{1-(\frac13)^{n+1}}{1-(\frac13)} = 1\,\frac{1-(\frac13)^{n+1}}{\frac23}$

$=\frac32\,1-(\frac13)^{n+1}$

$=\frac12\times3(1-(\frac13)^n(\frac13))$

$=\frac12(3-(\frac13)^n)$

$U_n\le\frac32$

الحد الراجح اي عدد اكبر او يساوي $\frac32$

c. بما ان المتتالية متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى

فهي متقاربة من حدها الأعلى الذي هو نهايتها

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim \frac32(1-(\frac13)^{n+1})$ $\quad -1<q<1$

$=\frac32$ متقاربة من $\frac32$

هام **[63]** لتكن المتتالية: $u_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n}$

ⓐ أثبت أن $n\le 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n.

ⓑ استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$.

ⓒ أثبت أن $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة تماماً أهي متقاربة.

عندما يطلب استنتاج راجح ويكون لدينا مجموع نجعل هذا المجموع هو مجموع حدود متتالية هندسية اعتماداً على ملاحظة التدرج ثم نطبق قانون المجموع.

الحل:

a. $E(n)\longrightarrow n\le 2^n$

نثبت صحة $E(0)$:

$E(0)\longrightarrow 0\le 2^0$

$0\le 1$ محققة

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$.

$E(n)\longrightarrow n\le 2^n$

$E(n+1)\longrightarrow n+1\le 2^{n+1}$

$L_1 = n+1$

$\le 2^n+1$

$\le 2^n\cdot 2$

$\le 2^{n+1}=L_2$

$E(n+1)$ محققة ومنه $E(n)$ صحيحة.

b. $U_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}$

$n\le 2^n \qquad 1\le 2^1 \qquad 2\le 2^2 \qquad 3\le {}^3$

$U_n\le \frac{2^1}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}$

$U_n\le \left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$

$a=\frac{2}{3} \qquad k=n$

$U_n\le \frac{a(1-q^k)}{1-q}$

$U_n\le \frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{3}} \qquad U_n\le \frac{2}{3}\times 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

$U_n\le 2-2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$U_n\le 2$ 2 عنصر راجح

c. $U_{n+1}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}+\frac{n+1}{3^{n+1}}$

$U_{n+1}=U_n+\frac{n+1}{3^{n+1}}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{n+1}{3^{n+1}}>0$ متزايدة تماماً

بما أن المتتالية متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

[64] المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ معرفة عند $n\ge1$ وفق:

$$u_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$$

ⓐ أثبت أن $\frac{n^2}{n^2+n}\le u_n\le\frac{n^2}{n^2+1}$، أياً يكن $n\ge1$.

ⓑ استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$

الحل:

ملاحظة: أكبر الحدود × عددها ≥ متتالية المجاميع ≥ أصغر الحدود × عددها

$n\times\frac{n}{n^2+n}\le U_n\le n\times\frac{n}{n^2+1}$

$\frac{n^2}{n^2+n}\le U_n\le\frac{n^2}{n^2+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=\lim\frac{n^2}{n^2+1}=1\longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

[65] المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0=2$ و $u_{n+1}=2u_n-3$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n.

ⓐ احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 ثم خمن عبارة u_n بدلالة n.

ⓑ أثبت صحة تخمينك.

الحل:

a. $U_1=2U_0-3=2(2)-3=1$

$U_2=2U_1-3=2(1)-3=-1$ $\quad +2$

$U_3=2(U_2)-3=2(-1)-3=-5$ $\quad +4$

$U_4=2(U_3)-3=2(-5)-3=-13$ $\quad +8$

$U_5=2(U_5)-3=2(-13)-3=-29$ $\quad +16$

إنشاء حدود متتالية معرفة بالتدريج هندسياً

- نرسم خط التابع f وخط المنصف $y = x$.
- نوجد نقطة التقاطع بينهما بحل المعادلة $f(x) = x$.
- نعيين u_0 ثم نكتر وفق التابع ونرجع وفق المنصف.

[66] مثل هندسياً الحدود الأولى من المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$، ثم خمن جهة اطردها إذا كانت مطردة ونهايتها المحتملة.

ⓐ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$.

ⓑ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$.

ⓒ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n + 2$.

الحل:

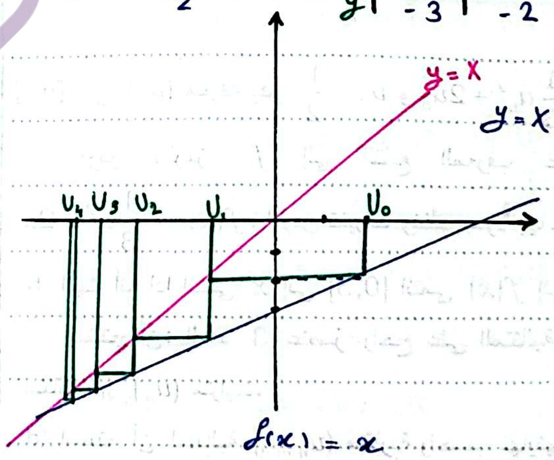
a. $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3 \qquad U_0 = 2$

$f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

x	0	2
y	-3	-2

$y = x$

x	0	1
y	0	1



$f(x) = x$

$\frac{1}{2}x - 3 = x$

$\frac{1}{2}x = -3 \rightarrow x = -6$

U_n متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى

متقاربة من -6

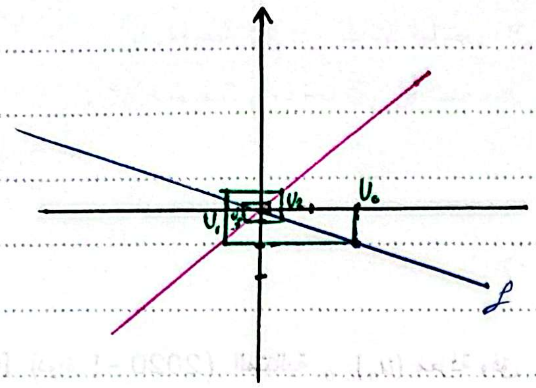
تابع ← خلف ← ارجع ox

شاقولي ← افقي ← شاقولي

b. $U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n \qquad U_0 = 2$

$f(x) = -\frac{1}{2}x$

x	0	2
y	0	-1



غير مطردة محدودة

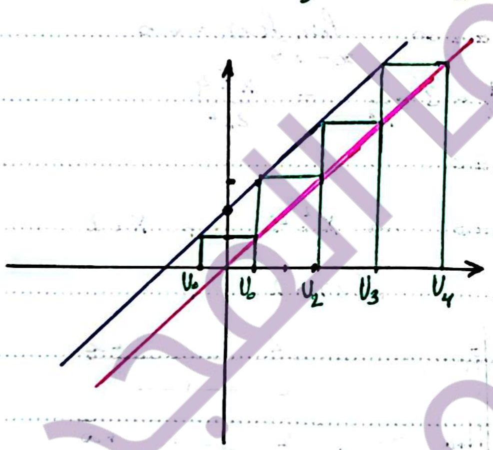
م تزداد وتتناقص

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

c. $U_{n+1} = U_n + 2 \qquad U_0 = -1$

$f(x) = x + 2$

x	0	1
y	2	3



متزايدة تماماً

غير محدودة من الأعلى

$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ متباعدة

[67] (دورة 1 − 2020) المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0=3$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\frac{2}{u_n}$.

ⓐ ليكن $u_{n+1}=f(u_n)$، ادرس تغيرات f المعرف على $]0,+\infty[$.

ⓑ برهن بالتدريج أن $2\le u_{n+1}\le u_n$ مهما كان العدد n.

ⓒ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

a.

$f(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

$f'(x)=\frac{1}{2}+2\cdot-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}$

$f'(x)=0$

ينعدم البسط

$x^2-4=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=2$

$x=-2$ مرفوض

$f(2)=2$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

b.

$2\le U_{n+1}\le U_n$

$E(n)\longrightarrow 2\le U_{n+1}\le U_n$

نثبت صحة $E(0)$:

$E(0)\longrightarrow 2\le U_1\le U_0$

$2\le\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\le 3$ محققة

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n)\longrightarrow 2\le U_{n+1}\le U_n$

$E(n+1)\longrightarrow 2\le U_{n+2}\le U_{n+1}$

$2\le U_{n+1}\le U_n$

$f(2)\le f(U_{n+1})\le f(U_n)$ حيث f متزايد على $[2,+\infty[$

$2\le U_{n+2}\le U_{n+1}$

c. بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من حدها الأدنى

$f(x)=x$

$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=x$

$x^2+4=2x^2$

$x^2=4$

$x=2$

$x=-2$ مرفوض

$\lim_{n\to+\infty} U_n=2$

[68] $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n^{\,2}+2u_n$.

ⓐ نرمز بالرمز f إلى التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x$. ادرس تغيرات ونظم جدولاً بها.

ⓑ أثبت أنه إذا انتمى x إلى $[0,3]$ انتمى $f(x)$ إلى $[0,3]$.

ⓒ استنتج أن: العدد 3 عنصرٌ راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$. وأن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة.

ⓓ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

a.

$f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x$ $\qquad D=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$

$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

$f'(x) = 0$

$-\frac{2}{3}x + 2 = 0$

$-\frac{2}{3}x = -2 \qquad -2x = -6 \qquad x = 3$

$f(3) = 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

b. $x \in [0,3] \qquad 0 \leq x \leq 3$

$f(0) \leq f(x) \leq f(3)$

$0 \leq f(x) \leq 3$ حيث f متزايد على $[0,3]$

$\Longrightarrow f(x) \in [0,3]$

c. $U_n \leq U_{n+1} \leq 3$

$E(n) \to U_n \leq U_{n+1} \leq 3$

نثبت صحة $E(0)$: $E(0) \to U_0 \leq U_1 \leq 3$

$\frac{1}{2} \leq \frac{11}{12} \leq 3$ محققة

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n) \to U_n \leq U_{n+1} \leq 3$

$E(n+1) \to U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 3$

$U_n \leq U_{n+1} \leq 3$

$f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(3)$ حيث f متزايد على $]-\infty, 3]$

$U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 3$ محققة

d. بما أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة من حدها الأعلى

$f(x) = x \qquad -\frac{1}{3}x^2 + 2x = x \qquad -\frac{1}{3}x^2 + x = 0$

$x(-\frac{1}{3}x + 1) = 0$

$x = 0$ مرفوض

$x = 3$ مقبول الحد الأول $\frac{1}{2}$ ومتزايدة

$\rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 3$.

[69] $\mathcal{H}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x - 5y = 1$ ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي $\mathcal{P}$ النقطة $M'(6x-10y, x-y)$، أي $f(M) = M'$ لتكن $S_0(1,0)$، ومتتالية النقاط $(S_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق $S_{n+1} = f(S_n)$. أثبت أنّ S_n نقطة من المجموعة $\mathcal{H}$.

الحل:

♣ عند اشتقاق $\sin$ أو $\cos$ يمكن أن نضيف الى الزاوية $\frac{\pi}{2}$ أي $(\sin x)' = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right), (\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

[70] ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sin 3x$

ⓐ أوجد المشتقات المتتالية للتابع f حتى المرتبة الثالثة

ⓑ أثبت أنه أياً كان $n \in \mathbb{N}^*$، فإن $f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}+3x\right)$

الحل:

a. $f(x) = \sin 3x$

$f^{(1)}(x) = 3^1 \sin(3x + 1\frac{\pi}{2})$

$f^{(2)}(x) = 3^2 \sin(3x + 2\frac{\pi}{2})$

$f^{(3)}(x) = 3^3 \sin(3x + 3\frac{\pi}{2})$

b. $E(n) \longrightarrow f^{(n)}(x) = 3^n \sin(3x + n\frac{\pi}{2})$

نثبت صحة $E(1)$: $E(1) \longrightarrow f^{(1)} = 3 \sin(3x + \frac{\pi}{2})$ محققة

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$:

$E(n) \longrightarrow f^{(n)} = 3^n \sin(3x + n\frac{\pi}{2})$

$E(n+1) \longrightarrow f^{(n+1)} = 3^{n+1} \sin(3x + (n+1)\frac{\pi}{2})$

$(f^{(n)}(x))' = (3^n \sin(3x + n\frac{\pi}{2}))'$

$f^{(n+1)}(x) = 3 \cdot 3^n \cdot \sin(3x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$

$f^{(n+1)}(x) = 3^{n+1} \cdot \sin(3x + (n+1)\frac{\pi}{2})$

[71] ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x) = \frac{1}{1-x}$ عندئذ يعطى المشتق من المرتبة n بالصيغة $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

الحل:

$E(n) \longrightarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

نثبت صحة $E(1)$: $E(1) \longrightarrow f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ محققة

نفرض صحة $E(n)$ ونثبت صحة $E(n+1)$

$E(n) \longrightarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

$E(n+1) \longrightarrow f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

$(f^{(n)}(x))' = \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)'$

$f^{(n+1)}(x) = \frac{0-(n+1)(1-x)^n(-1)(n!)}{(1-x)^{2n+2}}$

$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$ محققة