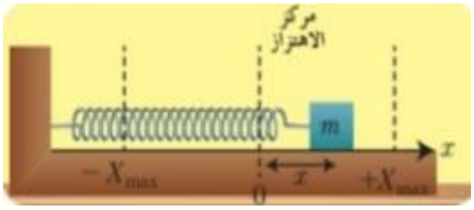
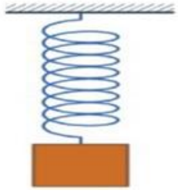
مراجعات في الفيزياء

الميكانيك

2026

النواس المرن (الحركة التو افقية البسيطة)

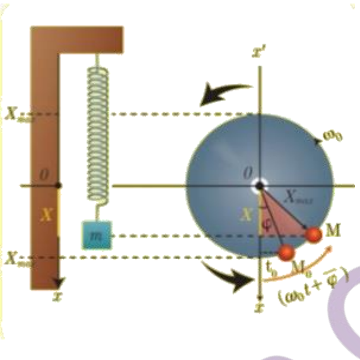




- **النواس المرن:** عبارة عن جسم كتلته m معلق بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k
- يهتز الجسم على جانبي وضع التوازن بحركة توافقية بسيطة
- ((تدل التجربة أن حركة النواس دورية)) ويحسب دورها تجريبيا" من العلاقة: $T_0 = \frac{t}{n}$

  حيث (t) زمن الهزات و (n) عدد الهزات))
- طول القطعة المستقيمة التي يرسمها مركز عطالة الجسم في النواس المرن أثناء حركته $(2X_{max})$.
- الزمن اللازم للإنتقال من وضع مطاله $(x = X_{max})$ إلى وضع مطاله $(x = -X_{max})$ لأول مرة هو $\frac{T_0}{2}$.
- الزمن اللازم للإنتقال من وضع مطاله $(x = X_{max})$ إلى وضع التوازن $(x = 0)$ لأول مرة هو $\frac{T_0}{4}$.
- المسافة التي يقطعها مركز عطالة الجسم في النواس المرن خلال دور هي $(4X_{max})$

العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة والحركة التو افقية البسيطة (تمثيل فرينل):



يتصف شعاع فرينل $(\overrightarrow{OM})$ بما يلي :

1) الطور الابتدائي للحركة $\bar{\varphi}$: هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x`x}$ في اللحظة $t = 0$.
2) طور الحركة $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$: هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x`x}$ في اللحظة t.
3) سعة الحركة X_{max}: هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الثابتة عند الدوران.
4) النبض الخاص للحركة ω_0 يقابل السرعة الزاويّة التي تدور بها النقطة
5) مطال الحركة $\bar{x}$ هو مسقط الشعاع $\overrightarrow{OM}$ على المحور $\overrightarrow{x`x}$ وهو متغير بتغير الزمن.

نلاحظ أن النسبة: $\frac{\bar{x}}{X_{max}} = \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ فيكون التابع الزمني لحركة المسقط تابع جيبي من الشكل :

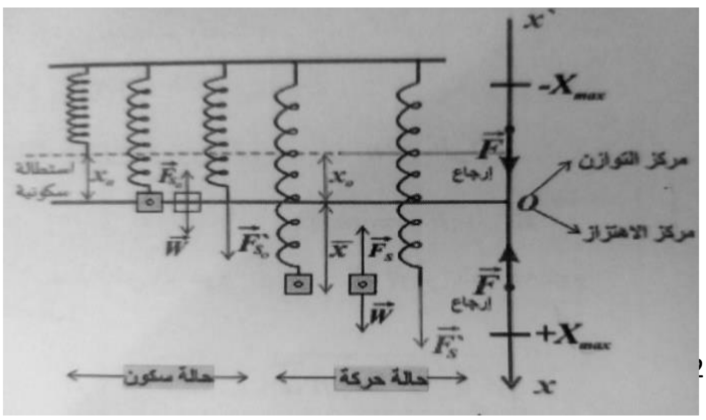
$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لذلك تسمى الحركة جيبيّة انسحابيّة (توافقيّة بسيطة).

س1: ((قوة الإرجاع)) : برهن ان محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في النواس المرن في كل لحظة هي قوة ارجاع تعطى بالعلاقة $(\overline{F} = -K\overline{x})$.

او- بصيغة أخرى- جسم كتلته (m) معلق بأسفل نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة ثابت صلابته k حلقاته متباعدة :

1 ادرس جملة (جسم- نابض) في حالة التوازن وأثبت أن $x_0 = \frac{m.g}{k}$:



ج: يستطيل النابض مسافة x_0 بعد تعليق الجسم فيه ، و يتوازن

الجسم تحت تأثير قوتين : $\overrightarrow{W}$ ثقل الجسم $\overrightarrow{F_{S_0}}$ توتر النابض

عند التوازن $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$\overrightarrow{W} + \vec{F}_{S_0} = \vec{0}$ نسقط على محور شاقولي موجه للأسفل

$W - F_{S_0} = 0 \Rightarrow W = F_{S_0}$

تؤثر في النابض القوة $\overrightarrow{F`_{S_0}}$ تسبب استطالة x_0

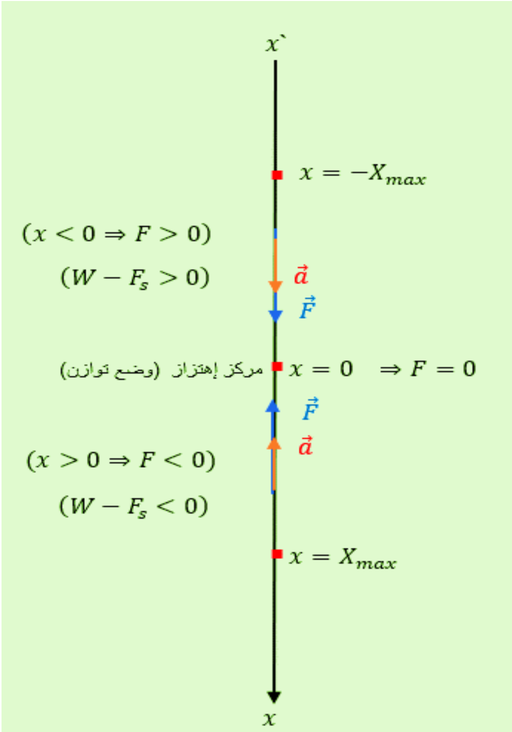
$F`_{S_0} = F_{S_0} = K.x_0 \Longrightarrow w = k.x_0$ فتكون الإستطالة السكونية : $x_0 = \frac{m.g}{k}$

2 نشد الجسم عن وضع التوازن مسافة $(\bar{x})$ ونتركه يهتز ادرس جملة (جسم+نابض) في وضع الحركة وأثبت أن $\bar{F} = -k.\bar{x}$ ؟

ج : يؤثر في الجسم القوتين :

$\vec{w}$ قوة الثقل

$\vec{F_S}$ توتر النابض



حسب قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{w} + \vec{F_S} = m\vec{a}$ نسقط على محور

شاقولي موجه للأسفل:

$$w - F_S = m.\bar{a}$$

وتؤثر في النابض قوة $\overrightarrow{F`_S}$ تسبب إستطالة $(\bar{x} + x_0)$ لكن

$F`_S = F_S = K(\bar{x} + x_0)$ بالتعويض نجد:

$$w - K(\bar{x} + x_0) = m.\bar{a}$$

$w - K.\bar{x} - k.x_0 = m.\bar{a}$ ولإن $w = k.x_0$

$$-k.\bar{x} = m.\bar{a} = \bar{F}$$

فتكون العلاقة المعبرة عن قوة الإرجاع: $\{\bar{F} = -K.\bar{x}\}$

((أي محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة إرجاع لأنها تعيد الجسم إلى مركز الإهتزاز دوماً وتتجه نحو مركزه، تتناسب طردا" مع المطال $\bar{x}$ وتعاكسه بالإشارة))

س2 : انطلاقا من العلاقة المعبرة عن قوة الإرجاع في النواس المرن $(\bar{F} = -K\bar{x})$ استنتج طبيعة الحركة ثم استنتج العلاقة المعبرة عن دور حركته ناقش علاقة الدور:

$$m.\bar{a} = -k.\bar{x}$$

$$\bar{a} = -\frac{k}{m}\bar{x}$$

$$(\bar{x})'' = -\frac{k}{m}\bar{x} \qquad (1)$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلا جيبيا" من الشكل:

$\bar{x} = X_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ وللتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن :

تابع السرعة: $\bar{v} = (\bar{x})`_t = -\omega_0.X_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

تابع التسارع: $\bar{a} = (\bar{x})''_t = -\omega_0^2.\ X_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2.\bar{x} \qquad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجد:

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ وبالتالي $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ وهذا محقق لإن (k, m) موجبان والحركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة)

ولاستنتاج الدور: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ وبالتالي: $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ، $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

نلاحظ الدور الخاص: (1) لا يتعلق بالسعة X_{max}

(2) يتناسب طردا" مع الجذر التربيعي للكتلة m

(3) يتناسب عكسا" مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k

س3: نواس مرن دور حركته T_0 سعة حركته X_{max}

1: اكتب تابع المطال في الحركة التو افقية البسيطة بشكله العام:

ج: $\bar{x} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

2: بفرض أن مبدأ الزمن $(t = 0)$ عندما كان الجسم في مطاله الأعظمي الموجب $(x = X_{max})$ استنتج قيمة الطور الابتدائي و اكتب تابع المطال بشكله المختزل:

ج: $(t = 0, x = X_{max})$

$X_{max} = X_{max} . \cos\varphi$

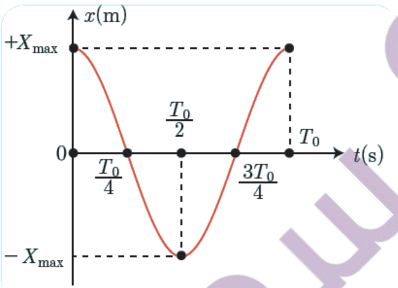
$\cos\varphi = 1$ وبالتالي $(\varphi = 0)rad$ فيأخذ التابع الشكل المختزل: $\bar{x} = X_{max} . \cos\omega_0 t$

3: أكمل الجدول الآتي : $x = X_{max} . \cos\frac{2\pi}{T_0} t$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0	$\frac{5T_0}{4}$
x	X_{max}	0	$-X_{max}$	0	X_{max}	0

4: ارسم المنحني البياني لتغيرات المطال بدلالة الزمن خلال دور

ج:



5: أحدد المواضع التي يأخذ فيها المطال: (a) قيمة عظمى (طويلة) (b) قيمة معدومة

ج: a- المطال أعظمي (طويلة) في الموضعين الطرفيين $x = |\pm X_{max}|$

b- المطال معدوم في مركز الاهتزاز $x = 0$

6: أحدد مطال الجسم في اللحظة $t = \frac{3T_0}{2}$

ج: $x = X_{max} . \cos\frac{2\pi}{T_0} t$

$x = X_{max} . \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} . \frac{3T_0}{2}\right)$

$x = X_{max} . \cos(3\pi) \Longrightarrow x = -X_{max}$

س4: إذا علمت ان تابع المطال في الحركة التو افقية البسيطة: $x = X_{max} \cos\omega_0 t$ ، المطلوب:

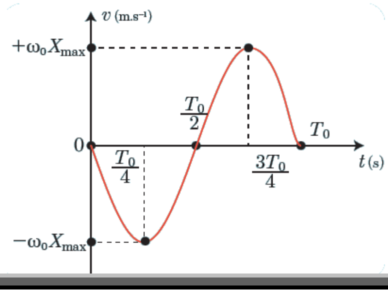
1: استنتج علاقة تابع السرعة:

ج: $\bar{v} = (\bar{x})`_t \Longrightarrow \bar{v} = -\omega_0 . X_{max} . \sin\omega_0 t$

2: أكمل الجدول التالي: $\bar{v} = -\omega_0 . X_{max} . \sin\frac{2\pi}{T_0} t$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$\omega_0 X_{max}$	0

3: ارسم المنحني البياني لتغيرات السرعة بدلالة الزمن خلال دور:



4: أحدد المواضع التي تأخذ فيها السرعة: A) قيمة عظمى طويلة   B) قيمة معدومة

ج : A) السرعة أعظمية (طويلة) $v_{max} = |\pm\omega_0 . X_{max}|$ لحظة المرور في مركز الإهتزاز.

B) السرعة معدومة $v = 0$ لحظة المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين).

5: أحدد قيمة سرعة الجسم وجهة حركته في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$:

ج :
$$\bar{v} = -\omega_0 . X_{max} . \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} . \frac{5T_0}{4}\right)$$
$$\bar{v} = -\omega_0 . X_{max} . \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$
$\bar{v} = -\omega_0 . X_{max}$. اتجاه سالب

س5 : إذا علمت ان تابع المطال في الحركة التو افقية البسيطة: $x = X_{max} \cos \omega_0 t$ ، المطلوب:

1: استنتج علاقة تابع التسارع بدلالة المطال:

ج: $\bar{v} = (\bar{x})`_t = -\omega_0 . X_{max} . \sin \omega_0 t$ تابع السرعة

$\bar{a} = (\bar{x})"_t = -\omega_0^2 . \ X_{max} . \cos \omega_0 t$ تابع التسارع

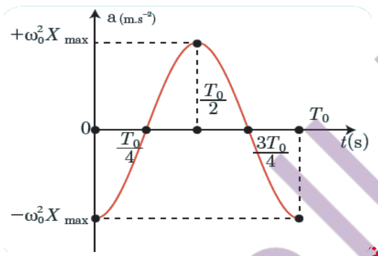
$$\bar{a} = -\omega_0^2 . \bar{x}$$

2: أكمل الجدول التالي: $\bar{a} = -\omega_0^2 . \ X_{max} . \cos \frac{2\pi}{T_0} \ t$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a	$-\omega_0^2 \ X_{max}$	0	$\omega_0^2 \ X_{max}$	0	$-\omega_0^2 \ X_{max}$

3: ارسم المنحني البياني لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دور:

ج:



4: أحدد المواضع التي يأخذ فيها التسارع: A) قيمة عظمى (طويلة)   B) قيمة معدومة

ج: A) التسارع أعظمي طويلة $a_{max} = |\pm\omega_0^2 . X_{max}|$ عند المرور في المطالين الأعظميين.

B) التسارع معدوم $(a = 0)$ عند المرور في مركز الإهتزاز.

5: أحدد قيمة تسارع الجسم في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$

ج:
$$\bar{a} = -\omega_0^2 . \ X_{max} . \cos \frac{2\pi}{T_0} . \frac{5T_0}{4}$$
$$\bar{a} = -\omega_0^2 . \ X_{max} . \cos \frac{5\pi}{2} \implies \quad a = 0$$

س6: 1 برهن أن الطاقة الميكانيكية لهزازة جيبيه انسحابيه غير متخامدة هي طاقة ثابتة في كل لحظة؟

ج : الطاقة الميكانيكية للنواس المرن هي مجموع الطاقتين: الكامنة و الحركية:

$$E_{tot} = E_p + E_k$$

الطاقة الكامنة المرونية للنابض هي $E_p = \frac{1}{2} k \ x^2$ نعوض تابع المطال: $\bar{x} = X_{max} . \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$E_p = \frac{1}{2} k \ X_{max}^2 \ cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ الطاقة الحركية للجسم هي $E_k = \frac{1}{2} m \ v^2$

نعوض تابع السرعة: $\bar{v} = -\omega_0 . X_{max} . \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$E_k = \frac{1}{2} \ m \ \omega_0^2 \ X_{max}^2 \ sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

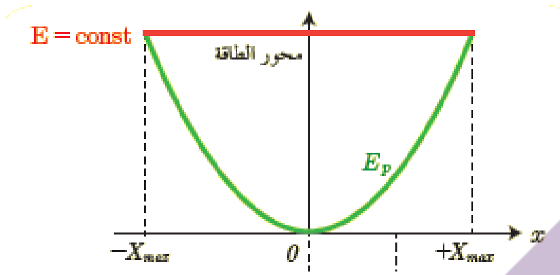
لكن $m \ \omega_0^2 = k$ وبالتالي:

$$E_k = \frac{1}{2}\, k\, X_{max}^2\, sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

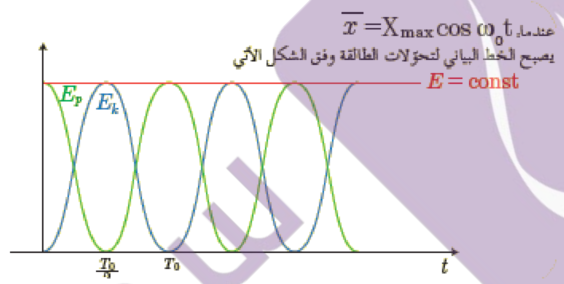
$$E_{tot} = \frac{1}{2} k\, X_{max}^2 cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2}\, k\, X_{max}^2\, sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\, k\, X_{max}^2 = const$$

② ارسم الخط البياني المعبرعن تحولات الطاقة بدلالة المطال:



③ بفرض أن $x = X_{max} \cos \omega_0 t$ ارسم الخط البياني لتحولات الطاقة بدلالة الزمن:



④ ما نوع الطاقة في كل من :

① بوضع التوازن: تكون الطاقة الحركية عظمى $x = 0 \Longrightarrow E_P = 0 \Longrightarrow E_K = E$

② عند الوضعين الطرفيين: تكون الطاقة الكامنة عظمى $v = 0 \Longrightarrow E_k = 0 \Longrightarrow E_p = E$

س 7: في النواس المرن برهن أنّ السرعة تعطى بالعلاقة: $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$.

$$E = E_k + E_p \quad ، \quad E_k = E - E_p$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow mv^2 = k(X_{max}^2 - x^2)$$

$$v^2 = \frac{k}{m}(X_{max}^2 - x^2)$$

- لكن: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

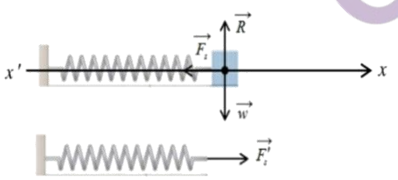
$$v^2 = \omega_0^2(X_{max}^2 - x^2) \Longrightarrow v = \pm\omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

س 8 : نابض مرن مهمل حلقاته متباعدة ثابت صلابته k، مثبت من أحد طرفيه ، ويربط بطرفه الأخرجسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرك على سطح أفقي أملس ، كما في الشكل المجاور ، نشد الجسم مسافة أفقية مناسبة ، ونتركه يهتزدون سرعة ابتدائية والمطلوب :

1- ادرس حركة الجسم، واستنتج التابع الزمني للمطال.

2- استنتج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} في كل من الموضعين (A) و(B)

علما" بأن $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ و $x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$



الحل: **جملة المقارنة**: خارجيّة، **الجملة المدروسة**: النواس المرن.(كتلة +نابض)

القوى الخارجيّة المؤثرة في مركز عطالة الجسم:

- قوة توتر النابض $\vec{F}_s$.
- قوة الثقل $\vec{W}$.
- قوة رد فعل السطح الأفقي على الجسم $\vec{R}$.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{w} + \vec{R} + \vec{F_s} = m\vec{a}$

بالإسقاط على محور أفقي موجه كما في الشكل: $0 + 0 - F_s = ma \Rightarrow -F_s = m(x)''_t$

تؤثر في النابض القوّة $\vec{F_s}`$ الناتجة عن الاستطالة $\bar{x}$:

$F`_S = F_S = kx$ وبالتالي $-kx = m(x)''_t$

$$(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\bar{x}$$

معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\bar{x})`_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2\,\bar{x}$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضليّة نجد: $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ وهذا محقق لإنّ $(m\,, k)$ موجبان، إذا حركة الجسم المربوط بالنابض الأفقي جيبية انسحابية التابع الزمني للمطال: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

a) مطلوب استنتاج علاقة E_k بدلالة X_{max} عند كل من:

-1 $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$

$$E_{tot} = E_p + E_k \rightarrow E_k = E - E_p \rightarrow E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}k\frac{X_{max}^2}{4} \rightarrow E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}kX_{max}^2 \rightarrow E_k = \frac{3}{8}kX_{max}^2$$

-2 $x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$

$$E_k = E_{tot} - E_p \rightarrow E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}k\frac{X_{max}^2}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}kX_{max}^2 \rightarrow E_k = \frac{1}{4}kX_{max}^2$$

نتيجة: عند زيادة القيمة المطلقة للمطال تزداد طاقته الكامنة المرونية وتنقص طاقته الحركيّة.

ملاحظات لحل مسائل النواس المرن

* علاقة الدور: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ نلاحظ أن الدور:

يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي للكتلة m	يتناسب عكساً "مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k	لا يتعلق بالسعة X_{max}

أو $T_O = \frac{2\pi}{\omega_O}$ أو $T_O = \frac{1}{f_O}$

أو: $T_O = \frac{\text{زمن الهزات } (t)}{\text{عدد الهزات } (N)}$

* لحساب النبض الخاص: ω_O

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

أو أي علاقة تحوي ω_O

* تابع المطال $x = X_{max}\cos(\omega_o t + \varphi)$

* **الطاقات:**

الطاقة الكامنة: $E_P = \frac{1}{2}Kx^2$

تكون عظمى في المطالين الأعظميين $x = \mp X_{max} \Leftrightarrow E_p = E$	تكون معدومة عند المرور بوضع التوازن $x = 0 \Leftrightarrow E_p = 0$

الطاقة الحركية: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$

تكون عظمى عند المرور بوضع التوازن $x = 0 \Leftrightarrow E_k = E$	تكون معدومة عند المطالين الأعظميين $x = \mp X_{max} \Leftrightarrow E_k = 0$

الطاقة الميكانيكية: $E = \frac{1}{2}Kx_{max}^2$

$$E = E_P + E_K$$

* لحساب E_k من أجل قيمة ما لـ x

$$E_k = E - E_P$$
$$E_k = E - \frac{1}{2}Kx^2$$

* لحساب الاستطالة السكونية :

المطال أعظمي (طويلة) في الموضعين الطرفيين $x = \lvert\mp X_{max}\rvert$	المطال معدوم في مركز الاهتزاز $x = 0$

* لحساب السرعة في لحظة ما (من أجل زمن ما) نستخدم تابع السرعة :

$$v = -\omega_o X_{max} . \sin(\omega_o t + \varphi)$$

* السرعة العظمى طويلة : $v_{max} = \lvert\mp \omega_o x_{max}\rvert$ لحظة المرور بوضع التوازن (مركز الاهتزاز)	السرعة معدومة $(v = 0)$ لحظة الوجود في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين)

*لحساب السرعة من أجل قيمة ما لـ x:

$$v = \mp\omega_0\sqrt{x_{max}^2 - x^2}$$

* قوة الارجاع $\bar{F} = -k\bar{x}$

(دائما" تتجه نحو مركز الاهتزاز لها حامل وجهة شعاع التسارع)

شدة قوة الإرجاع: $(F = k.x)$

* التسارع بدلالة المطال: $a = -\omega_0^2 x$

*التسارع الأعظمي طويلة في المطالين الأعظميين: $a_{max} = \lvert\mp\omega_0^2 . x_{max}\rvert$	التسارع معدوم $(a = 0)$ عند المرور في مركز الاهتزاز (وضع التوازن)

عند التوازن $W = Fs_o = F^{`}s_o$

$$mg = kx_o \Rightarrow x_o = \frac{mg}{k}$$

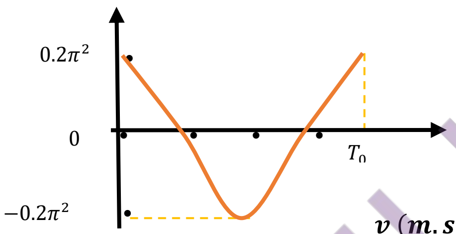
* تذكر $k = \omega_o^2 m \leftrightarrow x_o = \frac{mg}{\omega_o^2 m} = \frac{g}{\omega_o^2}$

مفاهيم أولية:

- طول القطعة المستقيمة التي يرسمها مركز عطالة الجسم في النواس المرن أثناء حركته $(2X_{max})$.
- الزمن اللازم للإنتقال من وضع مطاله $(x = X_{max})$ إلى وضع مطاله $(x = -X_{max})$ لأول مرة هو $\frac{T_0}{2}$.
- الزمن اللازم للإنتقال من وضع مطاله $(x = X_{max})$ إلى وضع التوازن $(x = 0)$ لأول مرة هو $\frac{T_0}{4}$.
- المسافة التي يقطعها مركز عطالة الجسم في النواس المرن خلال دور هي $(4X_{max})$

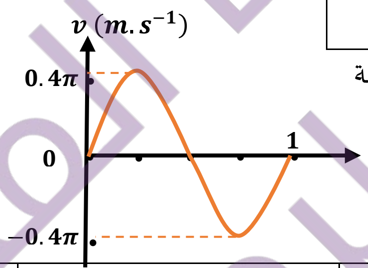
اختر الإجابة الصحيحة لكُل ممّا يأتي:

-1 يمثل الخط البياني في الشكل المجاور تغيرات التسارع لحركة جيبية انسحابية ، فإذا كانت سعة الحركة $X_{max} = 0.8\ m$ فإن دور الحركة مقدرا" بالثانية :



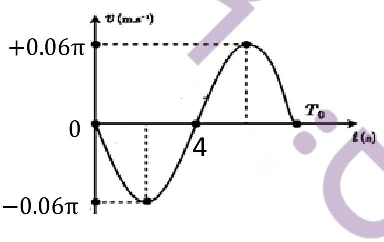
a	4	b	2
c	1	d	0.5

-2 يمثل الخط البياني في الشكل المجاور تغيرات السرعة لحركة جيبية انسحابية فإن سعة الحركة مقدرة بالمتر تساوي:



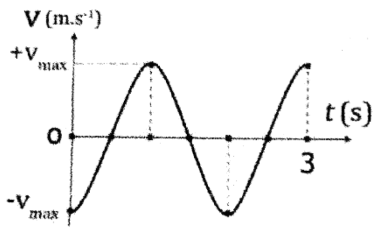
a	0.2	b	0.01	c	0.3	d	0.001

-3 يمثل الرسم البياني المجاور تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة توافقية بسيطة، فيكون التابع الزمني للسرعة هو:



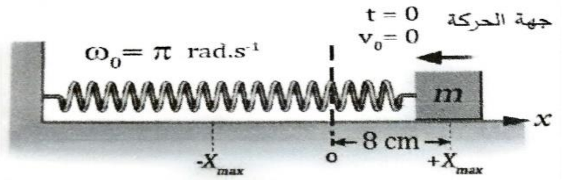
a	$v = -0.06\pi \sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})$	b	$v = -0.06\pi \sin\frac{\pi}{2}t$
c	$v = -0.06\pi \sin\frac{\pi}{4}t$	d	$v = +0.06\pi \sin\frac{\pi}{4}t$

-4 يمثل الشكل البياني المجاور تغيرات السرعة بدلالة الزمن لجسم يتحرك حركة جيبية انسحابية فإذا كانت سعة الحركة $X_{max} = 0.2\ m$ تكون السرعة العظمى للحركة (طويلة) تساوي:



a	$\frac{\pi}{10}\ m.s^{-1}$	b	$\frac{\pi}{2}\ m.s^{-1}$	c	$\frac{\pi}{3}\ m.s^{-1}$	d	$\frac{\pi}{5}\ m.s^{-1}$

-5 ① تابع المطال الذي يصف حركة الهزازة الجيبية في الشكل المجاور هو:



a	$\bar{x} = 0.08\cos\pi t$	b	$\bar{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)$	c	$\bar{x} = 8\cos(\pi t - \pi)$	d	$\bar{x} = 0.8\cos(\pi t - \pi)$

-6 إن جهة شعاع قوة الارجاع في النواس المرن:

a	مع جهة شعاع التسارع دائماً	b	مع جهة شعاع السرعة دائماً	c	عكس جهة شعاع السرعة دائماً	d	عكس جهة شعاع التسارع دائماً

-7 حركة جيبية انسحابية لنواس مرن فيه $(\bar{x})''_t = -4\bar{x}$ فإن نبض الحركة الجيبيّة مقدراً بـ $rad.s^{-1}$:

a	2	b	4	c	1	d	16

-8 هزازة توافقية بسيطة، مؤلفة من نابض مرن مهمل الكتلة ثابت صلابة النابض k ، معلق شاقولياً ويحمل في نهايته السفلية جسماً صلباً كتلته m واستطالته السكونية x_0 فإن دوره T_0 يعطى بالعلاقة:

a	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$	b	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$	c	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{m}}$	d	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g}}$

-9 يعطى طور الحركة في اللحظة (t) في الحركة التوافقية البسيطة بالعلاقة:

a	$\overline{\varphi}$	b	$\omega_0 t + \overline{\varphi}$	c	$\omega_0 t$	d	$\cos(\omega_0 t + \overline{\varphi})$

ملاحظة: لو انفصل الجسم عند المرور في وضع التوازن وهو متجه للأسفل فإن الحركة (قذف شاقولي للأسفل) وإذا انفصل في أحد الوضعين الطرفيين فإن الحركة (سقوط حر)

حل المسائل التالية:

المسألة الأولى: تهتز كرة معدنيّة كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 100\ N.m^{-1}$، بحركة توافقيّة بسيطة دورها الخاص $T_0 = \frac{\pi}{5}\ s$، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 12\ cm$، باعتبار مبدأ الزمن $t = 0$ لحظة مرور الكرة في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$، وهي تتحرك بالاتجاه السالب. **المطلوب:**

-1 استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقاً من شكله العام.

-2 عيّن لحظة المرور الأول للكرة في موضع التوازن، ثمّ احسب سرعتها عندئذٍ.

-3 احسب كتلة الكرة m. واحسب شدّة قوّة الإرجاع في نقطة مطالها $x = 4\ cm$

-4 احسب الاستطالة السكونيّة للنابض.

-5 احسب الطاقة الميكانيكيّة (الكليّة) لهذا النواس. باعتبار أنّ $(g = 10\ m.s^{-2}, \pi^2 = 10)$

-1 $x = X_{max}\cos(\omega_o t + \varphi)$

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10\ rad.s^{-1}$$

φ من شروط البدء

$$t = 0\ , x = \frac{X_{max}}{2}\ , v < 0$$

$$\frac{X_{max}}{2} = X_{max}.\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}\ rad$$

أو $\varphi = -\frac{\pi}{3}\ rad$

$$t = 0\ , v < 0$$

$$v = -\omega_0 X_{max}.\sin(\omega_o t + \varphi)$$

$$v = -\omega_0 X_{max}.\sin\varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$v = -\omega_0 X_{max}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$$ مقبول

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$v = -\omega_0 X_{max}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$$ مرفوض

يخالف شروط البدء

$$x = 12 \times 10^{-2}\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)\quad m$$

-2 $x = 0 \Rightarrow \cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$$10t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

مرور أول $k = 0$

$$10t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 10t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{60}\ s$$

$$v = -\omega_0 X_{max}.\sin(\omega_o t + \varphi)$$

$$v = -10 \times 12 \times 10^{-2}.\sin\left(10 \times \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -1.2\sin\frac{\pi}{2} = -1.2\ m.s^{-1}$$

-3

$$k = \omega_0^2\ m \Rightarrow m = \frac{100}{100} = 1\ kg$$

$$F = -kx = |-kx| = 100 \times 0.04$$

$$F = 4\ N$$

-4

$$x_0 = \frac{m\ g}{k} = \frac{1 \times 10}{100} = 0.1\ m$$

-5

$$E = \frac{1}{2}kX_{max}^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times (0.12)^2$$

$$E = 72 \times 10^{-2}\ J$$

المسألة الثانية: هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نقطة مادية كتلتها $m = 100\ g$ معلقة بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة شاقولي تهتز بدور خاص $1sec$ وبسعة اهتزاز $16\ cm$ فبفرض مبدأ الزمن عندما تكون النقطة المادية في مطالها الأعظمي الموجب. **المطلوب:**

1- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقا من شكله العام.

2- عين لحظة المرور الأول للنقطة المادية في مركز الاهتزاز.

3- احسب قيمة السرعة العظمى للنقطة المادية (طويلة).

4- احسب قيمة ثابت صلابة النابض والإستطالة السكونية له

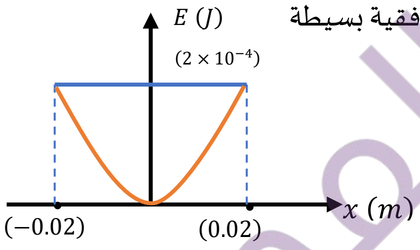
5- احسب تسارع النقطة المادية لحظة مرورها في وضع مطاله $x = 5\ cm$.

6- احسب الطاقة الميكانيكية لهذه الهزازة. 7- احسب الطاقة الحركية للنقطة المادية عندما يكون مطالها $x = 10\ cm$.

الحل:

$m = 0.1\ kg\ , T_0 = 1\ s$ $X_{max} = 16 \times 10^{-2}\ m$ ① $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega_o = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$ φ من شروط البدء $t = 0\ , x = X_{max}$ $X_{max} = X_{max}.\cos\varphi$ ② $\cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ $x = 16 \times 10^{-2}\cos 2\pi t$ $x = 0 \Rightarrow \cos 2\pi t = 0$	$2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k$ مرور أول $k = 0$ $2\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4}\ s$ ③ $v_{max} = \omega_0 X_{max} = 2\pi \times 0.16$ $v_{max} = 32\pi \times 10^{-2}\ m.s^{-1}$ ④- $k = \omega_0^2.m = 40 \times 10^{-1}$ $k = 4\ N.m^{-1}$ $x_0 = \frac{m\ g}{k} = \frac{0.1 \times 10}{4} = 0.25\ m$ ⑤- $a = -\omega_0^2.x = -40 \times 5 \times 10^{-2}$ $a = -2\ m.s^{-2}$	⑥- $E = \frac{1}{2}kX_{max}^2$ $E = \frac{1}{2} \times 4 \times 256 \times 10^{-4}$ $E = 512 \times 10^{-4}J$ ⑦- $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ $E_p = \frac{1}{2} \times 4 \times 100 \times 10^{-4}$ $E_p = 200 \times 10^{-4}J$ $E_k = E - E_p = (512 - 200)10^{-4}$ $E_k = 312 \times 10^{-4}J$

المسألة الثالثة: يوضح الرسم البياني المجاور تغيرات الطاقة الكامنة المرونية بتغيّر الموضع لهزّازة توافقية بسيطة مؤلّفة من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته m



والمطلوب:

1- احسب قيمة ثابت صلابة النابض.

2- اذا علمت أن دور الحركة $T_0 = \frac{\pi}{5}\ S$ أحسب كتلة الجسم المعلق بالنابض .

3- احسب طاقته الكامنة والطاقة الحركية عندما $(x = 0.01\ m)$.

الحل:

-1 $E = 2 \times 10^{-4}J$ $X_{max} = 0.02\ m$ $E = \frac{1}{2}kX_{max}^2 \Rightarrow$ $k = \frac{2 \times 2 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-4}} = 1\ N.m^{-1}$	-2 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \frac{\pi}{5} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{1}}$ $\frac{1}{25} = 4\ m \Rightarrow m = 10^{-2}\ kg$ -3 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$	$E_p = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 10^{-4}$ $E_p = \frac{1}{2} \times 10^{-4}J$ $E_k = E - E_p = \left(2 - \frac{1}{2}\right)10^{-4}$ $E_k = \frac{3}{2} \times 10^{-4}J$

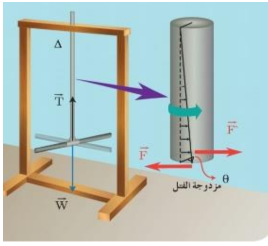
المسألة الرابعة : تشكل هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة ، حلقاته متباعدة ، ثابت صلابته $k = 100\ N.m^{-1}$ مثبت من إحدى نهايتيه إلى نقطة ثابتة ، ويحمل في نهايته الثانية جسما" كتلته $m = 1\ kg$ فإذا علمت أن مبدأ الزمن لحظة مرور الجسم في مركز الإهتزاز وهو يتحرك بالإتجاه السالب بسرعة $v = -5\ m.s^{-1}$ **والمطلوب:**

①استنتج التابع الزمني للمطال انطلاقا" من شكله العام . ②- احسب شدة قوة الإرجاع عندما $(x = 2\ cm)$

الحل:

-① $x = X_{max}\cos(\omega_o t + \varphi)$ $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\, rad.s^{-1}$ φ من شروط البدء $t = 0\,, x = 0\,, v < 0$ $0 = X_{max}.cos\varphi$ $cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ أو $\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$v = -\omega_0 X_{max}.\sin(\omega_o t + \varphi)$ $t = 0\,, v < 0$ $v = -\omega_0 X_{max}.\sin\varphi$ $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $v = -\omega_0 X_{max} < 0$ مقبول $\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $v = +\omega_0 X_{max} > 0$ مرفوض يخالف شروط البدء	$t = 0\,, v = -5\, m.s^{-1}$ $-5 = -10 \times X_{max} \times \sin\frac{\pi}{2}$ $X_{max} = 0.5\, m$ $x = 0.5\cos(10t + \frac{\pi}{2})$ ② $F = -kx$ $F = \|-kx\|$ $F = 100 \times 0.02 = 2N$

النواس الفتل غير المتخامد



ساق معدنية متجانسة معلقة من منتصفها بسلك فتل رفيع شاقولي ثابت فتله (k). نُدير الساق في مستوٍ أفقي حول سلك التعليق بزاوية (θ) ونتركها تهتز. ادرس حركة الساق مبيناً طبيعتها ثم استنتج علاقة الدور الخاص موضحاً دلالات الرموز وواحداتها:

ج: القوى الخارجية المؤثرة في الساق:

$\vec{w}$: ثقل الساق ، $\vec{T}$: توتر السلك

$\vec{\eta}$: مزدوجة الفتل تتولد في السلك عندما ندير الساق زاوية (θ) تعمل على إعادة الساق إلى وضع توازنها عزمها $\bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = -k.\bar{\theta}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني حول محور دوران ينطبق على السلك $\sum \bar{\Gamma}_{/\Delta} = I_\Delta.\bar{\alpha}$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = I_\Delta.\bar{\alpha}$$

إن عزم كل من قوة الثقل $\vec{w}$ وقوة التوتر $\vec{T}$ معدوم لأن حامل كل منهما منطبق على محور الدوران Δ

$$0 + 0 - K.\bar{\theta} = I_\Delta.\bar{\alpha}$$

$$(\bar{\theta})'' = -\frac{k}{I_\Delta}\bar{\theta} \qquad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلا جيبيا" من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

وللتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

تابع السرعة الزاوية $\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

تابع التسارع الزاوي $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\ \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\bar{\theta} \qquad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجد:

$\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta}$ وبالتالي $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$ وهذا محقق لأن (k, I_Δ) موجبان والحركة جيبية دورانية ، ولإستنتاج الدور:

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ وبالتالي: $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

T_0: الدور الخاص واحدته (sec).

k ثابت فتل سلك التعليق واحدته $(m.N.rad^{-1})$

I_Δ عزم عطالة الجملة حول محور الدوران $(kg.m^2)$

نلاحظ:

1- الدور لا يتعلق بالسعة الزاوية للحركة θ_{max}

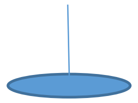
-2 يتناسب الدور طردا" مع الجذر التربيعي لعزم عطالة جملة النواس حول محور الدوران.

-3 يتناسب الدور عكساًمع الجذر التربيعي لثابت فتل السلك.

*ثابت فتل سلك التعليق : $K = \grave{k}\,\frac{(2r)^4}{l}$

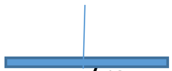
((تستخدم عندما نغير طول سلك الفتل (l) تتغير (k) فيتغير الدور ويمكن حساب ثابت الفتل من العلاقة $(k = \omega_0^2 . I_\Delta)$))

ملاحظات حساب عزم عطالة الجملة :

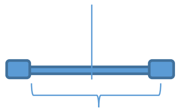


① ساق متجانسة (او قرص) كتلتها m معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي : $I_\Delta = I_{\Delta/C}$ حيث

لقرص $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} m r^2$ ، لساق $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} m l^2$



② ساق متجانسة كتلتها (m) معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي وتحمل كتلتين $(m_1 = m_2)$ على بعد $(r_1 = r_2)$ من المنتصف : $I_\Delta = I_{\Delta/C} + I_{\Delta/\text{كتلتين}}$ حيث $I_{\Delta/\text{كتلتين}} = 2 m_1 r_1^2$



وعندما تكون الكتلتين بطرفي الساق: $r_1 = r_2 = \frac{l}{2}$

③ ساق مهملة الكتلة معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي وتحمل كتلتين $(m_1 = m_2)$ على بعد $(r_1 = r_2)$ من المنتصف:

$$\left(I_{\Delta/\text{للساق}} = 0\right) \quad ، \quad \left(I_\Delta = I_{\Delta/\text{كتلتين}} = 2 m_1 r_1^2\right)$$

④ قرص كتلته (m) مثبت عليه ساق كتلتها (M) تحمل في طرفيها كتلتين $(m_1 = m_2)$ البعد بينهما $(2r_1)$

$$I_\Delta = I_{\Delta/\text{قرص}} + I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\text{كتلتين}}$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{12} M l^2 + 2 m_1 r_1^2$$

((نواس الفتل))

تذكرة ببعض قوانين البحث :

تابع المطال الزاوي : $\theta = \theta_{max} \cos(\omega_o t + \varphi)$ تابع السرعة الزاوية : $\omega = -\omega_o \theta_{max} \sin(\omega_o t + \varphi)$ السرعة الزاوية العظمى طويلة $\omega_{max} = \omega_o \theta_{max}$ تسارع زاوي بدلالة المطال الزاوي $\alpha = -\omega_o^2 \theta$	الطاقة الكامنة المرونية $E_P = \frac{1}{2} K \theta^2$ الطاقة الحركية الدورانية $E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$ أو $E_K = E - E_P$ الطاقة الميكانيكية $E = \frac{1}{2} K \theta_{max}^2$	الدور $T_O = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$ النبض الخاص للحركة $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$ ثابت فتل السلك $k = \omega_0^2 . I_\Delta$ عزم الإرجاع $\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = -k.\bar{\theta}$

بعض القوانين الهامة لحل المسائل:

ثابت فتل سلك التعليق : $K = \grave{k}\,\frac{(2r)^4}{l}$

((تستخدم عندما نغير طول سلك الفتل (l) تتغير (k) فيتغير الدور ويمكن حساب ثابت الفتل من العلاقة $(k = \omega_0^2 . I_\Delta)$))

ملاحظات حساب عزم عطالة الجملة :

① ساق متجانسة (او قرص) كتلتها m معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي : $I_\Delta = I_{\Delta/C}$ حيث

لقرص $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} m r^2$ ، لساق $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} m l^2$

② ساق متجانسة كتلتها (m) معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي وتحمل كتلتين $(m_1 = m_2)$ على بعد $(r_1 = r_2)$ من المنتصف :

$I_\Delta = I_{\Delta/C} + I_{\Delta/\text{كتلتين}}$ حيث $I_{\Delta/\text{كتلتين}} = 2 m_1 r_1^2$

وعندما تكون الكتلتين بطرفي الساق: $r_1 = r_2 = \frac{l}{2}$

③ ساق مهملة الكتلة معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي وتحمل كتلتين $(m_1 = m_2)$ على بعد $(r_1 = r_2)$ من المنتصف:

$$\left(I_{\Delta/\text{للساق}} = 0\right) \quad ، \quad \left(I_\Delta = I_{\Delta/\text{كتلتين}} = 2 m_1 r_1^2\right)$$

4 قرص كتلته (m) مثبت عليه ساق كتلتها (M) تحمل في طرفيها كتلتين $(m_1 = m_2)$ البعد بينهما $(2r_1)$

$I_\Delta = I_{\Delta/\text{قرص}} + I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\text{كتلتين}}$

$I_\Delta = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}Ml^2 + 2m_1r_1^2$

اخترالإجابة الصحيحة لكُل ممّا يأتي:

1) نواس فتل دوره الخاص $T_0 = 2\ s$ نجعل طول سلك الفتل فيه ربع ما كان عليه، فيصبح دوره الخاص الجديد T_0\` مساوياً:

$T_0\text{\`} = 1\ s$	d	$T_0\text{\`} = 0.5\ s$	c	$T_0\text{\`} = 4s$	b	$T_0\text{\`} = 8\ s$	a

2) نعلّق ساقين متماثلتين بسلكي فتل متماثلين طول الأول L_1 وطول الثاني L_2، فإذا علمت أنّ $T_{01} = 2T_{02}$ فإنّ:

$L_1 = \sqrt{2}L_2$	d	$L_1 = 4L_2$	c	$L_1 = 2L_2$	b	$L_1 = \frac{1}{4}L_2$	a

3) نواس فتل مؤلف من ساق معلقة بمنتصفها بسلك فتل شاقولي طوله l يهتز بدور خاص T_0، نقسم سلك الفتل إلى قسمين متساويين ونعلق الساق بعدئذ بنصفي السلك معاً أحدهما من الأعلى، والآخر من الأسفل ومن منتصفها ويثبت طرف هذا السلك من الأسفل بحيث يكون شاقولياً، فيصبح الدور الخاص الجديد للساق T_0\`:

$T_0\text{\`} = 2T_0$	d	$T_0\text{\`} = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$	c	$T_0\text{\`} = \frac{T_0}{2}$	b	$T_0\text{\`} = \frac{T_0}{4}$	a

4) ميقاتية تعتمد في عملها على نواس فتل (مؤالف من قرص أفقي متجانس معلق من منتصفه بسلك فتل شاقولي)، ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها، قدّم الطلاب مقترحهم فإن الاقتراح الصحيح هو:

زيادة قطر القرص مع المحافظة على كتلته	d	إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل	c	زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره	b	زيادة طول سلك الفتل بمقدار ضئيل	a

5) ساق متجانسة كتلتها (m) طولها (l) معلقة من منتصفها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله (k) ، فإن محصلة عزوم القوى المؤثرة بالساق وهي متزنة تحقق العلاقة :

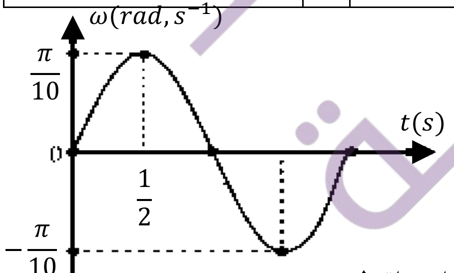
$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	d	$\sum \vec{F} = \vec{0}$	c	$\sum \overline{\Gamma}/\Delta = 0$	b	$\sum \overline{\Gamma}/\Delta = I_\Delta\alpha$	a

6) إن طبيعة حركة نواس الفتل غير المتخامد هي حركة:

جيبية انسحابية	d	جيبية	c	جيبية دورانية	b	دورانية	a

7) يتألف نواس فتل من ساق مهملة الكتلة ، مثبت في كل من طرفيها كتلتان متساويتان ،نعلق الجملة بسلك فتل شاقولي ثابت فتله $(\boldsymbol{k})$ ، ندير الجملة عن وضع التوازن ونتركها فتهتز بدور خاص $(\boldsymbol{T_0})$ ، فإذا جعلنا البعد بين الكتلتين نصف ماكان عليه ، فإن الدور الجديد :

$T\text{\`}_0 = 4T_0$	d	$T\text{\`}_0 = \frac{T_0}{4}$	c	$T\text{\`}_0 = 2T_0$	b	$T\text{\`}_0 = \frac{T_0}{2}$	a



8) يمثل الرسم البياني المجاور، تغير السرعة الزاوية بدلالة الزمن في الحركة الجيبية الدورانية لنواس فتل، فيكون التابع الزمني للسرعة الزاوية:

$\omega = -\frac{\pi}{10}\sin(\pi t + \pi)$	B	$\omega = -\frac{\pi}{10}\sin(\pi t)$	a
$\omega = -\frac{\pi}{10}\sin(\pi t - \frac{\pi}{2})$	D	$\omega = -\frac{\pi}{10}\sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$	c

9) ميقاتية تعتمد في عملها على نواس فتل مكوّن من قرص متجانس، معلّق من مركزه إلى سلك فتل شاقولي، تقدّم بالوقت، ولتصحيح التقدّم الحاصل في قياس الوقت فيها ينبغي أن:

نزيد طول سلك الفتل	**D**	ننقص طول سلك الفتل	**C**	نزيد قطر القرص مع المحافظة على كتلته	**B**	ننقص كتلة القرص مع المحافظة على قطره	**A**

حل المسائل التالية:

المسألة الأولى: يتألف نواس فتل من قرص متجانس نصف قطره (20 cm) معلق بسلك فتل شاقولي، عزم عطالة القرص حول محور عمود على مستويه ومار من مركز عطالته ($0.02\ kg.m^2$) ودوره الخاص(2 s)، **والمطلوب:**

1- حساب قيمة كتلة القرص علماً أن ($I_{\Delta/c\ \text{قرص}} = \frac{1}{2}\ mr^2$).

2- حساب قيمة ثابت الفتل لسلك التعليق.

3- استنتاج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام باعتبار مبدأ الزمن لحظة ترك القرص دورن سرعة ابتدائيّة بعد أن أدير القرص بمقدار نصف دورة عن وضع توازنه بالاتجاه الموجب. انتبه نصف دورة $(\theta = \pi\ rad)$

4- حساب السرعة الزاوية العظمى (طويلة) للقرص .

$r = 2\times 10^{-1}\ m$ $I_\Delta = 2\times 10^{-2}\ kg.m^2$ $T_0 = 2\ s$ -1 $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2}mr^2$ $m = \frac{2\times I_{\Delta/c}}{r^2} = \frac{2\times 0.02}{0.04}$ $m = 1\ kg$ -2 $k = \omega_0^2.I_\Delta$ $\omega_o = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ rad.s^{-1}$	$k = \pi^2 \times 2\times 10^{-2}$ $k = 0.2\ m.N.rad^{-1}$ 3- تترك دون سرعة ابتدائيّة $t = 0\ , \theta = \pi\ rad = \theta_{max}$ $\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\pi = \pi.\cos\varphi$ $\cos\varphi = 1 \Longrightarrow \varphi = 0\ rad$ $\theta = \pi\cos(\pi t)$ -4 $\omega_{max} = \omega_0\theta_{max}$ $= \pi\times\pi = 10\ rad.s^{-1}$	-5 $\alpha = -\omega_0^2.\theta$ $= -\pi^2 \times -\frac{\pi}{2} = \frac{10\times\pi}{2}$ $\alpha = 5\pi\ rad.s^{-2}$ $E = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2$ $E = \frac{1}{2}\times 2\times 10^{-1}\times\pi^2$ $E = 1\ J$

المسألة الثانية :يتألف نواس فتل من ساق أفقية متجانسة معلقة بسلك فتل شاقولي يمر من منتصفها وبعد أن تتوازن نديرها بزاوية(90^0) في مستوي أفقي ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $(\ t = 0\ )$ فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $(1\ s)$ فإذا علمت أن عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك الفتل $2\times 10^{-3}\ kg.m^2$. **المطلوب:**

1- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة انطلاقا من شكله العام.

2- احسب السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الأول بوضع توازنها.

3- احسب التسارع الزاوي للساق عندما تصنع زاوية (-45^o) مع وضع توازنها.

4- احسب ثابت فتل سلك التعليق.

5- في تجربة ثانية نأخذ الساق السابقة و نثبت في كلٍ من طرفيها كتلتان نقطيتان $(m_1 = m_2 = 0.2\ kg)$ يصبح دور الحركة $T`_0 = 2\ s$ **والمطلوب** استنتج كتلة الساق بدلالة الكتل النقطية وأحسب قيمتها

1- شروط البدء: تترك دون سرعة ابتدائية $t = 0\ , \theta = \frac{\pi}{2}\ rad = \theta_{max}$ $T_0 = 1\ s$ $I_\Delta = 2\times 10^{32}\ kg.m^2$ $\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega_o = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$ φ من شروط البدء $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cos\varphi \Longrightarrow \cos\varphi = 1 \Longrightarrow \varphi = 0$ $\theta = \frac{\pi}{2}\cos 2\pi t$ -2 $\theta = 0\ ,\ \cos 2\pi t = 0$ $2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k$	مرور أول $k = 0$ $2\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4}\ s$ $\omega = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega = -2\pi\times\frac{\pi}{2}\sin\left(2\pi\times\frac{1}{4}\right)$ $\omega = -10\times 1 = 10\ rad.s^{-1}$ -3 $\alpha = -\omega_0^2.\theta$ $= -(2\pi)^2 - \frac{\pi}{4} = 10\pi\ rad.s^{-2}$ -4 $k = \omega_0^2.I_\Delta$ $= 40\times 2\times 10^{-3}$ $= 8\times 10^{-2} m.N.rad^{-1}$	5- توازن بين الدورين قبل وبعد تعليق الكتل: $\frac{T_0}{T_0`} = \frac{T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c}}{K}}}{T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c} + I_{\Delta/\text{كتل}}}{K}}}$ $\frac{T_0^2}{T_0^{2`}} = \frac{I_{\Delta/c}}{I_{\Delta/c} + I_{\Delta/\text{كتل}}}$ $\frac{1}{4} = \frac{I_{\Delta/c}}{I_{\Delta/c} + I_{\Delta/\text{كتل}}}$ $4I_{\Delta/c} = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/\text{كتل}}$ $3I_{\Delta/c} = 2m_1 r_1^2$ $3\times\frac{1}{12}m\ell^2 = 2m_1\frac{\ell^2}{4}$ ساق $m = 2m_1 = 2\times 0.2$ $m = 0.4\ kg$

المسألة الثالثة: ساق مهملة الكتلة طولها $(\ell = 0.2\ m)$ نثبت في كل من طرفيها كتلة نقطيّة $(m_1 = m_2)$ ونعلّق الجملة من منتصفها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ لتؤلف الجملة نواس فتل، نزيح الساق عن وضع توازنها في مستو أفقي بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3} rad$ وتترك دون سرعة ابتدائيّة لحظة بدء الزمن فتهتز بحركة جيبيّة دورانيّة دورها الخاص $2.5\ s$ ، **المطلوب:**

1. استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.
2. استنتج قيمة كل من الكتلتين النقطيتين (m_1, m_2).
3. احسب الطاقة الكامنة للنواس عندما $\left(\theta = \frac{\pi}{6} rad\right)$ وأحسب الطاقة الحركية عندئذٍ

الحل:

-1 $\ell = 0.2\ m , r_1 = r_2 = \frac{\ell}{2} = 0.1\ m$ $k = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ $T_0 = 2.5\ s$ $\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega_o = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5} rad.s^{-1}$ φ من شروط البدء $t = 0 , \theta = 3\ rad = \theta_{max}$ ترك دون سرعة ابتدائيّة	$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ $\theta = \frac{\pi}{3} \cos\frac{4\pi}{5} t \quad rad$ -2 $T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{16 \times 10^{-3}}}$ $\frac{25}{4} = \frac{40\ I_\Delta}{16 \times 10^{-3}}$ $I_\Delta = 25 \times 10^{-4}\ kg.m^2$	$I_\Delta = 2m_1 r_1^2$ $m_1 = \frac{I_\Delta}{2r_1^2} = \frac{25 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-2}} = 0.125kg$ -3 $E_P = \frac{1}{2}K\theta^2 = \frac{1}{2}16 \times 10^{-3} \times \frac{\pi^2}{36}$ $= \frac{2}{9} \times 10^{-2}\ J$ $E = \frac{1}{2}K\theta_{max}^2 = \frac{8}{9} \times 10^{-2}\ J$ $E_k = E = E_p = \frac{2}{3} \times 10^{-2}\ J$

المسألة الرابعة: ساق أفقية متجانسة مهملة الكتلة طولها $(12\ cm)$ معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي يمر من منتصفها نثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية $(m_1 = m_2 = 0.1\ kg)$ ندير الساق في مستوي أفقي بزاوية قدرها $\left(\frac{\pi}{3} rad\right)$ انطلاقا" من وضع توازنها ونتركها من دون سرعة ابتدائية في اللحظة $(t = 0)$ فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص T_0 فإذا علمت أن الطاقة الميكانيكية لنواس الفتل السابق هي $E_{tot} = 4 \times 10^{-3} J$ **المطلوب:**

-1 احسب قيمة ثابت فتل السلك k . -2 احسب الدور الخاص للنواس T_0

-3 استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقا" من شكله العام .

-4 إذا أن يصبح دور النواس السابق $T`_0 = 1\ S$ فكم يجب أن يكون البعد بين الكتلين ؟ $(\pi^2 = 10)$

-1 $E = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2$ $4 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times k \times \frac{10}{9}$ $k = 72 \times 10^{-4} m.N.rad^{-1}$ -2 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$ $I_\Delta = I_{\Delta/\text{كتلتين}} = 2m_1 r_1^2$ $I_\Delta = 2 \times 10^{-1} \times 36 \times 10^{-4}$ $I_\Delta = 72 \times 10^{-5} kg.m^2$ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{72 \times 10^{-5}}{72 \times 10^{-4}}}$ $T_0 = \mathbf{2\pi}\sqrt{1 \times 10^{-1}} = \mathbf{2\ s}$	-3 $\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ φ شروط من البدء $t = 0 , \theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$ $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cos\varphi \Rightarrow cos\varphi = 1$ $\varphi = 0\ rad$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2}$ $\omega_0 = \pi\ rad.s^{-1}$ $\theta = \frac{\pi}{3} \cos\pi\ t$ -4 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta`}{k}}$	$1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta`}{2 \times 10^{-4}}}$ $I_\Delta` = 18 \times 10^{-5} kg.m^2$ $I_\Delta` = \mathbf{2}m_1 r`^2$ $r`^2 = \frac{18 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-1}}$ $r` = 3 \times 10^{-2} m$ $2r` = 6 \times 10^{-2} m$

المسألة الأولى: يتألف نواس فتل من ساق مهملة الكتلة، طولها $l = 1m$، تحمل في كل من طرفيها كتلة نقطية m، نعلّق الساق من منتصفها بسلك فتل شاقولي ثابت فتله $k = 0.01m.nrad^{-1}$ نزيح الساق في مستوٍ أفقي زاوية $\theta = +\frac{\pi}{4}$ عن موضع توازنها الأفقي، ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ فتهتز بحركة جيبية دورانية، دورها الخاص $T_0 = 2\pi\ s$ **المطلوب حساب:**

1- قيمة الكتلة النقطية m
2- التابع الزمني للمطال انطلاقاً من شكله العام.
3- السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الأول في موضع التوازن.
4- الطاقة الميكانيكية للجملة.
5- نجعل طول السلك نصف ما كان عليه استنتج قيمة الدور الجديد.

المسألة الثانية: يتألّف نواس فتل من قرص متجانس كتلته $m = 2kg$ نصف قطره $r = 4cm$ معلّق من مركزه إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $k = 16\times10^{-3}\ m.N.rad^{-1}$ ندير القرص في مستوٍ أفقي زاوية $\bar{\theta} = +\frac{\pi}{4}rad$ عن وضع توازنه ونتركه دون سرعة ابتدائيّة في اللحظة $t = 0$ إذا علمت أن عزم عطالة قرص حول محور عموديّ على مستويه ومار من مركزه $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2}mr^2$ **المطلوب حساب:**

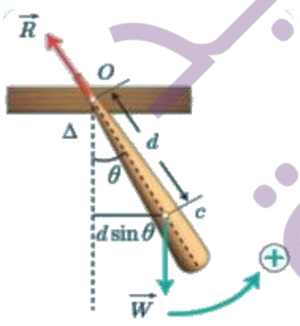
1- قيمة عزم عطالة جملة النوّاس I_Δ بالنسبة إلى سلك الفتل.
2- قيمة الدور الخاصّ للنوّاس T_0
3- التابع الزمني للحركة انطلاقا من شكله العام.
4- قيمة الطاقة الميكانيكية للجملة E

النواس الثقلي المركب

س 1- عرف النواس الثقلي المركب:

الجواب: كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم ثقله في مستو شاقولي حول محور دوران أفقي لا يمر من مركز عطالته، وعمودي على مستويه.

س 2-نعلق جسما "صلبا" كتلته (m) مركزعطالته (c) إلى محور دوران أفقي (Δ) مارمن النقطة (o) من الجسم حيث البعد $(d = oc)$ ، نزيح الجسم عن موضع توازنه الشاقولي زاوية (θ) ونتركه دون سرعة ابتدائية ليهتز في مستوي شاقولي ادرس حركة الجسم , و أثبت أن $(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\sin\theta$ ، ثم استنتج العلاقة المعبرة عن الدور من اجل السعات الزاوية الصغيرة:



ج: القوى الخارجية المؤثرة :

$\vec{W}$: ثقل الجسم. $\vec{R}$: رد فعل محور الدوران على الجسم.

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني (نظرية التسارع الزاوي):

$$\sum \bar{\Gamma}_\Delta = I_\Delta.\bar{\alpha} \Longrightarrow \bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_\Delta.\bar{\alpha}$$

وباعتبار الجهة الموجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة نجد:

$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$ لأن حامل القوة يمر من محور الدوران Δ

$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} = -d.\sin\theta.W$ بالتعويض

$$-d.\sin\theta.W + 0 = I_\Delta.\bar{\alpha} \Longrightarrow -m.g.d.\sin\theta = I_\Delta.(\bar{\theta})''_t$$

وبالتالي: $\boxed{(\bar{\theta})''_t = -\frac{m.g.d}{I_\Delta}\sin\theta}$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تحتوي $\sin\theta$ فحلها ليس جيبيا" ومن ذلك فالحركة اهتزازية غير توافقية .

أما من أجل السعات الزاوية الصغيرة $(\theta \le 0.24\ rad)$

تكون $\sin\theta \approx \theta$ تصبح المعادلة:

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{m.g.d}{I_\Delta}.\bar{\theta} \quad (1).....$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

وللتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تابع السرعة الزاوية

$\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\ \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تابع التسارع الزاوي

$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\bar{\theta} \quad (2)$$

بالمقارنة بين (1) و(2) نجد : $\omega_0^2 = \frac{m.g.d}{I_\Delta}$

وبالتالي $\omega_0 = \sqrt{\frac{m.g.d}{I_\Delta}} > 0$ وهذا محقق لإن (m, g, d, I_Δ) مقادير موجبة فحركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية نبضها ω_0 ،

ولاستنتاج الدور : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

وبالتالي: $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{m.g.d}{I_\Delta}} \Leftarrow$ $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}}$

T_0 : دور النواس الثقلي الخاص بسعة صغيرة واحدته (S).

I_Δ : عزم عطالة الجسم الصلب واحدته $(kg.m^2)$.

d: بعد محور الدوران (o)عن مركز عطالة الجسم الصلب (c) واحدته (m).

ملاحظة: تصبح علاقة الدور من أجل السعات الكبيرة. $(\theta_{max} > 0.24\ rad)$:

$$\mathbf{T_0` = T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)}$$

ملاحظات:

1. عندما يزداد الإرتفاع عن سطح الأرض تنقص قيمة الجاذبية ،وعندما تنقص قيمة الجاذبية يزداد الدور
2. عندما تؤخر الميقاتية يزداد الدور والعكس عندما تنقص قيمة الدور تقدم الميقاتية
3. الطاقة الميكانيكية =الطاقة الكامنة الثقالية+الطاقة الحركية

$$E = E_P + E_K$$

النواس الثقلي البسيط

س 1 (1) عرف النواس الثقلي البسيط نظرياً و عملياً, ماذا يعني أن النواس الثقلي يدق الثانية,

(2) ثم استنتج العلاقة المعبرة عن دوره في حال السعات الصغيرة انطلاقاً من دور النواس الثقلي المركب.

(3) ثم ماذا يطرأ على قيمة الدور عندما: -a نزيد قيمة الكتلة. -b نجعل طول الخيط ربع ما كان عليه. -c ما هي علاقة الدور للسعات الكبيرة.

الجواب : (1)

نظرياً: نقطة مادية تهتز تحت تأثير ثقلها على بعد ثابت (l) من محور دوران أفقي ثابت

عملياً: كرة صغيرة كتلتها (m) كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة لايمتط طوله(l) كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة

((نواس ثقلي يدق الثانية دوره $T_0 = 2\ s$)).

(2) دور النواس الثقلي المركب للسعات الصغيرة $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$

في النواس الثقلي: $I_\Delta = ml^2$ ، $(d = l)$

نعوض في علاقة الدور

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{m.g.l}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

③ a) الدور لا يتعلق بالكتلة b) عندما نجعل طول السلك ربع ما كان عليه

$T_0` = 2\pi\sqrt{\frac{l`}{g}}$ وأن $\left(l` = \frac{l}{4}\right)$

$$T_0` = 2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}}$$

$$T_0` = \frac{1}{2}\,T_0 \Leftarrow T_0` = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.\frac{1}{2}$$

c) الدور في حال السعات الكبيرة $(\theta_{max} > 0.24\,rad)$ يعطى بالعلاقة : $T_0` = T_0\left(1 + \frac{\theta^2_{max}}{16}\right)$

س 2 - ادرس تحريكياً نواس ثقلي بسيط واستنتج العلاقة المعبرة عن دوره من اجل السعات الزاوية الصغيرة:

الجواب :1- طريقة أولى((طريقة الكتاب)): القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

$\vec{w} = m\,\vec{g}$ ثقل الكرة. ، $\vec{T}$ توتر الخيط.

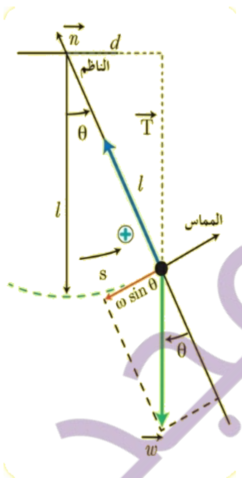
نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني : $\Gamma_{\vec{W}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} = I_\Delta.\bar{\alpha} \sum \Gamma_\Delta = I_\Delta.\bar{\alpha} \Longrightarrow$

نختار جهة موجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة :

$\Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0$ لإن حامل $\vec{T}$ يمر من محور الدوران

$$-mgl\sin\theta + 0 = ml^2.(\bar{\theta})``_t \Longrightarrow -g\sin\theta + 0 = l.(\bar{\theta})``_t$$

الحركة ليست جيبية $(\bar{\theta})"_t = -\frac{g}{l}sin\theta$



وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة : $\theta \leq 0.24\,rad$ تكون $\sin\theta \approx \theta$

(1)......... $(\bar{\theta})"_t = -\frac{g}{l}\bar{\theta}$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن نجد:

تابع السرعة الزاوية $\bar{\omega} = (\bar{\theta})`_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

تابع التسارع الزاوي $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})"_t = -\omega_0^2.\ \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

(2)...... $(\bar{\theta})"_t = -\omega_0^2\bar{\theta}$

بالمطابقة بين (1) و(2) نجد: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0 \Leftarrow \omega_0^2 = \frac{g}{l}$

و هذا محقق لأن g, l مقداران موجبان، فحركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية نبضها الخاص ω_0. ولإستنتاج علاقة الدور الخاص للاهتزاز:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ وبما أن $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Leftarrow$$

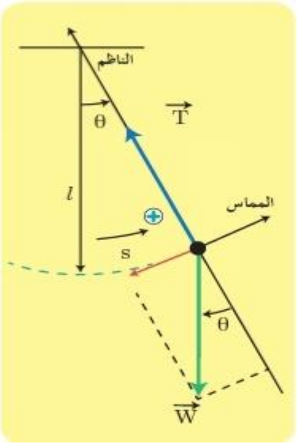
وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في السعات الزاوية الصغيرة. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

حيث (l) طول الخيط ، (g) تسارع الجاذبية

2- طريقة ثانية: القوى الخارجية المؤثرة في الكرة: $\vec{w} = m\,\vec{g}$ ثقل الكرة، $\vec{T}$ توتر الخيط.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن: $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\,\vec{a}$$



بالإسقاط على المماس الموجه بجهة إزاحة الكرة: $-m\,g\sin\theta + 0 = m\,a_t$

$$-\,g\sin\theta = a_t$$

لكن $\bar{a}_t = l.\bar{\alpha} = l.(\bar{\theta})''_t \Longrightarrow -\,g\sin\theta = l.(\bar{\theta})''_t$

وبالتالي: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\sin\theta$

وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة: $\theta \leq 0.24\,rad$ تكون $\sin\theta \approx \theta$

(1)......... $(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\bar{\theta}$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن نجد:

تابع السرعة الزاوية $\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

تابع التسارع الزاوي $\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\ \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

(2)...... $(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta}$

بالمطابقة بين (1) و(2) نجد: $\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Longleftarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$

و هذا محقق لأن g, l مقداران موجبان، فحركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية نبضها الخاص ω_0. ولاستنتاج علاقة الدور الخاص للاهتزاز:

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Longleftarrow$ وبما أن $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في السعات الزاوية الصغيرة. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

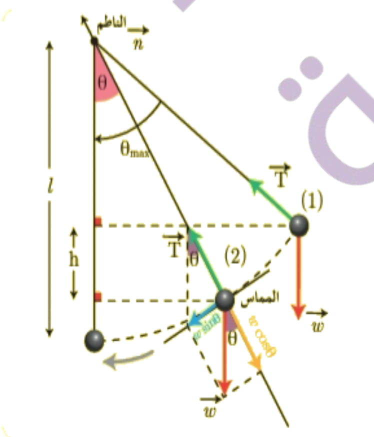
حيث (l) طول الخيط، (g) تسارع الجاذبية.

س 3- نواس ثقلي بسيط مؤلف من كرة صغيرة كتلتها (m) معلقة بخيط لايمتط طوله (ℓ) نزيح كرة النواس بحيث يصنع الخيط مع الشاقول زاوية $(\ \theta_{max}\ )$ و نتركها تهتز دون سرعة ابتدائية، المطلوب:

1- استنتج العلاقة المعبرة عن السرعة الخطية للكرة عندما يصنع الخيط مع الشاقول زاوية $(\theta_{max} > \theta)$

2- أثبت أن توتر الخيط عندما يصنع مع الشاقول زاوية $(\theta max > \theta)$ يعطى بالعلاقة:

$$[T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})]$$



الجواب: 1: لإيجاد العلاقة المحددة لسرعة الكرة في الوضع (2) القوى الخارجية المؤثرة:

ثقل الكرة $\vec{W}$، توتر الخيط $\vec{T}$.

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ_{max}.

الثاني: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ .

$$\overline{\Delta E_K} = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to 2)} \Longrightarrow E_{K2} - E_{K1} = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{T}}$$

$$\overline{W}_{\vec{W}} = m\,g\,h$$

$E_{K_1} = 0$ النواس ترك دون سرعة ابتدائية، $\overline{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = m\,g\,h + 0$$

وبملاحظة الشكل نجد: $h = l\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

نعوض: $\frac{1}{2}mv^2 = m\,g\,l(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

$$v^2 = 2\,g\,l\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$v = \sqrt{2\,g\,l\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

حالة خاصة: عند المرور الشاقول $\theta = 0$ وبالتالي $\cos\theta = 1$

تصبح العلاقة الشكل: $v = \sqrt{2\,g\,l\,(1 - \cos\theta_{max})}$

②- لإيجاد العلاقة المحددة لقوة توتر الخيط في الوضع (2) نطبق العلاقة الأساسية في التحريك: $\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته (محور الناظم): $-w\cos\theta + T = m.a_c$ ، وبما أن $a_c = \frac{v^2}{l}$

$$T = m\frac{v^2}{l} + m\,g\,\cos\theta \Rightarrow T = 2\,m\,g\,(\cos\theta - \cos\theta_{max}) + m\,g\,\cos\theta$$

$$T = m\,g\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

حالة خاصة: عند المرور الشاقول $\theta = 0$: $T = m\,g\,(3 - 2\cos\theta_{max})$

ملاحظة هامة جداً: ① - توتر الخيط يكون أعظمي عند المرور بوضع التوازن (وضع الشاقول عندما $\theta = 0$)

② -توتر الخيط يكون أصغري عند المطالين الأعظميين (عندما $\theta = \theta_{max}$)

ملاحظة :

$E = E_P + E_K$ الطاقة الميكانيكية في النواس الثقلي البسيط

حيث الطاقة الكامنة الثقالية: $E_p = m.g.h$ ، الطاقة الحركية الإنسحابية: $E_k = \frac{1}{2}m\,v^2$

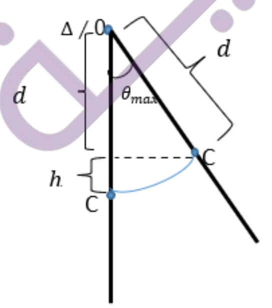
((ملاحظات لحل مسائل النواس الثقلي المركب))

-1 حساب الدور للسعات الصغيرة: $T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta(\text{جملة})}}{mgd}}$

أما في حال السعات الكبيرة حيث $(\theta_{max} > 0.24\,rad)$: $\acute{T}_O \approx T_O\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$

-2 حساب طول النواس البسيط المواقت لنواس مركب: $\underset{\text{مركب}}{T_0} = \underset{\text{بسيط}}{T_0} \leftarrow T_{O_{\text{مركب(عدديا)}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^`}{g}}$

-3 حساب السرعة الزاوية للنواس الثقلي المركب لحظة المرور بالشاقول (بوضع التوازن) بفرض انه ترك دون سرعة ابتدائية عندما كان يصنع مع الشاقول زاوية $(\theta = \theta_{max})$



الحل: نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين :

الأول : لحظة ترك النواس دون سرعة ابتدائية $(\theta = \theta_{max})$

الثاني: لحظة المرور بوضع الشاقول

$$(\theta = 0)$$

$$\overline{\Delta E_K} = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{K2} - E_{K1} = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$

ترك دون سرعة ابتدائية $E_{K1} = 0$

لايرافقه انتقال لنقطة تأثيره $\overline{W}_{\vec{R}} = 0$

$$\frac{1}{2}I_{\underset{\text{جملة}}{\Delta}}\,\omega^2 - 0 = mgh + 0$$

حيث $h = d(1 - \cos\theta_{max})$

$$\frac{1}{2} I_{\Delta\,\text{جملة}}\ \omega^2 = mgd(1-\cos\theta_{max})$$

$$\omega^2 = \frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_{\Delta(\text{جملة})}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_{\Delta(\text{جملة})}}}$$

ولحساب السعة الزاوية $\cos\theta_{max} = 1 - \frac{I_\Delta \omega^2}{2mgd}$

ولحساب السرعة الخطية:

1) لمركز العطالة: $v_c = \omega . d$

2) لكتلة نقطية: $v = \omega . r$

حيث (r) هو بعد الكتلة النقطية عن محور الدوران

وفي حال زاويتين $(\theta < \theta_{max})$ $\quad h = d(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

ملاحظة هامة جداً:

في حال السعات الزاوية الصغيرة $(\theta_{max} \le 0.24\ rad)$ تكون الحركة جيبية دورانية يمكن حساب السرعة الزاوية من التابع :

$\omega = -\omega_o \theta_{max} \sin(\omega_o t + \varphi)$ عند الشاقول تكون السرعة الزاوية عظمى طويلة: $(\omega_{max} = \omega_o \theta_{max})$

بعض الحالات لحساب $\left(I_{\Delta(\text{جملة})}, m_{\text{جملة}}, d\right)$

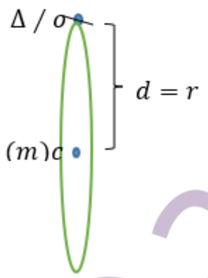
1. **ساق متجانسة كتلتها (m) أو (قرص متجانس)**

بحيث محور الدوران (o) لايمر من المنتصف:

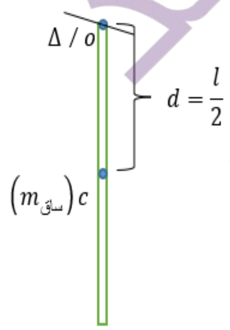
(هايغنز) $I_{\Delta/O} = I_{\Delta/C} + md^2$

(d) من نص السؤال مثلا" :

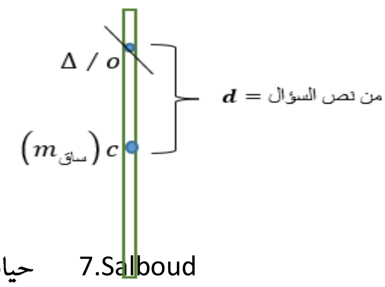
أ)) قرص متجانس نصف قطره (r) محور الدوران يمر بنقطة من محيطه $(d = r)$



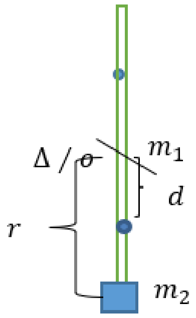
ب)) ساق متجانسة طولها (l) محور الدوران يمر من طرفها العلوي $\left(d = \frac{l}{2}\right)$



ج)) ساق متجانسة محور الدوران يمر من نقطة تبعد مسافة (تذكر بنص السؤال) عن مركز العطالة نأخذ هذه المسافة



2. ساق (او قرص) متجانسة كتلتها (m_1) محور الدوران (o) يمر من المنتصف وتحمل كتلة (m_2) على بعد (r) من محور الدوران



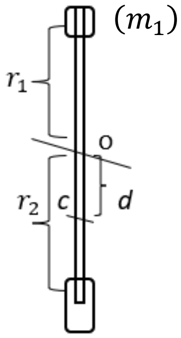
$$I_{\Delta/O} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta(\text{كتلة})}$$

حيث $I_{\Delta(\text{كتلة})} = m_2 r^2$

$$m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2$$

$$d = \frac{m_2 r}{m_2 + m_1}$$

3. ساق مهملة الكتلة وتحمل كتلتين (m_1, m_2) على بعد (r_1, r_2) من محور الدوران الواقع بين الكتلتين:



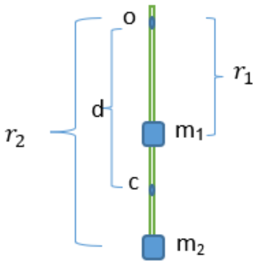
$$I_{\Delta/O} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\text{كتلتين}}$$

$I_{\Delta/\text{ساق}} = 0$ لإن الساق مهملة الكتلة

$$I_{\Delta/O} = 0 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2$$

$$d = \frac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 + m_2}$$



ملاحظة : إذا كان محور الدوران خارج الكتلتين :

$$d = \frac{m_2 r_2 + m_1 r_1}{m_1 + m_2}$$

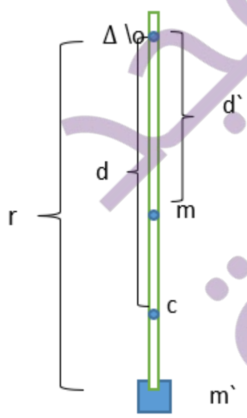
4- ساق متجانسة كتلتها m محور الدوران يبعد عن المنتصف مسافة $(\grave{d})$ وتحمل كتلة $(\grave{m})$ على بعد (r) من محور الدوران

$$I_{\Delta/O\ \text{للجملة}} = I_{\Delta/O\ \text{للساق}} + I_{\Delta/O\ \text{للكتلة}}$$

حيث وحسب هايغنز

$$I_{\Delta/O\ \text{للساق}} = I_{\Delta/C} + m\grave{d}^2$$

وعزم عطالة الكتلة $I_{\Delta/O\ \text{للكتلة}} = \grave{m}.r^2$



$$d = \frac{m.d` + m`.r}{m + m`}$$

ملاحظات :

لقرص $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} m r^2$

لساق $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} m l^2$

ملاحظة : لحساب d :

$d = \frac{m_1.\bar{r}_1 + m_2.\bar{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$ حيث r بعد الكتلة عن محور الدوران ويكون موجب عندما تكون الكتلة تحت محور الدوران وسالبة عندما تكون الكتلة فوق المحور.

ملاحظات لمسائل النواس الثقلي البسيط:

1 لحساب الدور:

سعات صغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

سعات كبيرة

$$\grave{T}_0 = T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$$

2 عندما يُطلب سرعة ويعطى θ_{max} كبيرة:

$$\Delta E_K = \Sigma w_{\vec{F}}$$

$$v^2 = 2gh$$

$$h = \ell[\cos\theta - \cos\theta_{max}]$$

في الشاقول:

$$h = \ell[1 - \cos\theta_{max}]$$

$$\Longrightarrow v^2 = 2g\ell[1 - \cos\theta_{max}]$$

$$v = \sqrt{2g\ell[1 - \cos\theta_{max}]}$$

3 إذا أعطيت السرعة عند المرور بالشاقول وطُلب θ_{max}

$$\Delta E_K = \Sigma w_{\vec{F}}$$

$$1 - \cos\theta_{max} = \frac{v^2}{2g\ell}$$

4 حساب قيمة توتر الخيط:

$$T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$$ (طبعاً بعد الاستنتاج)

في الشاقول:

$$\boldsymbol{T = mg + m\frac{v^2}{\ell}}$$

- **لا ننسى:** في حالة السعات الصغيرة

الحركة جيبية: $\boldsymbol{\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)}$

- السرعة الزاوية عند المرور بالشاقول: $\boldsymbol{\omega = \omega_0\theta_{max}}$

اختر الإجابة الصحيحة لكُل ممّا يأتي:

1- يتألف نواس ثقلي بسيط من كرة صغيرة نعدّها نقطة ماديّة كتلتها m، معلّقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط، دوره الخاص في حالة السعات الزاويّة الصغيرة T_0،نستبدل بالكرة كرة أخرى صغيرة نعدّها نقطة ماديّة كتلتها $m` = 4\,m$، فيصبح الدور الخاص الجديد $T_0$` مساوياً:

A	$4T_0$	b	T_0	c	$2T_0$	d	$(1/2)\,T_0$

2- يتألف نواس ثقلي بسيط دوره الخاص في حال السعات الصغيرة $(T_0 = 1s)$ فإن طوله (l) مقدراً بـ (m)يساوي:

A	$\frac{1}{4}$	b	1	c	$\frac{1}{2}$	d	2

3- نواس ثقلي بسيط دوره الخاص $(T_0 = 2s)$ في حال السعات الزاوية الصغيرة فإن دوره من أجل سعة زاوية $(0.4\,rad)$ يساوي:

A	1.01 s	b	2.02 s	c	3 s	d	4 s

4- نعلق كرة صغيرة نعدها نقطة مادية بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله ℓ، لنشكل بذلك نواساً ثقلياً بسيطاً دوره الخاص من أجل السعات الزاوية الصغيرة T_0، في مكان تسارع الجاذبية فيه g، وإذا أنقصنا من طول خيط النواس $0.5\ m$ أصبح دوره $\frac{T_0}{2}$ فيكون الطول الأصلي لخيط النواس مساوياً:

A	$\ell = \frac{2}{3} m$	b	$\ell = \frac{3}{2}\ m$	c	$\ell = 1\ m$	d	$\ell = 0.6\ m$

5- ميقاتيه ذات نواس ثقلي تدق الثانية فإن دورها الخاص T_0 يساوي:

A	$1\ s$	b	$2\ s$	c	$3\ s$	d	$4\ s$

6- مسطرة طولها L كتلتها M نجعلها شاقولية، ونعلّقها بمحور دوران أفقي مار من منتصفها، نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية، ونتركها دون سرعة ابتدائية فنلاحظ أنّ المسطرة:

a	تهتز بحركة اهتزازية دورانية	b	تهتز بحركة اهتزازية لا دورانية	c	تهتز بحركة جيبية	d	تبقى متوازنة

7- عندما يمرّ النواس الثقلي المركب في وضع التوازن الشاقولي فإنّ مجموع عزوم القوى الخارجية:

a	غير معدوم وتصبح الحركة متسارعة	b	ينعدم ويتوقف الجسم عن الحركة	c	غير معدوم وتصبح الحركة متباطئة	d	ينعدم ولا يتوقف الجسم عن الحركة

8- يتألف نواس ثقلي بسيط من كرة كتلتها m، ، معلّقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله ℓ دوره الخاص في حال السعات الزاوية الصغيرة T_0، ننقل النواس إلى منطقة ينقص فيها تسارع الجاذبية الأرضية فإنّ دوره الخاص الجديد T_0\`:

a	ينقص	b	يزداد	c	يبقى ثابت	d	ينعدم

9- يتألف نواس ثقلي بسيط من كرة كتلتها m، ، معلّقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله ℓ نبضه الخاص في حال السعات الزاوية الصغيرة ω_0 ولزيادة نبضه الخاص ينبغي:

a	إنقاص طول الخيط	b	زيادة طول الخيط	c	إنقاص كتلة الكرة	d	زيادة كتلة الكرة

10- ساق متجانسة كتلتها m نجعلها شاقولية ونعلّقها إلى محور دوران Δ ، أفقي ثابت فإن الشرط الذي يجب أن يحققه محور الدوران حتى تشكل الساق نواساً ثقلياً هو أن يكون:

a	ماراً من منتصف الساق	b	ماراً من الطرف العلوي للساق	c	ماراً من مركز ثقل الساق	d	موازيا للساق

11- يتناسب الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في حالة السعات الزاوية الصغيرة:

a	طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط	b	عكساً مع الجذر التربيعي لطول الخيط	c	طرداً مع طول الخيط	d	عكساً مع طول الخيط

12- ساعتان ذات نواس ثقلي متواقتتان على سطح الأرض، ننقل إحداهما إلى قمة جبل مرتفع فإنّها:

a	تقدم	b	تؤخّر	c	تبقى مضبوطة	d	تتوقّف

13- تعطى المعادلة التفاضلية للنواس ثقلي بسيط في أثناء الحركة في حالة السعات الزاوية الصغيرة بالعلاقة: $(\theta)''_t = -10\ (\theta)$ فيكون التسارع الزاوي لحركة هذا النواس لحظة المرور بموضع مطاله الزاوي $\bar{\theta} = -1rad$ مساوياً:

a	$\bar{\alpha} = 10rad.s^{-2}$	b	$\bar{\alpha} = \sqrt{\pi}rad.s^{-2}$	c	$\bar{\alpha} = -10rad.s^{-2}$	d	$\bar{\alpha} = -\sqrt{\pi}rad.s^{-2}$

حل المسائل الآتية: المسألة الأولى : يتألف نواس ثقلي من ساق شاقوليه(ab) مهملة الكتلة طولها (1m) تحمل في نهايتها العلوية **a** كتلة نقطية $m_1 = 0.4$ kg وتحمل في نهايتها السفلية **b** كتلة نقطية $m_2 = 0.6$ kg تهتز الجملة حول محور أفقي Δ يمر من الساق ويبتعد 20 cm عن النهاية **a**. **المطلوب:**

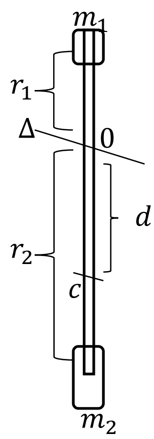
1- احسب دور النواس من أجل النوسات صغيرة السعة.

2- احسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس .

3- نزيح الجملة عن وضع توازنها الشاقولي زاوية قدرها (60^0) ونتركها دون سرعة ابتدائية استنتج العلاقة المحددة لسرعتها الزاوية لحظة مرورها بوضع التوازن ثم احسب قيمتها واحسب السرعة الخطية لمركز عطالة الجملة عندئذ.

-1

$\ell = 1\ m$
$r_1 = 0.2\ m$
$r_2 = 0.8\ m$
$m_1 = 0.4\ kg$
$m_2 = 0.6\ kg$



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/c}}{m\,g\,d}}$$

الساق مهملة الكتلة $I_{\Delta/\text{ساق}} = 0$

جملة $I_{\Delta/o} = I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$
$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$I_{\Delta/o} = 0.4 \times 0.04 + 0.6 \times 0.64$

جملة $I_{\Delta/o} = 0.4\ kg.m^2$

$$d = \frac{\sum m\,r}{\sum m} = \frac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{0.6 \times 0.8 - 0.4 \times 0.2}{1} = 0.4\ m$$

$m = m_1 + m_2 = 0.4 + 0.6 = 1kg$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{1 \times 10 \times 0.4}} = 2\ s$$

-2 مركب $T_0 = T_0$ بسيط

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2 \Rightarrow \ell = 1\ m$$

-3 نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: لحظة ترك النواس دون سرعة ابتدائية $(\theta = \theta_{max})$

الثاني: لحظة المرور بوضع الشاقول $(\theta = 0)$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}(1\to2)}$$

$E_{K2} - E_{K1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}}$

$E_{K1} = 0$ ترك دون سرعة ابتدائية

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$\frac{1}{2} I_{\Delta\,\text{جملة}}\ \omega^2 - 0 = mgh + 0$

حيث $h = d(1 - \cos\theta_{max})$

$\frac{1}{2} I_{\Delta\,\text{جملة}}\ \omega^2 = mgd(1 - \cos\theta_{max})$

$$\omega^2 = \frac{2mgd(1 - \cos\theta_{max})}{I_{\Delta(\text{جملة})}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1 - \cos\theta_{max})}{I_{\Delta(\text{جملة})}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\times1\times10\times0.4(1-0.5)}{0.4}}$$

$\omega = \sqrt{10} = \pi\ rad.s^{-1}$

$v_c = \omega\ d$
$= \pi \times 0.4\ \ m.s^{-1}$

المسألة الثانية: يتألف نواس ثقلي مركب من ساق متجانسة كتلتها $m_1 = 3\ \text{kg}$ وطولها $(l = 1m)$ نجعلها شاقولية ونعلقها من محور أفقي ثابت مار من منتصفها ونثبت في طرفها السفلي كتلة نقطية $m_2 = 1\ \text{kg}$. فإذا علمت أن $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} m_1 L^2$ **المطلوب:**

1- احسب الدور الخاص لهذا النواس من أجل النوسات صغيرة السعة.

2- احسب طول النواس الثقلي البسيط المواقف لهذا النواس.

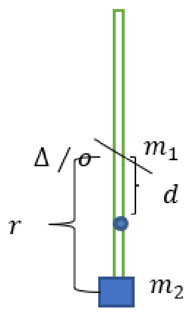
3- نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقولي بسعة زاوية θ_{max} ونتركها بدون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الزاوية للنواس لحظة المرور بالشاقول $\sqrt{10}\ rad.s^{-1}$ **المطلوب:**

1: احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m2 لحظة المرور بالشاقول.

2: استنتاج السعة الزاوية θ_{max} علما أن $\theta_{max} > 0.24\ rad$.

-1

$I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} m\ell^2$
$m_1 = 3\ \text{kg}$
$m_2 = 1\ \text{kg}$
$l = 1m$



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/o}}{m\,g\,d}}$$

$I_{\Delta/o} = I_{\Delta/o\ \text{ساق}} + I_{\Delta/o\ \text{كتلة}}$

$= \frac{1}{12} m_1 \ell^2 + \frac{1}{12} m_2 \ell^2$

$= \frac{1}{12} \times 3 \times 1 + 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} kg.m^2$

جملة $m = m_1 + m_2 = 4\ kg$

$$d = \frac{m_1 0 - m_2 r}{m_1 + m_2} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8} m$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{4 \times 10 \times \frac{1}{8}}} = 2\ s$$

-2 مركب $T_0 = T_0$ بسيط

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2 \Rightarrow \ell = 1\ m$$

-3 $v = \omega r = \sqrt{10} \times 2 = \frac{\pi}{2} m.s^{-1}$

-2 نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين :

الأول: لحظة ترك النواس دون سرعة ابتدائية $(\theta = \theta_{max})$

الثاني: لحظة المرور بوضع الشاقول $(\theta = 0)$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}(1\to2)}$$

$E_{K2} - E_{K1} = W_{\vec{W}} + W_{\vec{R}}$

$E_{K1} = 0$ ترك دون سرعة ابتدائية

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$\frac{1}{2} I_{\Delta\,\text{جملة}}\ \omega^2 - 0 = mgh + 0$

حيث $h = d(1 - \cos\theta_{max})$

$\frac{1}{2} I_{\Delta\,\text{جملة}}\ \omega^2 = mgd(1 - \cos\theta_{max})$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{I_\Delta \omega^2}{2mgd}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{0.5 \times 10}{2 \times 4 \times 10 \times \frac{1}{8}}$$

$, \ \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$

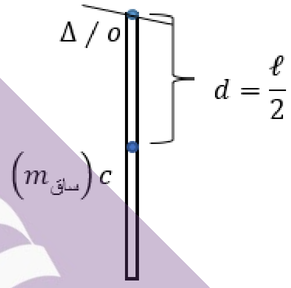
المسألة الثالثة: نواس ثقلي مؤلف من ساق شاقوليه متجانسة كتلتها $\left(m = \frac{1}{2}kg\right)$ طولها $\left(\ell = \frac{3}{2}m\right)$ عزم عطالتها حول محور مار من منتصفها يعطى بالعلاقة : $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}m.\ell^2$ ، نزيح الساق عن وضع التوازن بسعة زاوية صغيرة (θ_{max}) ونتركها تهتز دون سرعة إبتدائية .

المطلوب: استنتاج علاقة الدور في حال السعات الصغيرة بدءاً من العلاقة العامة للدور وحساب قيمتها في الحالات التالية:

1- الساق تهتز حول محور دوران أفقي يمر من طرفها العلوي.

2- الساق تهتز حول محور دوران أفقي يمر من طرفها العلوي وتحمل كتلة إضافية $(m` = m)$ معلقة على بعد $(r = 1m)$ من محور الدوران. $(\pi^2 = 10\,,\ g = 10\,m.s^{-2})$

3- الساق تهتز حول محور دوران أفقي يمر من منتصفها وتحمل كتلة إضافية $(m` = m)$ معلقة بطرفها السفلي.



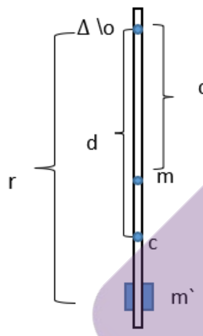
$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/o}}{m\,g\,d}}$$

$$I_{\Delta/o} = {}_{\text{ساق}}I_{\Delta/c} + md^2$$

$$= \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{3}}{m\,g\,\frac{\ell}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3\,g}}$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{2(\frac{3}{2})}{3\times 10}} = 2\,s$$



$$I_{\Delta/o} = {}_{\text{ساق}}I_{\Delta/c} + md`^2$$

$$= \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}}{3} = \frac{3}{8}kg.m^2$$

$$\text{كتلة}\ I_{\Delta/o} = m`r^2 = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}kg.m^2$$

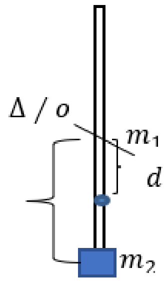
$$\text{جملة}\ I_{\Delta/o} = {}_{\text{ساق}}I_{\Delta/c} + \text{كتلة}\ I_{\Delta/o}$$

$$I_{\Delta/o} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}\ kg.m^2$$

$$\text{جملة}\ m = m + m` = 1\,kg$$

$$d = \frac{md` + m`r}{m + m`} = \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times 1}{1} = \frac{7}{8}m$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1\times 10\times\frac{7}{8}}} = 2\,s$$



$$\text{جملة}\ I_{\Delta/o} = {}_{\text{ساق}}I_{\Delta/c} + \text{كتلة}\ I_{\Delta/o}$$

$$= \frac{1}{12}m\ell^2 + m`\frac{\ell^2}{4} = \frac{3}{32} + \frac{9}{32}$$

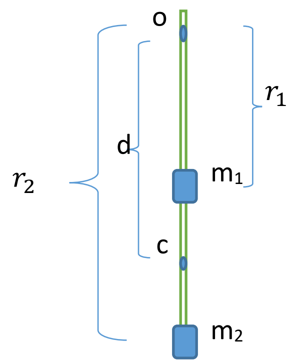
$$= \frac{12}{32} = \frac{3}{8}\ kg.m^2$$

$$d = \frac{m`r}{m + m`} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{8}$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{8}}{1\times 10\times\frac{3}{8}}} = 2\,s$$

المسألة الرابعة: ساق شاقوليه مهملة الكتلة طولها L نثبت في منتصفها كتلة نقطية $m_1 = 2\,m$ ونثبت في طرفها السفلي كتلة نقطية $m_2 = m$ نجعل من الجملة نواس ثقلي مركب يهتز في مستوي شاقولي حول محور أفقي مار من الطرف العلوي للساق. المطلوب:

ابتداء من العلاقة الأساسية للدور استنتج بالرموز العلاقة المحددة لقيمة T_0 الدور الخاص لاهتزاز النواس من أجل النوسات الصغيرة السعة الزاوية وإذا كان هذا الدور $2s$ احسب (L) طول الساق.



$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/o}}{m\,g\,d}}$$

$$I_{\Delta/o} = {}_{\text{ساق}}I_{\Delta/c} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$= 0 + m_1r_1^2 + m_2r_2^2$$

$$= 2m\times\frac{\ell^2}{4} + m\ell^2$$

$$= m\times\frac{\ell^2}{2} + m\ell^2 = \frac{3m\ell^2}{2}$$

$$d = \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1 + m_2}$$

$$d = \frac{2m\times\frac{\ell}{2} + m\ell}{3m} = \frac{2\ell}{3}$$

$$\text{جملة}\ m = m_1 + m_2 = 3m$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3m\ell^2}{2}}{3m\,g\,\frac{2\ell}{3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\ell}{4g}}$$

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{3\ell}{4\times 10}} \Longrightarrow 4 = 2\ell$$

$$\ell = \frac{4}{3}\ m$$

المسألة الخامسة : يتألف نواس ثقلي بسيط من كرة صغيرة نعدّها نقطة ماديّة كتلتها $m = 100\ \mathrm{g}$، معلقة بخيط خفيف لا يمتط طوله $L = 1\ \mathrm{m}$ **والمطلوب:**

1. احسب الدور الخاص لهذا النواس عندما يهتز بسعة زاويّة $\theta = 0.4\ \mathrm{rad}$.
2. نزيح النواس عن وضع التوازن بزاوية $\theta_{max} > 0.24\ \mathrm{rad}$ ويترك دون سرعة ابتدائيّة، فتكون السرعة الخطيّة لكرة النواس لحظة مرورها بالشاقول $v = \pi\ \mathrm{m.}s^{-1}$، احسب قيمة θ_{max}.
3. استنتج بالرموز علاقة توتر خيط النواس لحظة مروره بالشاقول، ثم احسب قيمتها.

-1

$$m = 0.1\ kg\ \ ,\ell = 1\ m$$

$$\acute{T}_O = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2\ s$$

$$\acute{T}_O \approx T_O\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{10}{9\times 16}\right) = 2.14\ s$$

2- نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ_{max}

الثاني: عند المرور بالشاقول الزاوية $\theta = 0$

$$\overline{\Delta E_K} = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{K2} - E_{K1} = \overline{W}_{\overrightarrow{W}} + \overline{W}_{\vec{T}}$$

$$\overline{W}_{\overrightarrow{W}} = m\ g\ h$$

$E_{K_1} = 0$ النواس ترك دون سرعة ابتدائية

$\overline{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = m\ g\ h + 0$$

وبملاحظة الشكل نجد:

$$h = l\ - l\ cos\theta_{max}$$

$$h = l\ (1 -\ cos\theta_{max})$$

نعوض:

$$\frac{1}{2}mv^2 = m\ g\ l(1 - cos\theta_{max})$$

$$v^2 = 2\ g\ l\ (1 - cos\theta_{max})$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{v^2}{2gl}$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{10}{2\times 10\times 1}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$$

3- جملة مقارنة: خارجية

جملة مدروسة: الكرة

القوى الخارجية المؤثرة : $\overrightarrow{W}$ ثقل الكرة

$\vec{T}$ توتر الخيط

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الإنسحابي:

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\overrightarrow{W} + \vec{T} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته (محور الناظم)

$$-w + T = m.a_c$$

وبما أن $a_c = \frac{v^2}{l}$

$$T = m\frac{v^2}{l} + m\ g$$

$$T = 0.1\times\frac{10}{1} + 0.1\times 10$$

$$(T = 2\ N)$$

المسألة السادسة: نعلّق كرة صغيرة نعدها نقطة ماديّة كتلتها m بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $\ell = 1.6\ \mathrm{m}$ لتؤلف نواساً ثقلياً بسيطاً، ثم نزيح الكرة عن الشاقول $\theta_{max} = 60^0$ ونتركها دون سرعة ابتدائيّة، المطلوب:

1- احسب دور حركة النواس من أجل السعات الزاوية الصغيرة.

2- استنتج بالرموز سرعة الكرة عند المرور بالشاقول ثم احسب قيمتها.

3- إذا علمت أن قوة توتر الخيط عند المرور بالشاقول تساوي $10\ \mathrm{N}$ استنتج قيمة كتلة الكرة. علماً أن: $(\mathrm{g} = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}\ , 4\pi = 12.5)$

-1

$$T_O = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1.6}{10}} = 2.5\ S$$

2- نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول:

حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ_{max}

الثاني: عند المرور بالشاقول الزاوية $\theta = 0$

$$\overline{\Delta E_K} = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{K2} - E_{K1} = \overline{W}_{\overrightarrow{W}} + \overline{W}_{\vec{T}}$$

$$\overline{W}_{\overrightarrow{W}} = m\ g\ h$$

$E_{K_1} = 0$ النواس ترك دون سرعة ابتدائية

$\overline{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = m\ g\ h + 0$$

وبملاحظة الشكل نجد:

$$h = l\ - l\ cos\theta_{max}$$

$$h = l\ (1 -\ cos\theta_{max})$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = m\ g\ l(1 - cos\theta_{max})$$

$$v^2 = 2\ g\ l\ (1 - cos\theta_{max})$$

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_{max})}$$

$$v = \sqrt{2\times 10\times 1.6\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 4\ m.s^{-1}$$

3- جملة مقارنة :خارجية

جملة مدروسة : الكرة

القوى الخارجية المؤثرة : $\overrightarrow{W}$ ثقل الكرة

$\vec{T}$ توتر الخيط

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الإنسحابي:

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وبجهته (محور الناظم)

$$-w + T = m.a_c$$

وبما أن $a_c = \frac{v^2}{l}$ أي

$$T = m\frac{v^2}{l} + m\ g$$

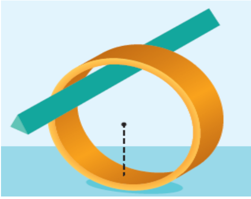
$$T = m\left(\frac{v^2}{l} + g\right)$$

$$m = \frac{T}{\frac{v^2}{l} + g}$$

$$m = \frac{10}{\frac{16}{1.6} + 10} = 0.5kg$$

حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى:



نعلق حلقة معدنية نصف قطرها $12.5\ cm$ كتلتها M بمحور أفقي ثابت كما هو موضح بالشكل المجاور إذا علمت أن عزم عطالة الحلقة حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها $I_{\Delta/C} = MR^2$. **والمطلوب:**

1- حساب قيمة الدور الخاص لاهتزاز هذا النواس من أجل السعات الزاوية الصغيرة.

2- نثبت على محيط الحلقة بنقطة مقابلة لمحور الدوران كتلة نقطية $M`$ تساوي كتلة الحلقة والمطلوب حساب قيمة الدور في حال السعات الزاوية الصغيرة.

المسألة الثانية:

يتألف نواس ثقلي من ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها L تحمل في كل من طرفيها كتلة نقطية $\grave{m}$ نعلق الجملة بمحور دوران أفقي يبعد $\frac{L}{4}$ عن طرف الساق العلوي نزيح الجملة عن وضع توازنها الشاقولي $\pi 2/1$ ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ فتهتز بدور خاص $T = 2.5(s)$ **والمطلوب:**

1- التابع الزمني للمطال الزاوي لحركة هذا النواس انطلاقاً من شكله العام.

2- احسب قيمة السرعة الزاوية العظمى للحركة الطويلة.

3- استنتج بالرموز العلاقة المحدد لطول الساق ثم احسب قيمته.

4- لنفرض أنه في إحدى النوسات انفصلت الكتلة السفلية عن الساق. استنتج الدور الخاص الجديد للجملة.

المسألة الثالثة:

يتألف نواس ثقلي مركب من قرص متجانس كتلته m نصف قطره $r = \frac{1}{6}m$ مثبت في نقطة من محيطه كتلة نقطية $\grave{m} = m$ تهتز الجملة في مستو أفقي شاقولي حول محور أفقي عمودي على مستوي القرص ومار من مركزه وباعتبار أن: $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2}m.r^2$ ، $g = 10m.s^{-2}$ $\pi^2 = 10$ **والمطلوب:**

1- استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس في حال السعات الزاوية الصغيرة بدلالة نصف قطره ثم احسب قيمتها.

2- احسب طول خيط النواس الثقلي البسيط المواقت لهذا النواس المركب.

3- نزيح القرص عن وضع توازنه الشاقولي بزاوية $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad$ ونتركه دون سرعة ابتدائية استنتج علاقة السرعة الزاوية لمركز عطالة القرص لحظة المرور بالشاقول ثم احسب قيمتها.

المسألة الرابعة:

يتألف نواس ثقلي مركب من ساق شاقولية متجانسة كتلتها M طولها $L = \frac{3}{8}m$ يمكنها أن تنوس حول محور أفقي مار من نقطة تبعد عن مركز الساق $\frac{L}{6}$ فإذا علمت أن عزم عطالة ساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12}M.L^2$ **والمطلوب:**

1- استنتج علاقة الدور الخاص لهذا النواس في حال السعات الزاوية الصغيرة ثم احسب قيمتها.

2- نزيح الساق عن الشاقول زاوية θ_{max} ونتركها دون سرعة ابتدائية فتكون قيمة السرعة الزاوية لمركز عطالة الجملة عند المرور بالشاقول مساوية $\omega = 2\pi\ rad.s^{-1}$ احسب قيمة θ_{max} بفرض أن $\theta_{max} > 0.24rad$

المسألة الخامسة: دورة 2023

ميكانيك السوائل المتحركة

جسيم السائل : هو جزء من السائل أبعاده صغيرة جدا" بالنسبة لأبعاد السائل وكبيرة بالنسبة لأبعاد جزيئات السائل

تعاريف أساسية :

1- الجريان المستقر: هو الجريان الذي تكون فيه سرعة جسيمات السائل ثابته مع مرور الزمن في النقطة نفسها من خط الانسياب، فإذا تغيرت السرعة من نقطة إلى أخرى بمرور الزمن كان الجريان المستقر غير منتظم، أما إذا كانت السرعة ثابتة في جميع نقاط المانع بمرور الزمن فإن الجريان المستقر يكون منتظماً.

2- خط الانسياب (خط الجريان): خط وهمي يبين المسار الذي يسلكه جسيم السائل أثناء جريانه ويمس في كل نقطة من نقاطه شعاع السرعة في تلك النقطة.

3- أنبوب التدفق: إذا أخذنا مساحة صغيرة عمودية على اتجاه جريان سائل جريانه مستقر، ورسمنا على محيط هذه المساحة خطوط الانسياب نحصل على أنبوب وهمي يحتوي السائل يدعى أنبوب التدفق.

4- ميزات السائل المثالي:

عدد مع الشرح ميزات السائل المثالي:

a) غير قابل للانضغاط: كتلته الحجمية ثابتة مع مرور الزمن.

b) عديم اللزوجة: قوى الاحتكاك الداخلي بين مكوناته مهملة عندما تتحرك بالنسبة لبعضها البعض، وبالتالي لا يوجد ضياع للطاقة.

c) جريانه مستقر: أي أن حركة جسيماته لها خطوط انسياب محددة وسرعة جسيماته عند نقطة معينة تكون ثابتة بمرور الزمن.

d) جريانه غير دوراني: لا تتحرك جسيمات السائل حركة دورانية حول أي نقطة في مجرى الجريان.

معادلة الاستمرارية:

① اكتب العلاقة الرياضية المعبرة عن كلٍ من معدل التدفق الكتلي (Q) ومعدل التدفق الحجمي $(Q`)$ مع دلالات الرموز وواحداتها وعرف كلٍ منهما.

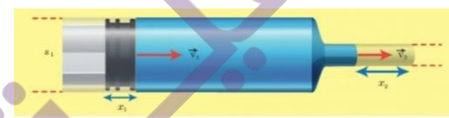
معدل التدفق الكتلي $Q = \frac{m}{\Delta t}\ (kg.s^{-1})$

m كتلة كمية السائل الذي يعبر المقطع S خلال زمن Δt

معدل التدفق الحجمي: $\dot{Q} = \frac{V}{\Delta t}\ (m^3.s^{-1})$

V حجم كمية السائل الذي يعبر المقطع S خلال زمن Δt

② - يتحرك سائل داخل أنبوب بين مقطعين مختلفين مساحة $(s_1 \neq s_2)$ ، بحيث السائل يملأ الأنبوب ولايتجمع فيه **والمطلوب :**
انطلاقا" من العلاقة $Q`_1 = Q`_2$ استنتج معادلة الإستمرارية ، ثم بيّن كيف تتغير سرعة تدفق السائل مع مساحة مقطع أنبوب التدفق وعرف أنبوب التدفق (أنبوب الجريان) .



بفرض أن v_1 سرعة السائل عبر المقطع s1 ، و v_2 سرعة السائل عبر المقطع s2 إن حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s1 لمسافة x_1 في الزمن Δt يكون: $V_1 = s_1 x_1$

$x_1 = v_1 \Delta t$ لكن: $V_1 = s_1 v_1 \Delta t$

و حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s2 لمسافة x_2 في الزمن Δt يكون: $V_2 = s_2 x_2$

$x_2 = v_2 \Delta t$ لكن: $V_2 = s_2 v_2 \Delta t$

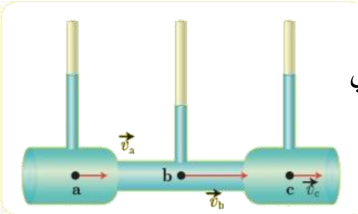
وبما أن حجم كمية السائل التي عبرت المقطع s1 تساوي حجم كمية السائل التي عبرت المقطع s2 في المدة الزمنية نفسها فإن:

$$Q_1' = Q_2' \rightarrow \frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{s_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{s_2 v_2 \Delta t}{\Delta t}$$

إذن: $s_1 v_1 = s_2 v_2$ أي أن سرعة تدفق السائل تتناسب عكساً مع مساحة مقطع الأنبوب الذي يتدفق منه السائل.

و عموماً يمكننا أن نكتب: $Q' = s_1 v_1 = s_2 v_2 = const$

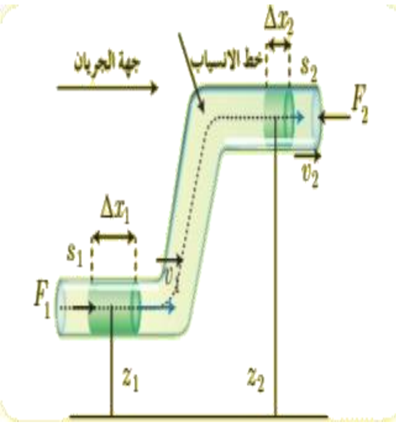
اكتب نص نظرية برنولي في الجريان المستقر ثم اكتب العلاقة الرياضية المعبرة عن معادلة برنولي .



نظرية برنولي في الجريان المستقر:

((إن مجموع الضغط و الطاقة الحركية لواحدة الحجوم، و الطاقة الكامنة الثقالية لواحدة الحجوم تساوي مقداراً ثابتاً عند أي نقطة من نقاط خط الانسياب لسائل جريانه مستقر)) .

نلاحظ عندما تنقص مساحة مقطع الإنبوب تزداد سرعة جريان السائل أي تزداد طاقته الحركية ولكن ينقص الضغط



الاستنتاج الرياضي لمعادلة برنولي:

عندما تمر كمية صغيرة من السائل بين مقطعين حيث مساحة المقطع الأول s1، والضغط عنده p_1، وسرعة الجريان فيه v_1، و الارتفاع عن مستو مرجعي z_1 ومساحة المقطع الثاني s2، والضغط عنده p_2، وسرعة الجريان فيه v_2، والارتفاع عن المستوي المرجعي z_2.

استنتج عبارة العمل الكلي لتحريك كتلة السائل من المقطع الأول إلى المقطع الثاني

إن العمل الكلي المبذول لتحريك كتلة السائل من المقطع الأول إلى المقطع الثاني يساوي مجموع عمل قوة الثقل، وعمل قوة ضغط السائل.

حيث :عمل قوة الثقل

$$W_{\vec{w}} = -mg(z_2 - z_1)$$

وعمل قوة ضغط السائل

يتأثر سطح المقطع s1 بقوة F1 لها جهة الجريان، و تنتقل نقطة تأثيرها مسافة قدرها Δx_1 في مدة زمنية Δt فتقوم بعمل محرك (موجب)

$$W_1 = F_1 \Delta x_1$$

لكن: $F_1 = P_1 s_1 \Rightarrow W_1 = P_1 s_1 \Delta x_1$

لكن: $s_1 \Delta x_1 = \Delta V \Rightarrow W_1 = P_1 \Delta V$

حيث ΔV حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s1 في المدة الزمنية Δt. يتأثر سطح المقطع s2 بقوة F2 معيقة لجريان السائل، لها جهة تعاكس جهة الجريان، وتنتقل نقطة تأثيرها مسافة قدرها Δx_2 في المدة الزمنية Δt فتقوم بعمل مقاوم (سالب).

$$W_2 = -F_2 \Delta x_2$$

لكن: $F_2 = P_2 s_2 \Rightarrow W_2 = -P_2 s_2 \Delta x_2$

لكن: $s_2 \Delta x_2 = \Delta V$

حيث ΔV حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s2 في المدة الزمنية Δt نفسها ، وهي تساوي حجم كمية السائل التي نعبر المقطع s1 في المدة الزمنية Δt ، وذلك لأن السائل غير قابل للانضغاط.

$$W_2 = -P_2 \Delta V$$

ويصبح العمل الكلي: $W_T = W_w + W_1 + W_2$

$$W_T = -mg(z_2 - z_1) + P_1 \Delta V - P_2 \Delta V$$

انطلاقاً من عبارة العمل الكلي استنتج العلاقة الرياضية المعبرة عن برنولي:

وبحسب مصونة الطاقة فإن: $W_T = E_{K_2} - E_{K_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

$$-mg(z_2 - z_1) + P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

لكن: $m = \rho \, \Delta V$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, z_2$$

$$P + \frac{1}{2}\rho\, v^2 + \rho\, g\, z = const$$

وهي معادلة برنولي التي تعبر عن نظرية برنولي، وهي أحد أشكال حفظ الطاقة.

تطبيقات على معادلة برنولي:

ملاحظة : في حال أنبوب أفقي: $(z_1 = z_2)$ تصبح معادلة برنولي : $P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$

وبالتالي : $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$

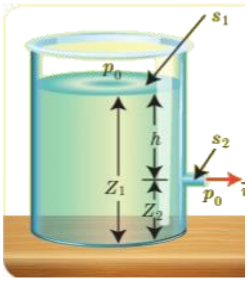
1- سكون السوائل، ومعادلة المانومتر:

انطلاقاً من معادلة برنولي استنتج علاقة فرق الضغط في حالة أنبوب أفقي يحوي سائل ساكن:

يمكن أن نحصل على معادلة المانومتر من معادلة برنولي بفرض أن السائل ساكن في الأنبوب أي أن: $v_1 = v_2 = 0$ نعوض في معادلة برنولي فنجد: $P_1 - P_2 = \rho\, g\, z_2 - \rho\, g\, z_1 = \rho\, g(z_2 - z_1) = \rho\, g\, h$

وهذه معادلة المانومتر (قانون الضغط في السوائل الساكنة).

2 - نظرية تورشيللي:



يحتوي خزان على سائل كتلته الحجمية ρ، مساحة سطح مقطعه s1 كبيرة بالنسبة إلى فتحة جانبيه مساحة مقطعها s2صغيرة تقع قرب قعره و على عمق $z_1 - z_2$ من السطح الحر للسائل. استنتج السرعة التي يخرج بها السائل من الفتحة الجانبية؟

نطبق معادلة برنولي على جزء صغير من السائل انتقل من سطح الخزان بسرعة $v_1 \simeq 0$ ليخرج من الفتحة s2إلى الوسط الخارجي بسرعة v_2:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, z_2$$

إن السطح المفتوح، والفتحة معرضتان للضغط الجوي النظامي، ولذلك $P_1 = P_2 = P_0$

$$\frac{1}{2}v_1^2 + g\, z_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + g\, z_2$$

وبما أن السرعة v_1 مهملة بالنسبة للسرعة v_2 نأخذ $v_1 \simeq 0$

$$g\, z_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + g\, z_2 \Rightarrow \frac{1}{2}v_2^2 = g\, z_1 - g\, z_2$$

$$v_2^2 = 2g(z_1 - z_2) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2\, g\, h}$$

إن سرعة خروج السائل تساوي السرعة التي يسقط بها جسم مائع سقوطاً حراً من ارتفاع h.

تدعى العلاقة السابقة بنظرية تورشيللي، وتنطبق على أي فتحة في الوعاء، سواء في قعره كانت أم في جداره الجانبي.

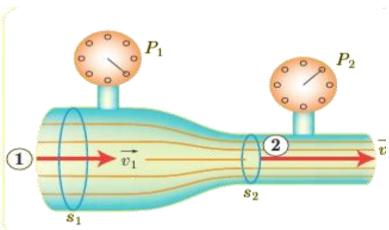
3-أنبوب فنتوري:

يتألف أنبوب فنتوري من أنبوب مساحة مقطعه S_1 يجري في سائل بسرعة v_1 في منطقة ضغطها P_1 فيصل لاختناق مساحته S_2، والمطلوب استنتج علاقة فرق الضغط بين الجذع الرئيسي و الاختناق وذلك بفرض أن الأنبوب أفقي وفسر أن الضغط في الإختناق أقلُ من الضغط في الجذع الرئيسي للأنبوب .

نطبق معادلة برنولي بين النقطتين 1 و 2 اللتين تقعان في المستوى الأفقي نفسه.

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

ولكن: $s_1 v_1 = s_2 v_2$



$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]v_1^2$$

ويقاس فرق الضغط بين نقطتين باستخدام جهاز قياس الضغط.

لدينا $S_1 > S_2$ ، إذاً $P_1 > P_2$ أي أن الضغط في الاختناق أقل من الضغط في الجذع الرئيسي للأنبوب.

يستفاد من هذه الخاصية في الطب، فقد تتناقص مساحة مقطع الشرايين في منطقة ما نتيجة تراكم الدهون و الشحوم، وهذا يعيق جريان الدم في الشرايين، ويتناقص ضغط الدم في المقاطع المتضيقة عن قيمته الطبيعية اللازمة لمقاومة الضغوط الخارجية

تذكرة ببعض قوانين ميكانيك السوائل:

معدل التدفق الكتلي $Q = \frac{m}{\Delta t}$ حيث (m) كتلة كمية السائل

$Q = \rho . Q`$

معدل التدفق الحجمي (معدل الضخ) :

$Q` = S.v$ حيث (v) سرعة جريان السائل

$Q` = \frac{V}{\Delta t}$ حيث (V) حجم كمية السائل

بشكل عام : $Q' = s_1 v_1 = s_2 v_2 = const$

في حال رشاش استحمام :

$Q` = S.v = N.S`.v`$ حيث

مساحة مقطع الأنبوب (S) ،

سرعة جريان السائل في الأنبوب (v)

عدد الثقوب (N) ، سرعة جريان السائل في الثقب $(v`)$ ،

مساحة مقطع الثقب $(S`)$

لحساب العمل الميكانيكي اللازم لضخ حجم من السائل

من مقطع S_1 إلى مقطع S_2 :

$$W_T = -mg(z_2 - z_1) + P_1\Delta V - P_2\Delta V$$

$$W_T = -mg(z_2 - z_1) + (P_1 - P_2)\Delta V$$

أو من العلاقة: $W_T = E_{K_2} - E_{K_1}$

$W_T = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$ حيث: $(m = \rho \times V)$

الكتلة الحجمية لسائل تعطى بالعلاقة : $\rho = \frac{m}{V}$

معادلة برنولي :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, z_2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho.g.h$$

1 في حال أنبوب أفقي : $(z_1 = z_2)$ و $(s_1 \neq s_2)$

فإن فرق الضغط يساوي:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

2 في حال السائل ساكن (معادلة المانومتر) وبحيث $(z_1 \neq z_2)$ فإن فرق الضغط يساوي ؛

$$P_1 - P_2 = \rho.g.h$$

3 حسب تورشللي لحساب سرعة خروج السائل من فتحة جانبيّة صغيرة مساحة مقطعها S_2 تقع قرب قعره وعلى عمق h من السطح الحر للسائل: $v = \sqrt{2gh}$

4 معادلة فنتوري:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]v_1^2$$

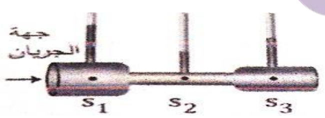
اختر الإجابة الصحيحة لكُل ممّا يأتي:

1- خرطوم مساحة مقطعه عند فوهة دخول الماء فيه S_1 وسرعة جريان الماء عند تلك الفوهة v_1، فتكون سرعة خروج الماء v_2 من نهاية الخرطوم، حيث مساحة المقطع $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ مساوية:

A	$v_2 = v_1$	b	$v_2 = \frac{1}{2}v_1$	c	$v_2 = 4v_1$	d	$v_2 = 2v_1$

2- في الشكل المجاور سائل جريانه مستقر عبر أنبوب أفقي ذي مقاطع مختلفة $(s_1 > s_3 > s_2)$،

① فإنّ سرعة الجريان عبر المقاطع السابقة تحقق العلاقة:



a	$v_1 > v_2 > v_3$	b	$v_1 > v_3 > v_2$	c	$v_2 > v_1 > v_3$	d	$v_2 > v_3 > v_1$

② وإن الضغوط في المقاطع السابقة تحقق العلاقة :

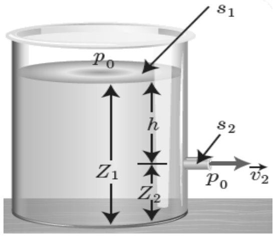
a	$P_1 > P_2 > P_3$	b	$P_1 > P_3 > P_2$	c	$P_2 > P_1 > P_3$	d	$P_3 > P_2 > P_1$

3- يتصف السائل المثالي بأنه :

a	قابل للانضغاط وعديم اللزوجة	b	غير قابل للانضغاط ولزوجته غير مهملة	c	غير قابل للانضغاط وعديم اللزوجة	d	قابل للانضغاط ولزوجته غير مهملة

-4 يرتبط معدل التدفق الحجمي لسائل كتلته الحجمية ρ مع معدل التدفق الكتلي بالعلاقة :

A	$Q` = \rho Q$	b	$Q = \rho Q`$	c	$Q` = mQ$	d	$Q = mQ`$



-5 يمثل الشكل جانباً خزان مساحة مقطعه العلوي S_1، معرض للهواء الجوي يحوي سائل وفي أسفل الخزان فتحة مساحة مقطعها S_2، معرضة للهواء الجوي تقع على عمق $h = 1.8\ m$.
باعتبار أن $g = 10\ m.s^{-2}$ فإن:

- سرعة خروج الماء من الفتحة v_2 تساوي:

A	$v_2 = 9\sqrt{2}\ m.s^{-1}$	b	$v_2 = 6\ m.s^{-1}$	c	$v_2 = 30\ m.s^{-1}$	d	$v_2 = 3\ m.s^{-1}$

-6 عندما توجه فوهة الخرطوم للأسفل فإن مقطع عمود الماء المتدفق من الخرطوم :

a	تزداد سرعته ويزداد سطح مقطعه	b	تتناقص سرعته ويزداد سطح مقطعه	c	تتناقص سرعته ويتناقص سطح مقطعه	d	تزداد سرعته ويتناقص سطح مقطعه

حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى: تقوم مضخة برفع الماء من خزان أرضي عبر أنبوب مساحة مقطعه $s_1 = 10\text{cm}^2$ إلى خزان يقع على سطح بناء، فإذا علمت أنّ مساحة مقطع الأنبوب الذي يصب في الخزان العلوي $s_2 = 5\ \text{cm}^2$، وأنّ التدفق الحجمي للماء $Q` = 0.005\text{m}^3.\text{s}^{-1}$ والارتفاع بين الفتحتين $h = 10\text{m}$. **المطلوب حساب:**

1) سرعة الماء v_1 عند دخوله من الفتحة S_1، وسرعته v_2 عند خروجه من الفتحة S_2.
2) قيمة ضغط الماء عند دخوله فتحة الأنبوب S_1، إذا علمت أنّ قيمة الضغط عند الفتحة s_2 تساوي $P_2 = 1 \times 10^5\text{Pa}$.
3) احسب العمل الميكانيكي اللازم لضخ $(10\ L)$ من الماء إلى الخزان العلوي. $(\rho_{H_2O} = 1000\ \text{kg.m}^{-3}, g = 10\ \text{m.s}^{-2})$

الحل:

<table>
<tr>
<td>

$s_1 = 10 \times 10^{-4}\text{m}^2, s_2 = 5 \times 10^{-4}\text{m}^2$
$Q` = 0.005\text{m}^3.\text{s}^{-1}\ \ , h = 10\ m$

-1

$$Q' = s_1 v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{5 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-4}} = 5\ m.s^{-1}$$

$$Q' = s_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{5 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-4}} = 10\ m.s^{-1}$$

-2 $P_2 = 1 \times 10^5\text{Pa}$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, z_2$$

</td>
<td>

$$P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho.g.h + P_2$$
$$= \frac{1}{2} \times 10^3(100 - 25) + 10^3 \times 10 \times 10 + 10^5$$
$$= 237500\ Pa$$

-3 $V = 10^{-2}\ \text{m}^3$

$$W_T = -m.g.h + (P_1 - P_2)\Delta V$$
$$\rho = \frac{m}{V}$$
$$W_T = -\rho.V.g.h + (P_1 - P_2)\Delta V$$
$$= -10^3 \times 10^{-2} \times 10 \times 10 + (237500 - 10^5)10^{-2}$$
$$= -1000 + 1375 = 375\ J$$

</td>
</tr>
</table>

المسألة الثانية: لملء خزان حجمه $12\ \text{m}^3$ بالماء بواسطة أنبوب مساحة مقطعه $50\ \text{cm}^2$ يلزمنا زمن قدره $240s$. **المطلوب حساب:**

1. معدل التدفق الحجمي.
2. سرعة تدفق الماء من فتحة الأنبوب.
3. سرعة تدفق الماء من فتحة الأنبوب إذا نقص مقطعه ليصبح ربع ما كان عليه.

<table>
<tr>
<td>

$V = 12\ \text{m}^3, s = 50 \times 10^{-4}\text{m}^2$
$\Delta t = 240\ s$

-1

$$Q' = \frac{V}{\Delta t} = \frac{12}{240} = 5 \times 10^{-2}\text{m}^3.\text{s}^{-1}$$

</td>
<td>

-2

$$Q' = s\ v$$
$$v = \frac{5 \times 10^{-2}}{50 \times 10^{-4}} = 10\ m.s^{-1}$$

</td>
<td>

-3 $s` = \frac{1}{4}s$

$$sv = s`v` \Rightarrow sv = \frac{1}{4}sv`$$
$$v` = 4v = 4 \times 10 = 40m.s^{-1}$$

</td>
</tr>
</table>

المسألة الثالثة: ينتهي أنبوب ماء مساحة مقطعه $(20\ cm^2)$ إلى رشاش الإستحمام ، وفيه (20) ثقبا" متماثلا"، مساحة مقطع كل ثقب $(0.1\ cm^2)$ ، فإذا علمت أن سرعة تدفق الماء عبر الإنبوب $(10\ cm.s^{-1})$ المطلوب:

1. احسب معدل التدفق الحجمي للماء .
2. احسب سرعة تدفق الماء من كل ثقب.

الحل:

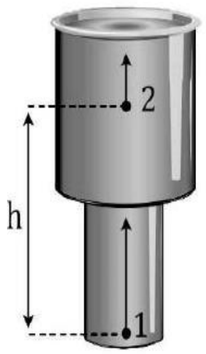
$Q' = s\,v \Rightarrow Q' = 20\times10^{-4}\times10\times10^{-2}$ $Q' = 2\times10^{-4}\mathrm{m}^3.s^{-1}$	$Q` = N.S`.v` \Rightarrow v` = \dfrac{2\times10^{-4}}{20\times0.1\times10^{-4}} = 1m.s^{-1}$

المسألة الرابعة: يجري الماء في أنبوب شاقولي كما هو موضح بالشكل من النقطة (1) إلى النقطة (2) حيث مساحة مقطع الانبوب عند النقطة (1) $s_1 = 5\ cm^2$ وسرعة جريان الماء عند هذه النقطة $v_1 = 8\ m.s^{-1}$

ومساحة مقطع الانبوب عند النقطة (2) $s_2 = 20\ cm^2$ وسرعة جريان الماء عند هذه النقطة v_2

والمسافة الشاقولية بين النقطتين (1) و(2) تبلغ $h = 60\ cm$، **والمطلوب حساب:**

1) معدل التدفق الحجمي $Q`$.
2) سرعة جريان الماء v_2 عند النقطة (2).
3) قيمة فرق الضغط $(P_2 - P_1)$. علماً أن $(\mathbf{g = 10\ m.s^{-2}}\ ,\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1000\ kg.m^{-3}})$



الحل:

1- $\theta_1` = s_1v_1 = 5\times10^{-4}\times8 = 4\times10^{-3}m^3.s^{-1}$   2- $Q` = s_2v_2$ $v_2 = \dfrac{4\times10^{-3}}{20\times10^{-4}} = 2\ m.s^{-1}$ 3- $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$	$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g h$ $= \frac{1}{2}\times10^3(4-64) + 10^3\times10\times6\times10^{-1}$ $P_2 - P_1 = -24000\ Pa$

النسبية الخاصة

اذكرفرضيتا اينشتاين في النسبية الخاصة:

① السرعة مفهوم نسبي يختلف باختلاف جملة المقارنة ،سرعة انتشار الضوء في الخلاء هي $(c = 3\times10^8 m.s^{-1})$ في جميع جمل المقارنة.

② القوانين الفيزيائية تبقى نفسها في جميع جمل المقارنة العطالية.

تمدد الزمن :

الخلاصة:

① المراقب الخارجي:	② المراقب الداخلي:
هو المراقب الساكن	هو المراقب المتحرك
(على سطح الأرض)	(موجود داخل مركبة فضائية)
يستخدم تلسكوب أرضي للمراقبة	تتحرك بسرعة v قريبة من c
يقيس زمن t	يقيس زمن t_0

يتمدد الزمن عندما يتحرك الجسم بسرعة قريبة من سرعة الضوء.

$$t = \gamma t_0$$

حيث: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$ معامل لورينتس

$$\Longrightarrow \quad t > t_0$$

حيث: t : الزمن الذي يقيسه المراقب الخارجي.

t_0 : الزمن الذي يقيسه المراقب الداخلي. أي أن الزمن يتمدد عند الحركة.

فسر ما يلي مستخدماً العلاقات الرياضية المناسبة:

1- يتمدد (يتباطأ) الزمن عندما يتحرك الجسم بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء.

$$\frac{t}{t_0} = \gamma \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{t}{t_0} > 1 \Rightarrow t > t_0$$

الزمن يتمدد (يتباطأ) عندما يتحرك الجسم بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء.

2- يتقلص (ينكمش) الطول عندما يتحرك الجسم بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء.

$$\frac{L_0}{L} = \gamma \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

$$\frac{L_0}{L} > 1 \Rightarrow L_0 > L$$

الطول أثناء الحركة أصغر من الطول أثناء السكون بالتالي فإن الطول يتقلص (ينكمش) عندما يتحرك الجسم بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء.

3- لا يمكن أن تصل سرعة الجسيمات إلى سرعة انتشار الضوء في الخلاء.

بما أن الجسيم يمتلك كتلة سكونيه فكلما اقتربت سرعته من سرعة الضوء في الخلاء زادت كتلته وبالتالي سيحتاج لقوة أكبر لدفعه فإذا تناهت سرعته إلى سرعة الضوء في الخلاء يحتاج إلى إعطاءه قوة لانهائية وهذا غير ممكن.

4-ما هي العلاقة التي تحسب منها الكتلة عند الحركة؟ وأيهما أكبر الكتلة عند الحركة أم الكتلة عند السكون؟ فسر أجابتك باستخدام العلاقات الرياضية المناسبة.

$$\frac{m}{m_0} = \gamma \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{m}{m_0} > 1 \Rightarrow m > m_0$$

بالتالي الكتلة أثُناء الحركة أكبر من الكتلة أثناء السكون.

أجب عما يلي:

1- اكتب علاقة كل من الطاقة الكلية في و الطاقة السكونية و الطاقة الحركية في الميكانيك النسبي.

ان الطاقة الكلية هي مجموع الطاقة الحركية والطاقة السكونية: $E = E_0 + E_k$

الطاقة السكونية: $E_0 = m_o\, c^2$

الطاقة الحركية: $E_k = E - E_0$

الطاقة الكلية : $E = mc^2$

2- أثبت أنه في الميكانيك النسبي أن $\Delta m = \frac{E_k}{C^2}$ أي أن الكتلة تكافئ الطاقة.

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2$$

$$E_k = (m - m_0)c^2 \Rightarrow E_k = \Delta m c^2 \Rightarrow \Delta m = \frac{E_k}{c^2}$$

عندما يتحرك الجسم تزداد كتلته بمقدار يساوي طاقته الحركية مقسومة على رقم ثابت c^2، أي أنّ **الكتلة تكافئ الطاقة**

3- يقف جسم ساكن عند مستوي مرجعي، ما قيمة طاقته الحركية عندئذ؟ وما قيمة طاقته الكامنة الثقالية بالنسبة للمستوي المرجعي؟ هل طاقته الكلية معدومة؟

طاقته الحركية معدومة لانعدام سرعته، طاقته الكامنة الثقالية معدومة بالنسبة للمستوى المرجعي لأنّ ارتفاع الجسم عنه معدوم، طاقته الكلية النسبية غير معدومة لأنّها مجموع الطاقة الحركية والطاقة السكونية، صحيح أنّ طاقته الحركية معدومة إلّا أنّ طاقته السكونية غير معدومة مازال يمتلك كتلة سكونية. $E = E_o + E_k = m_o c^2 + 0 = m_o c^2 \neq 0$

4- انطلاقاً من علاقة الطاقة الحركية في الميكانيك النسبي استنتج العلاقة المحددة للطاقة الحركية في الميكانيك الكلاسيكي.

لكن: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ نعوض:

$$E_k = E - E_0$$

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2$$

$$E_k = m_0 \gamma c^2 - m_0 c^2$$

$$E_k = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

$$E_k = \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}} - 1\right) m_0 c^2$$

$$E_k = \left((1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} - 1\right) m_0 c^2$$

$$E_k = (1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1) m_0 c^2$$

$$E_k = (\frac{v^2}{2c^2}) m_0 c^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

اختر الإجابة الصحيحة:

1	إنّ سرعة انتشار الضوء في وسط ما:						
A	تختلف باختلاف سرعة المنبع الضوئي	B	تقلّ باقتراب المراقب من المنبع الضوئي	C	تبقى ثابتة مهما اختلفت سرعة المراقب بالنسبة للمنبع الضوئي	D	تزداد باقتراب المراقب من المنبع الضوئي
2	وفق النسبية الخاصة فإنّ الزمن عند الحركة:						
A	يتمدّد	B	ينكمش	C	يبقى ثابتاً	D	**ينعدم**
3	وفق النسبية الخاصة إذا تحرك جسم ما فإنّ طوله في حالة الحركة:						
A	يتمدّد	B	ينكمش	C	يبقى ثابتاً	D	ينعدم
4	وفق النسبية الخاصة إذا تحرك جسم ما فإنّ كتلته:						
A	تزداد	B	تقل	C	تنعدم	D	تبقى ثابتة
5	مراقب ساكن على سطح الأرض، ويقترب منه مستطيل بحيث يكون عرضه موازياً لشعاع سرعته، فإن المراقب الساكن على الأرض يراه:						
A	معين	B	متوازي مستطيلات	C	مربع	D	مستطيل
6	تتحرك مركبة فضائية بسرعة $\vec{v}$ ثابتة، ويوجد في المركبة شخص يجري تجربة فيلاحظ أنّ ها تستغرق زمن قدره t_0 ويراقب التجربة شخص ساكن على الأرض فيلاحظ أن زمن التجربة $t = 1h$، فإن قيمة t يمكن أن تكون:						

A	0.7 h	B	1h	C	2h	D	4h
7	السرعة v التي يجب أن يتحرك بها الجسم مقارنة بسرعة الضوء حتى تكون كتلته الحركية $m = 2m_0$ تساوي:						
A	$\frac{\sqrt{3}}{2}c$	B	$\frac{1}{2}c$	C	2c	D	$\sqrt{2}c$
8	تتحرك مركبة فضائية بسرعة $v = 0.8c$ ثابتة بالنسبة لمراقب ساكن على الأرض فتكون قيمة γ مساوية:						
A	2	B	4	C	6	D	8
9	عندما يتحرك جسم كتلته السكونية m_0 بسرعة قريبة من سرعة الضوء، فإنّ الزيادة النسبية في كتلة الجسم Δm تساوي:						
A	$(\gamma + 1)m_0$	B	γm_0	C	$(\gamma - 1)m_0$	D	$\gamma + m_0$
10	في الميكانيك النسبي عندما تكون الطاقة الحركية لجسم $E_k = E_0$ فإن قيمة γ تساوي:						
A	1	B	2	C	3	D	4
11	جسم ساكن عند مستوي مرجعي (سطح الأرض)،فإن طاقته الكلية النسبية E تساوي:						
A	$E = E_k - E_0$	B	$E = 0$	C	$E = E_k$	D	$E = E_0$
12	مركبة فضاء تطير بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء وتسجل أجهزة القياس في المركبة طول المركبة L_0 فيكون طول المركبة L وفق أجهزة المحطة الأرضية مساوياً:						
A	$L = L_0$	B	$L > L_0$	C	$L < L_0$	D	$L = 0$
13	مركبة فضاء تطير بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء، وتسُجل أجهزة القياس في المركبة الزمن الذي تستغرقه رحلتهم t_0 فيكون زمن الرحلة وفق أجهزة المحطة الأرضية مساوياً:						
A	$t < t_0$	B	$t = 0$	C	$t = t_0$	D	$t > t_0$
14	تتحرك سيارتان على طريق مستقيمة، كل منهما نحو الأخرى، وفي لحظة ما أضاءت السيارة الأولى مصابيحها، فتكون سرعة ضوء مصابيح السيارة الأولى بالنسبة للسيارة الثانية:						
A	أكبر من c	B	c	C	أقل من c	D	معدومة
15	إذا كانت كتلة متحرك $m = 2m_0$ فإن سرعته v بدلالة سرعة انتشار الضوء c هي:						
A	$2c$	B	$\frac{1}{2}c$	C	$\frac{\sqrt{3}}{2}c$	D	$\sqrt{2}c$
16	جسم كتلته السكونية m_0 متحرك بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء، وطاقته الكلية $E = 8E_0$ فتكون كتلته أثناء حركته m تساوي:						
A	$8m_0$	B	m_0	C	$\frac{m_0}{8}$	D	$9m_0$
17	تزداد كتلة الجسم بزيادة سرعة الجسم وفق الميكانيك النسبي، والعلاقة المعبرة عن مقدار الزيادة بالكتلة هي:						
A	$\Delta m = \frac{E_k}{c^2}$	B	$\Delta m = \frac{c^2}{E_k}$	C	$\Delta m = E_k c^2$	D	$\Delta m = \frac{1}{2}mc^2$
18	بفرض جسيم يتحرك بسرعة v قريبة من سرعة الضوء في الخلاء بحيث تكون طاقته الحركية $E_k = 2E_0$ فيكون معامل لورنتس γ مساوياً:						
A	2	B	3	C	4	D	5
19-	تتحرك مركبتان فضائيتان متوازيتان في اتجاه واحد حيث سرعة كل منهما v قريبة من سرعة الضوء في الخلاء، في لحظة ما أضاءت المركبة الاولى مصابيحها، فتكون سرعة الضوء بالنسبة للمركبة الثانية هي:						
A	C	B	$C - 2v$	C	$C - v$	D	$C + 2v$
20-	روبوت يحمل سارية طولها$(12\ m)$ ، يتحرك هذا الروبوت بسرعة قريبة من سرعة الضوء ،فإن طول السارية بالسبة لمراقب ساكن يقف موازياً لشعاع السرعة لهذه السارية هي:						
A	$12\,m$	B	$9\,m$	C	$24\,m$	D	$30\,m$

21- بفرض أن أخوين توأمين أحدهما رائد فضاء طار بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء، وبقي في رحلته لمدة 20 ساعة حسب ميقاتيه يحملها، فيكون الزمن الذي انتظره أخوه التوأم على الأرض حتى يعود من رحلته هو:

A	5 ساعات	B	30 ساعات	C	10 ساعات	D	20ساعة

22- مراقبين الأول في محطة إطلاق على الأرض والثاني على متن مركبة فضائية طولها وهي ساكنة L_0 ، تسافر المركبة فضائية بسرعة قريبة من سرعة الضوء ، بحيث يكون طولها موازياً لشعاع السرعة فيكون طول المركبة بالنسبة لمراقب موجود على متنها:

A	$L > L_0$	B	$L = L_0$	C	$L < L_0$	D	$L = 0$

23-تتحرك مركبة فضائية بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء ، يوجد في المركبة شخص يجري تجربة فيلاحظ أنها تستغرق معه زمن قدره t_0 ويراقب التجربة شخص ساكن على الأرض فيلاحظ أن زمن التجربة 1h ، فإن قيمة t_0

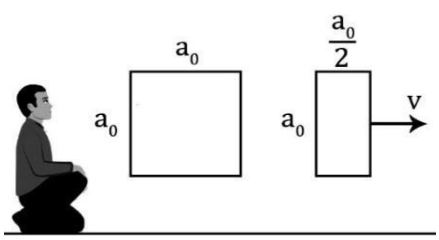
A	0.7h	B	1h	C	2h	D	4h

24-يبلغ طول مركبة فضائية وهي ساكنة على سطح الأرض $30\,m$ ، ويسجل راصد في محطة أرضية طول لهذه المركبة وهي متحركة $15\,m$ فتكون قيمة معامل لورنتس:

A	3	B	0.2	C	2	D	0.3

25	يعبَّر عن الطاقة الحركية في الميكانيك النسبي بالعلاقة:							
A	$E_k = (1-\gamma)mc^2$	B	$E_k = (1-\gamma)m_0c^2$	C	$E_k = (\gamma - 1)m_0c^2$	D	$E_k = \gamma m_0 c^2$	

26 جسم مربع الشكل طول ضلعه وهو ساكن a_0 يتحرك بسرعة v موازية أحد أضلاعه، كما هو موضح بالشكل المجاور، فيبدو بالنسبة لمراقب في الجملة الساكنة مستطيل عرضه $\frac{a_0}{2}$ وطوله a_0 فتكون قيمة سرعته v بالنسبة لسرعة انتشار الضوء في الخلاء مساوية:



A	$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$	B	$v = \frac{2}{3}c$	C	$v = \sqrt{\frac{3}{2}c}$	D	$v = \frac{3}{2}c$

الأمواج المستقرة

السؤال الأول: انطلاقاً من العلاقة: $Y_{\max/n} = 2Y_{\max}\left|\sin\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x}\right|$

1- عرف عقد الاهتزاز مستنتجاً العلاقة المحددة لأبعاد عقد الاهتزاز عن نهاية مقيدة ، ما بعد العقدة الثانية عن النهاية المقيدة؟ ثم فسر تشكل هذه العقد.

عقد الاهتزاز N : نقاط سعة اهتزازها معدومة دوماً، تحدّد أبعادها $\bar{x}$ عن النهاية المقيدة بالعلاقة:

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \Longrightarrow n\frac{\lambda}{2} y_{max/n} = 0 \Longrightarrow sin\frac{2\pi}{\lambda}x = 0$$

حيث: $n = 0,1,2,3......$ **بعد العقدة الثانية:** $n = 1 \Rightarrow x = 1\frac{\lambda}{2}$

تتشكل هذه العقد نتيجة وصول الاهتزاز الوارد والاهتزاز المنعكس على تعاكس دائم، فتكون ساكنة دوماً.

2- عرف بطون الاهتزاز مستنتجاً العلاقة المحددة لأبعاد بطون الاهتزاز عن النهاية مقيدة، ما بعد البطن الثاني عن النهاية المقيدة ؟ ثم فسر تشكل هذه البطون.

بطون الاهتزاز A : نقاط سعة اهتزازها عظمى دوماً، تحدّد أبعادها $\bar{x}$ عن النهاية المقيدة بالعلاقة:

$$Y_{\max/n} = 2Y_{\max} \Rightarrow \sin\left|\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x}\right| = 1$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x=(2n+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

حيث: $n=0,1,2,3.......$ **بعد البطن الثاني:** $n=1\Rightarrow x=3\frac{\lambda}{4}$

تتشكل هذه البطون نتيجة وصول الاهتزاز الوارد والاهتزاز المنعكس على توافق دائم، فتكون سعة الاهتزاز فيها عظمى دوماً.

السؤال الثاني: نصل وترنهايته مقيدة مع رنانة كهربائية ، نجعل الرنانة تعمل لتتشكل أمواج مستقرة على طول الوتر ، المطلوب:

1- **فسر تشكل الأمواج المستقرة على طول الوتر.**

2- **ما هما شرطا حدوث التجاوب ، استنتج العلاقة المحددة لتواتر الصوت البسيط الصادر عن وترنهايته مقيدة، ،اكتب علاقة تواتر المدروج الثاني مبيناً دلالات الرموز ،.**

3- **ماذا يتكون عند النهاية المقيدة ، وكيف تعلل ذلك؟**

التفسير: تتداخل أمواج جيبية واردة مع أمواج جيبية منعكسة ف تتشكل جملة امواج مستقرة على طول الوتر وينتج عن تداخلهما:

- تهتز بسعة عظمى تسمى بطون الاهتزاز، يرمز لها بـ A ، حيث تلتقي فيها الأمواج الواردة والمنعكسة على توافق دائم.
- ونقاط تنعدم فيها سعة الاهتزاز تسمى عقد الاهتزاز، يرمز لها بـ N ، حيث تلتقي فيها الأمواج الواردة والمنعكسة على تعاكس

ويحدث التجاوب إذا تحقق :

a- إذا كان تواتر الهزازة يساوي إلى مضاعفات صحيحة للتواتر الأساسي للوتر $f=nf_1$

b- طول الوتر يساوي عدداً صحيحاً من نصف طول الموجة $L=n\frac{\lambda}{2}$.

الاستنتاج: إن طول الوتر يساوي عدداً صحيحاً من نصف طول الموجة: $L=n\frac{\lambda}{2}$

لكن: $\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow L=n\frac{v}{2f}\Rightarrow f=n\frac{v}{2L}$ حيث: n عدد صحيح موجب $n=1,2,3,4....$ يمثل عدد المغازل أو رتبة الصوت أو عدد المدروجات $n=2\Rightarrow f=2\frac{v}{2L}=2f_1$ تواتر المدروج الثاني.

- يتكون عند النهاية المقيدة **عقدة اهتزاز** نتيجة وصول الاهتزاز الوارد و المنعكس على تعاكس دائم.

السؤال الثالث: نأخذ وترنهايته طليقة يتدلى شاقولياً ثم نصله بأحد شعبتي رنانة كهربائية نجعل الرنانة تعمل لتتشكل أمواج مستقرة على طول الوتر المطلوب:

1) **ماذا يتكون في النهاية الطليقة؟ فسر إجابتك.**

2) **متى يحدث التجاوب؟ استنتج العلاقة المحددة لتواتر الصوت الصادر عن هذا الوترثم اكتب علاقة المدروج الثالث مع ذكر دلالات الرموز**

- يتكون في النهاية الطليقة **بطن اهتزاز** نتيجة وصول الاهتزاز الوارد والمنعكس على توافق دائم.
- ويحدث التجاوب إذا تحقق :

a- إذا كان تواتر الهزازة يساوي إلى مضاعفات فردية صحيحة للتواتر الأساسي للوتر $f=(2n-1)f_1$

b- طول الوتر يساوي عدداً صحيحاً فردياً من ربع طول الموجة $L=(2n-1)\frac{\lambda}{4}$.

- **الاستنتاج:** أن طول الوتر يساوي اعداد صحيحة فردية وموجبة من ربع طول الموجة

$$L=(2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

$$\lambda=\frac{v}{f}\Rightarrow L=(2n-1)\frac{v}{4f}$$

$$\Rightarrow f=(2n-1)\frac{v}{4L}$$

$n=1,2,3,4........$ عدد صحيح موجب يمثل عدد العقد أو البطون.

$(2n-1)$: عدد صحيح فردي موجب يمثل عدد المدروجات. $n=2\Rightarrow f=3\frac{v}{4L}=3f_1$ تواتر المدروج الثالث.

السؤال الرابع:

1- ما هي العوامل التي تتوقف عليها سرعة انتشار الاهتزاز العرضي في وتر مشدود؟
2- استنتج العلاقة المحددة لتواتر الصوت الصادر عن هذا الوتر بدلالة قوة الشد مبيناً دلالات الرموز.

- أنّ سرعة انتشار الاهتزاز العرضي في الوتر المهتز تتناسب:

a- طرداً مع الجذر التربيعي لقوة الشد F_T .

b- عكساً مع الجذر التربيعي لكتلة وحدة الطول من الوتر المتجانس، وتُسمّى الكتلة الخطيّة μ . أي: $v = const\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$

إنّ قيمة هذا الثابت في الجملة الدولية يساوي الواحد $(Const = 1)$. $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$

حيث أنّ الكتلة الخطيّة للوتر: $\mu = \frac{m(\text{kg})}{L(\text{m})}$ وواحدتها في الجملة الدولي kg.m^{-1}

الاستنتاج:

$$\left.\begin{aligned} f &= n\frac{v}{2L} \\ v &= \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \end{aligned}\right] \Rightarrow f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T\ L}{m}}$$

f تواتر الصوت البسيط الصادر عن الوتر، ويُقدّر بالهرتز Hz

F_T قوة شدّ الوتر، وتُقدّر بالنيوتن N

L طول الوتر، وتُقدّر بالمتر m

μ الكتلة الخطيّة للوتر، وتُقدّر بـ kg . m^{-1}

n عدد صحيح يُمثّل عدد المغازل المتكوّنة في الوتر أو رتبة الصوت الصادر عنه (المدروج).

السؤال الخامس:

1- كيف تتولد الأمواج الكهرطيسية المستوية مبيناً مما تتألف؟
2- كيف تعلل تشكل الأمواج الكهرطيسية المستقرة؟
3- كيف يتم الكشف عن الحقلين الكهربائي والمغناطيسي؟
4- ماذا يتكون عند الحاجز المعدني؟

- تتولّد الأمواج الكهرطيسية المستوية بواسطة هوائي مُرسل يُوضع في محرق عاكس بشكل قطع مكافئ دوراني. وتتألف من حقلين كهربائي ومغناطيسي.
- عندما تُلاقي الأمواج الكهرطيسية الواردة حاجزا معدنياً ناقلاً مستوياً عمودياً على منحى الانتشار، ويبعد عن الهوائي المُرسل بُعداً مُناسباً، تنعكس عنه وتتداخل الأمواج الكهرطيسية الواردة مع الأمواج الكهرطيسية المنعكسة لتُؤلّف أمواج كهرطيسية مستقرة.
- نكشف عن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ بواسطة هوائي مُستقبل نضعه موازياً للهوائي المُرسل
- نكشف عن الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ بواسطة حلقة نحاسية عمودية على $\vec{B}$ فيولّد فيها توتّراً نتيجة تغيّر التدفق المغناطيسي الذي يجتازها.
- عقدة حقل كهربائي وبطن للحقل المغناطيسي.

السؤال السادس: كيف نجعل مزمار ذو لسان ثم ذو فم

a- متشابه الطرفين   b- مختلف الطرفين من الناحية الاهتزازية

مزمار ذو فم:

- متشابه الطرفين: نجعل نهايته مفتوحة.
- مختلف الطرفين: نجعل نهايته مغلقة.

مزمار ذو لسان:

- مختلف الطرفين: نجعل نهايته مفتوحة.
- متشابه الطرفين: نجعل نهايته مغلقة.

تعليلُ الأمواجِ المُستقِرّة الطوليّة في أنبوبِ هواءِ المِزمار:

عندَما تهتزُّ طبقة الهواء المُجاوِرة للمنبع ينتشرُ هذا الاهتزاز طولياً في هواءِ المِزمار كلّه لينعكسَ على النهاية.تتداخلُ الأمواجُ الواردةُ معَ الأمواج المُنعكِسة داخل الأنبوب لتؤلِّفَ جملةَ أمواجٍ مُستقِرَّة طولية، ويتكوَّنُ عندَ النّهاية المُغلَقة عقدةٌ للاهتزاز، أمَّا عندَ النّهاية المفتوحة يتكوَّنُ بطنٌ للاهتزاز .ونعلِّلُ ذلك :بأنّ الانضغاط الوارد إلى طبقة الهواء الأخيرة يزيحُها إلى الهواء الخارجيّ، فتُسبِّبُ انضغاطاً فيه، وتخلخُاً وراءَها يستدعي تهافُتُ هواء المِزمار ليملأ الفراغ، وينتُجُ عن ذلك تخلخلٌ ينتشرُ من نهاية المِزمار إلى بدايته، وهو مُنعكِسُ الانضغاط الوارد.

السؤال السابع: استنتج العلاقة المحددة لتواتر الصوت البسيط الصادر عن مزمار متشابه الطرفين ، ثم بين كيف نجعل هذا المزمار يصدر مدروجاته المختلفة ، ثم اكتب علاقة تواتر المدروج الرابع مبيناً دلالات الرموز.

إن طول المزمار L يساوي عدداً صحيحاً من نصف طول الموجة $L = n\frac{\lambda}{2}$

حيث:$n = 1, 2, 3 ...$ عدد صحيح موجب، ولكن $\lambda = \frac{v}{f}$ نعوّض فنجد: $L = n\frac{v}{2f}$ ، $f = n\frac{v}{2L}$

$n = 4 \Rightarrow f = 4\frac{v}{2L} = 4f_1$ تواتر المدروج الرابع.

f تواتر الصوت البسيط الصادر عن المزمار (Hz).

L طول المزمار (m).

v سرعة انتشار الصوت في غاز المزمار (m.s^{-1}).

n عدد صحيح موجب يمثّل رتبة صوت المزمار (مدروجات الصوت).

لكي يُصدر المزمار مدروجاته المختلفة: 1- نزيد نفخ الهواء تدريجيّاً في المزمار. 2- تغيير طول اللسان في المزمار ذي اللسان.

السؤال الثامن: استنتج العلاقة المحددة لتواتر الصوت البسيط الصادر عن مزمار مختلف الطرفين ، ثم اكتب علاقة تواتر المدروج الخامس مبيناً دلالات الرموز.

إن طول المزمار L يساوي عدداً فردياً من ربع طول الموجة أي: $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$ حيث:$n = 1, 2, 3 ...$ عدد صحيح موجب،

ولكن $\lambda = \frac{v}{f}$ نعوّض فنجد: $L = (2n-1)\frac{v}{4f}$ ، $f = (2n-1)\frac{v}{4L}$

f تواتر الصوت البسيط الصادر عن المزمار (Hz).

L طول المزمار (m).

v سرعة انتشار الصوت في غاز المزمار (m.s^{-1}).

$(2n-1)$ عدد صحيح فردي يمثّل رتبة صوت المزمار (مدروجات الصوت).

السؤال التاسع: ما العوامل التي تتوقف عليها سرعة انتشار الاهتزاز في الغازات، ثم اكتب العلاقة التي تحسب منها السرعة في كل حالة.

a) تتناسب سرعة انتشار الصوت في غاز معيّن طرداً مع الجذر التربيعي لدرجة حرارته المطلقة T $\quad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

حيث: $T(K) = 273 + t(^\circ C)$

b) تتناسب سرعتا انتشار الصوت في غازين مختلفين عكساً مع الجذر التربيعي لكثافتيهما D_1 , D_2

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

M : الكتلة الموليّة للغاز (الكتلة الجزيئيّة الغراميّة)

ملاحظة:

1) **البعد بين بطنين متتاليين يساوي البعد بين عقدتين متتاليتين يساوي البعد بين رنينين متتالين يساوي $\frac{\lambda}{2}$**

2) **البعد بين بطن وعقدة تليه مباشرة يساوي $\frac{\lambda}{4}$**

الأعمدة الهوائية:

عمود هوائي مفتوح | عمود هوائي مغلق

$L = 2\frac{\lambda}{2}$ $\quad$ $L = \frac{\lambda}{2}$ $\quad$ $L = 3\frac{\lambda}{4}$ $\quad$ $L = \frac{\lambda}{4}$

عند التجاوب $L = n\frac{\lambda}{2}$

$n = 1,2,3$ (رتبة المدروج)

$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$

n عدد عقد أو عدد بطون

$(2n-1)$ رتبة المدروج

(مدروجات فردية)

النتائج عن الدراسة التجريبية:

- يحدث تضخيم وتقوية للصوت في أثناء انتقاله عبر الأنابيب نتيجة حدوث انعكاسات متكررة داخله فيتولد عنها أمواج مستقرة ذات نغمات صوتية واضحة وتزداد وضوحاً في الأنابيب الضيقة.
- تتولد أمواج مستقرة طولية في هواء الأنبوب ونسمع صوتاً شديداً عالياً عندما يكون تواتر الرنانة يساوي تواتر الهواء في عمود الأنبوب.
- تتكون عقدة اهتزاز عند سطح الماء الساكن لأنه يمنع الحركة الطولية للهواء (حيث يُعتبر نهاية مغلقة) وبطن اهتزاز تقريباً عند فوهة الأنبوب (نهاية مفتوحة).
- طول أقصر عمود هوائي فوق سطح الماء يحدث عنده التجاوب (الرنين الأول) يساوي $L_1 = \frac{\lambda}{4}$.
- طول العمود الهوائي فوق سطح الماء يحدث عنده التجاوب (الرنين الثاني) يساوي $L_2 = \frac{3\lambda}{4}$
- يمكن تغير طول العمود الهوائي المفتوح بإدخال أنبوب قطره أصغر.
- المسافة بين مستويي الماء الموافقين للصوتين الشديدين المتتاليين $\Delta L = \frac{\lambda}{2}$
- في العمود الهوائي مفتوح الطرفين يتشكل عند كل طرف مفتوح بطن للاهتزاز فيكون طول العمود الهوائي في هذه الحالة $L = n\frac{\lambda}{2}$
- عند استخدام رنانة تواترها كبير نحصل على عمود هوائي طوله قصير.
- يتناسب تواتر الرنانة المستخدمة عكساً مع طول العمود الهوائي.
- تتشابه الأعمدة الهوائية المفتوحة بأنفاق عبور السيارات.
- تُعطى سرعة الصوت في هواء الأنبوب بالعلاقة: $v = \lambda f$
- في العمود الهوائي المغلق لا يمكن الحصول على المدروجات ذات العدد الزوجي.

ملاحظات مسائل للمزمار حصراً:

متشابه الطرفين	مختلف الطرفين
$L = n\frac{\lambda}{2}$	$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$
$f = n\frac{v}{2L}$	$f = (2n-1)\frac{v}{4\,L}$
n رتبة مدروج	$(2n-1)$رتبة مدروج
	n عدد عقد أو عدد بطون

1 تواتر الصوت الذي يصدره المزمار يتناسب طرداً مع سرعة انتشار الصوت في غاز المزمار. يمكن تغيير هذه السرعة بزيادة درجة الحرارة في تغيير طبيعته.

أ) تتناسب سرعة انتشار الصوت في غاز معين طرداً مع الجذر التربيعي لدرجة حرارته المطلقة T (كلفن).

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_{1(K)}}{T_2(K)}} = \sqrt{\frac{t_1(C^\circ) + 273}{t_2(C^\circ) + 273}}$$

ب) اختلاف نوع الغاز ⟸ اختلاف كثافة الغاز بالنسبة للهواء ⟸ انتشارالصوت.

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

$$D = \frac{M}{29}$$

M: الكتلة المولية للغاز

2 المزمار يصدر الصوت نفسه ⟸ التواتر نفسه.

3 صوت مواقت للصوت الذي يصدره مزمار آخر ⟸ يساويه بالتواتر.

4 إذا بقيت درجة الحرارة نفسها ⟸ السرعة بقيت نفسها (مع ثبات نوع الغاز).

5 عدد اطوال الموجة = $\frac{L}{\lambda}$

6 هواء درجة حرارته 15c° تكون سرعته الصوت فيه $340m.s^{-1}$ وفي الدرجة 0c° تكون السرعة $330m.s^{-1}$

7 إذا ذكر أنه تشكل عدد من العقد داخل المزمار نرسم ويحسب من الرسم إما طول الموجة أو طول المزمار حسب المعلوم والمجهول.

حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى: مزمار متشابه الطرفين طوله 1m يصدر صوتا تواتره 170 Hz يحوي هواء في درجة حرارة معينة حيث سرعة انتشار الصوت $340\ m.s^{-1}$. **المطلوب حساب:** 1- عدد أطوال الموجة التي يحويها المزمار. 2- طول مزمار أخر مختلف الطرفين يحوي الهواء يصدر صوتا أساسيا مواقتا" للصوت السابق في درجة الحرارة نفسها. الحل : $\lambda = \frac{v}{f}$ $\lambda = \frac{340}{170} = 2\ m$	عدد أطوال الموجة $= \frac{L}{\lambda}$ عدد أطوال الموجة $= \frac{1}{2}$ $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$ $L = (2n-1)\frac{v}{4f}$ $L = (1)\frac{340}{4\times170}$ $L = 0.5\ m$
المسألة الثانية: مزمار متشابه الطرفين يصدر صوتا تواتره 680 Hz يحوي هواء في درجة حرارة معينة حيث سرعة انتشار الصوت $340\ m.s^{-1}$. **المطلوب حساب:** 1- طول موجة الصوت البسيط الصادر عن المزمار. 2- البعد بين بطنين متتاليين. 3- طول مزمار أخر مختلف الطرفين يحوي هواء في درجة الحرارة نفسها يصدر صوتا أساسيا موافقا للصوت السابق. الحل : $\lambda = \frac{v}{f}$ $\lambda = \frac{340}{680} = 0.5\ m$	البعد بين بطنين متتاليين $= \frac{\lambda}{2}$ البعد بين بطنين متتاليين $= \frac{0.5}{2} = 0.25\ m$ $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$ $L = (2n-1)\frac{v}{4f}$ $L = (1)\frac{340}{4\times680}$ $L = \frac{1}{8}m$

المسألة الثالثة: مزمار ذو فم نهايته مغلقة يحوي غاز الأوكسجين سرعة انتشار الصوت فيه $324\ \mathrm{m.s^{-1}}$ يصدر صوتا أساسيا تواتره $162\ \mathrm{Hz}$ **المطلوب حساب:**

1- طول المزمار.

2- استبدل غاز الاكسجين في المزمار بغاز الهيدروجين في درجة الحرارة نفسها احسب تواتر الصوت الأساسي الذي يصدره المزمار في هذه الحالة.

علما بأن $(H = 1)\ (O = 16)$

الحل:

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = (2n-1)\frac{v}{4f}$$

$$L = (1) \times \frac{324}{4 \times 162} = 0.5\ \mathrm{m}$$

-2 $$\frac{v_{H_2}}{v_{O_2}} = \sqrt{\frac{D_{O_2}}{D_{H_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{M_{O_2}}{29}}{\frac{M_{H_2}}{29}}} = \sqrt{\frac{M_{O_2}}{M_{H_2}}}$$

$$\frac{v_{H_2}}{v_{O_2}} = \sqrt{\frac{16 \times 2}{1 \times 2}} = 4$$

$$v_{H_2} = 4\, v_{O_2} = 4 \times 324 = 1296\ \mathrm{m.}s^{-1}$$

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = (2n-1)\frac{v_{H_2}}{4f_{H_2}}$$

$$f_{H_2} = (2n-1)\frac{v_{H_2}}{4L}$$

$$f_{H_2} = [1]\frac{1296}{4(0.5)} = 648\ \mathrm{Hz}$$

ملاحظات مسائل:

- سعة الموجة المستقرة في النقطة (n)

$$Y_{max/n} = 2y_{max}\left|\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|$$

- تحديد أبعاد عقد وبطون الاهتزاز:

أبعاد العقد

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

أبعاد البطون

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$n = 0,1,2, \dots \dots \dots$$

- وتر مشدود بقوة شد F_T ، كتلته m وطوله L.

الكتلة الخطية $\mu = \frac{m}{L}$

طول الوتر $L = n\frac{\lambda}{2}$

$n = 1,2, \dots \dots \dots$ عدد المغازل أو رتبة المدروج.

- عدد أطوال الموجة = $\frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الموجة}} = \frac{L}{\lambda}$

- عدد المغازل = $\frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول المغزل}} = \frac{L}{\frac{\lambda}{2}}$

لحساب F_T أو m أي قانون مناسب

لحساب تواتر الهزازة:

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad ، \quad f = \frac{v}{\lambda} \quad ، \quad f = n\frac{v}{2L}$$

لحساب سرعة انتشار الاهتزاز:

$$v = \sqrt{\frac{F_T.L}{m}} \quad ، \quad v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad ، \quad v = \lambda f$$

نحسب طول الموجة الجديد من: $L = \acute{n}\frac{\lambda}{2}$

المسألة الرابعة: وتر طوله $(l = 1m)$ وكتلته $(m = 10\ g)$ نجعله يهتز بالتجاوب بواسطة هزازة تواترها $(f = 100\ HZ)$ فيتشكّل فيه مغزلين **والمطلوب حساب:**

1- -طول موجة الاهتزاز .

2-الكتلة الخطّيّة للوتر .

3-سرعة انتشار الاهتزاز في الوتر

4- مقدار قوّة الشدّ المطبقة على الوتر.

5-بعد أماكن عقد وبطون الاهتزاز عن نهايته المقيّدة .

الحل : 1

$$L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2\frac{L}{n}$$

$$\lambda = 2\frac{1}{2} = 1m$$

2- $\mu = \frac{m}{L} = \frac{10\times10^{-3}}{1} = 10^{-2}\ \text{kg}.m^{-1}$

3- $v = f\lambda = 100 \times 1 = 100\ \text{m}.s^{-1}$

4- $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \Rightarrow F_T = \mu v^2 = 10^{-2} \times (100)^2$

$$F_T = 100\ \text{N}$$

5- لحساب أبعاد العقد N عن النهاية المقيدة:

$$x = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = n\frac{1}{2}$$

حيث $(n = 0,1,2)$

العقدة الأولى: $n = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ \text{m}$

العقدة الثانية: $n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\ \text{m}$

العقدة الثالثة: $n = 2 \Rightarrow x_3 = 1\ \text{m}$

لحساب أبعاد البطون A عن النهاية المقيدة:

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} = (2n+1)\frac{1}{4}$$

حيث $(n = 0,1)$

البطن الأول: $n = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}\ \text{m}$

البطن الثاني: $n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}\ \text{m}$

المسألة الخامسة: وتر مشدود طوله $(l = 2\ m)$ وكتلته $(m = 20\ g)$ يهتز بالتجاوب بواسطة هزازة تواترها $(50\ HZ)$ فإذا علمت أن طول الموجة المتكونة $(0.5\ m)$ والمطلوب حساب :

1 – عدد المغازل المتكونة على طول الوتر .

2 – الكتلة الخطية للوتر .

3 – سرعة انتشار الاهتزاز في الوتر.

4 – قوة الشد المطبقة على الوتر.

5 – عدد أطوال الموجة المتكوّنة في الوتر .

الحل 1

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

$$n = 2\frac{L}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{2\times2}{0.5} = 8$$

2 $\mu = \frac{m}{L} = \frac{20\times10^{-3}}{2} = 10^{-2}\ \text{kg}.m^{-1}$

3 $v = f\lambda = 50 \times 0.5 = 25\ \text{m}.s^{-1}$

4 $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \Rightarrow$

$$F_T = \mu v^2 = 10^{-2} \times (25)^2$$

$$F_T = 6.25\ \text{N}$$

5 عدد أطوال الموجة $= \frac{L}{\lambda}$

عدد أطوال الموجة $= \frac{2}{0.5} = 4$

المسألة السادسة: وتر طوله $L = 1\ m$ وكتلته $m = 6\ g$ مشدود بقوة F_T يهتز بالتجاوب مع رنانة تواترها $f = 50\ Hz$ إذا علمت أن البعد بين بطنين متتاليين هو $20\ cm$ ، **والمطلوب حساب: 1**- عدد المغازل المتكونة على طول الوتر **2**- قوة الشد F_T المطبقة على الوتر.. 3-سرعة انتشار الاهتزاز العرضي على طول الوتر. **4**- عدد أطوال الموجة المتكونة.

-1 $L = n\frac{\lambda}{2} \to 1 = n \times 2 \times 10^{-1}$

مغازل $n = 5$

-2 $f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \to f^2 = \frac{n^2}{4L^2}\frac{F_T}{\mu}$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{6\times10^{-3}}{1} = 6\times10^{-3} kg.m^{-1}$$

$$F_T = \frac{f^2.4L^2.\mu}{n^2} = \frac{\mathbf{2500\times4\times1\times6\times10^{-3}}}{\mathbf{25}}$$

$$F_T = \mathbf{2.4}\ \boldsymbol{N}$$

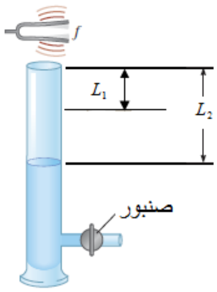
-3 $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{24\times10^{-1}}{6\times10^{-3}}} = 20\ m.s^{-1}$

-4 عدد أطوال الموجة $= \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{40\times10^{-2}} = 2.5$

المسألة الأولى: يصدر مزمار ذو فم نهايته مفتوحة صوتاً بإمرار الهواء بدرجة $15°C$ فيتكون بداخله عقدتان البعد بينهما $50 cm$ إذا علمت أن سرعة انتشار الصوت $v = 300 m.s^{-1}$ ، **المطلوب حساب :**

1- طول موجة الصوت البسيط الصادر .
2- طول المزمار.
3- تواتر الصوت البسيط الصادر عن المزمار.
4- طول مزمار أخر ذو فم نهايته مغلقة يعطي في درجة الحرارة $15°C$ صوتاً أساسياً مواقتاً للصوت الصادر عن المزمار السابق.

المسألة الثانية: أنبوب أسطواني مملوء بالماء وله صنبور عند قاعدته، تهتز رنانة فوق طرفه العلوي المفتوح، وعند إنقاص مستوى الماء في الأنبوب، سُمع صوتاً شديداً يبعد مستوى الماء فيه عن طرفه العلوي بمقدار $L_1 = 17 \text{ cm}$ ، وباستمرار إنقاص مستوى الماء سُمع صوتاً شديداً ثانياً يبعد مستوى الماء فيه عن طرفه العلوي بمقدار $L_2 = 51 \text{ cm}$ ، فإذا علمت أنّ سرعة انتشار الصوت في شروط التجربة $v = 340 \text{ m.s}^{-1}$. احسب تواتر الرنانة المستخدمة.



المسألة الثالثة:

- يُصدر أنبوب صوتي مختلف الطرفين صوتاً أساسياً تواتره $f = 100 \text{ Hz}$. فما تواترات الأصوات الثلاثة المتتاليّة التي يمكنه أن يصدرها؟

ملاحظة: يجب حل أسئلة الاختيار المتعدد الموجودة في الكتاب لأنها هامة جداً.