نوطة الرياضيات
الصف التاسع

2025
2026

الرياضيات

(كتاب الجبر)

للصف الثالث الإعدادي

((مقدمة عن الأعداد))

مجموعة الارقام في نظام العد العشري هي $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ وعددها 10

منها خمسة ارقام فردية $1,3,5,7,9$

ومنها خمسة ارقام زوجية $0,2,4,6,8$

باستخدام هذه الارقام يمكننا كتابة الاعداد الطبيعية التي تبدأ من العدد صفر وتنتهي في اللانهاية

مجموعة الأعداد الطبيعية:

$$N = \{0,1,2,3,4,5,................\}$$

يكون العدد مؤلف من ارقام وهذه الارقام هي مراتب أحاد ،عشرات ، مئات ،.....الخ

فيكون العدد فردي اذا كان أحاده فرديا : $1,3,5,7,9$

ويكون العدد زوجي اذا كان احاده زوجيا: $0,2,4,6,8$

مضاعفات عدد :

لإيجاد مضاعفات عدد ما مثل: a

نضرب العدد a بجميع الاعداد الطبيعية

مثلا مضاعفات 4 هي: $0,4,8,12,16,20,24,......$

مثلا مضاعفات 6 هي: $0,6,12,18,24,30,36......$

مثلا مضاعفات 13 هي: $0,13,26,39,52,65,.......$

القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} a \text{ المقسوم} & b \text{ المقسوم عليه} \\ \underline{-......} & c \text{ الناتج} \\ r \text{ الباقي} & \end{array}$$

نعبر عن ناتج القسمة: $\frac{a}{b}$ أو $a \div b$

بالشكل: $a = b \times c + r$

مثال : $23 = 8 \times 2 + 7$

فالعدد 23 لا يقبل القسمة على 2

((لاحظ يوجد باقي))

مثال: $27 = 3 \times 9 + 0$

فالعدد 27 يقبل القسمة على 3

((لاحظ لا يوجد باقي))

قابلية القسمة

على 2 اذا كان احاده زوجيا

على 5 اذا كان احاده صفرا او خمسة

على 10 اذا كان احاده صفرا

على 4 اذا كان العدد المكون من رقمي احاد وعشرات العدد من مضاعف العدد 4 مثل **00,04,08,12,16...**

على 25 اذا كان العدد المكوّن من رقمي آحاد وعشرات العدد من مضاعفات العدد 25 مثل **00,25,50,75**

على 3 اذا كان مجموع ارقامه مضاعف لعدد 3

على 9 اذا كان مجموع ارقامه مضاعف للعدد 9

على 6 اذا كان يقبل القسمة على 2 و 3 معا

على 12 اذا كان يقبل القسمة على 4 و 3 معا

على 15 اذا كان يقبل القسمة على 5 و 3 معا

العدد الأولي: هو عدد طبيعي أكبر من الواحد وله قاسمان مختلفان فقط هما العدد ذاته والعدد واحد

ومن الاعداد الاولية

2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 ,..........

وهي مجموعة غير منتهية

هام جداً: العدد 2 هو اول الأعداد الأولية وأصغرها وهو العدد الزوجي الوحيد فيها

المضاعف المشترك لأصغر لعددين طبيعيين L.C.M

هو أصغر عدد طبيعي مضاعفا مشتركا للعددين معا

ايجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين $L.C.M$

الطريقة الأولى: طريقة المضاعفات المشتركة

1. نوجد مضاعفات العدد الاول
2. نوجد مضاعفات العدد الثاني
3. نوجد المضاعفات المشتركة للعددين معا
4. نبحث عن أصغر مضاعف مشترك ماعدا الصفر فيكون هو المضاعف المشترك الاصغر للعددين

ونستخدم هذه الطريقة عادة لما تكون الاعداد صغيرة

مثال :اوجد المضاعف المشترك الاصغر للعددين 8 و 6

الحل : مضاعفات 8 هي:

$0,8,16,24,32,40,48,56,..$

مضاعفات 6 هي:

$0,6,12,18,24,30,36,42,48,54..$

المضاعفات المشتركة هي $0,24,48,.....$

فإن المضاعف المشترك الاصغر للعددين 8 و 6 هو $\boxed{24}$

الطريقة الثانية: طريقة المضاعفات المشتركة

نحلل العدد الأول لعوامله الاولية
ونكتبه على شكل جداء قوى (عوامل)
نحلل العدد الثاني لعوامله الاولية
ونكتبه على شكل جداء قوى (عوامل)
نأخذ جداء القوي المشتركة وغير المشتركة بأكبر أس
ونستخدم هذه الطريقة لما تكون الاعداد صغيرة أو كبيرة نسبيا.

مثال : اوجد المضاعف المشترك الاصغر للعددين 8 و 6

الحل : $8 = 2^3$

$6 = 2 \times 3$

8	2
4	2
2	2
1	

6	2
3	3
1	

المضاعف المشترك الاصغر للعددين 8 و 6

$$L.C.M = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = \boxed{24}$$

....

مثال اوجد المضاعف المشترك الاصغر للعددين 36,48

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$36 = 2^2 \times 3^2$

الحل : $48 = 2^4 \times 3$

المضاعف المشترك الاصغر للعددين 36 و 48 هو:

$$L.C.M = 2^4 \times 3^2$$
$$L.C.M = 16 \times 9$$
$$L.C.M = \boxed{144}$$

ملاحظة: ((يفيد المضاعف المشترك الأصغر في توحيد المقامات للكسور)) .

مجموعة الاعداد الصحيحة Z

تضم الاعداد الطبيعية ومعاكساتها

$$Z = \{......-4 ,-3 ,-2 ,-1 ,0 ,1 , 2 ,3 ,......\}$$

كل عدد موجب تماماً هو عدد أكبر من الصفر.
كل عدد سالب تماماً هو عدد أصغر من الصفر.
العدد الموجب أكبر من أي عدد سالب
الصفر اصغر الأعداد الموجبة
الصفر أكبر الأعداد السالبة
أكبر العددين الموجبين أبعدهما عن الصفر
أكبر العددين السالبين أقربهما الى الصفر

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

الأعداد السالبة ◄────► الأعداد الموجبة

العمليات في الاعداد الصحيحة Z :

اولا: الجمع في الاعداد الصحيحة

إذا كان العددين متفقين بالإشارة

نضع الاشارة ذاتها ونجمع العددين

$$(+2)+(+7)=+9$$
$$(-8)+(-3)=-11$$

إذا كان العددين مختلفين بالإشارة

نضع اشارة العدد الأبعد عن الصفر ونطرح العددين

$$(+5)+(-7)=-2$$
$$(-9)+(-7)=-16$$

ثانياً: الطرح في الاعداد الصحيحة

***نحول عملية الطرح الى عملية جمع المعاكس**

$$a-b=a+(-b)$$
$$(+2)-(-7)=(+2)+(+7)=+9$$
$$(-8)-(+3)=(-8)+(-3)=-11$$
$$(+9)-(+13)=(+9)+(-13)=-4$$
$$(-8)-(-3)=(-8)+(+3)=-5$$

ثالثاً: الضرب في الاعداد الصحيحة

إذا كان العددين متفقين بالإشارة

تكون اشارة الناتج موجبة ونضرب العددين

$$(-2)\times(-7)=+14$$
$$(+8)\times(+3)=+24$$

إذا كان العددين مختلفين بالإشارة

تكون اشارة الناتج سالبة ونضرب العددين

$$(+8)\times(-7)=-56$$
$$(-6)\times(+3)=-18$$

رابعاً: القسمة في الاعداد الصحيحة

إذا كان العددين متفقين بالإشارة

تكون اشارة الناتج موجبة ونُجري القسمة كالمعتاد

$$(-21)\div(-7)=+3$$
$$(+8)\div(+2)=+4$$

إذا كان العددين مختلفين بالإشارة

تكون اشارة الناتج سالبة ونُجري القسمة كالمعتاد

$$(-6)\div(+3)=-2$$
$$(+15)\div(-5)=-3$$

طبيعة الأعداد

اولا :مجموعة الاعداد الطبيعية :N

وتضم الاعداد من الصفر الى اللانهاية

$N=\{0,1,2,3,4,5.....\}$

ثانيا: مجموعة الاعداد الصحيحة :Z

تضم الاعداد الطبيعية ومعاكساتها

$Z=\{......-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5.....\}$

ثالثا : مجموعة الاعداد العشرية D وتضم

1. الاعداد الطبيعية
2. الاعداد الصحيحة
3. الاعداد العشرية (تحوي فاصلة يمينها ارقام منتهية)
4. الكسور العشرية مقامها قوى للعدد 2 أو 5 أو 10
5. إذا كان مكتوب بالصيغة العشرية وهي $a\times10^n$ حيث a و n عددان صحيحان

رابعا: مجموعة الاعداد العادية Q: وتضم

1. الاعداد الطبيعية مثل 5، 9
2. الاعداد الصحيحة مثل 7+، -3
3. الاعداد الكسرية مثل $-5\frac{9}{11}$ ، $2\frac{3}{7}$
4. الكسور العادية $\frac{3}{19}$ ، $-\frac{4}{7}$
5. الاعداد العشرية 0.2 ، -0.34
6. الكسور العشرية $\frac{3}{10}$ ، $-\frac{7}{1000}$
7. الاعداد الدورية ....3.45454545 وهي غير منتهية

هام: الاعداد الدورية ليست عشرية

خامسا: مجموعة الأعداد غير العادية 'Q

وتضم الاعداد غير الدورية وغير المنتهية

العدد غير العادي هو كل عدد يكتب بصورة عشرية وغير منتهية وغير دورية.

مثل: العدد π خارج قسمة

طول قوس الدائرة (محيطها) على طول قطرها

وهو والجذور الصماء غير المألوفة.

مثال: $\sqrt{3}\ ,\pi\ ,-3\sqrt{7},\sqrt{12},7\sqrt{20}$ ....

$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{11},\sqrt{13}...etc$

س: بيّن فيما إذا كانت الأعداد التالية عشرية؟ علل

* $\boxed{\frac{2}{5}}$: عدد عشري لأنه يكتب من الشكل $a\times10^n$ حيث $a\ ,n$ عددان صحيحان.(مقامه قوى للعدد5)

* $\boxed{\frac{7}{2}}$: عدد عشري لأنه يكتب من الشكل $a\times10^n$ حيث $a\ ,n$ عددان صحيحان. مقامه قوى للعدد 2)

* $\boxed{\frac{3}{4}}$: عدد عشري لأنه يكتب من الشكل $a\times10^n$ حيث $a\ ,n$ عددان صحيحان. مقامه قوى للعدد 2)

* $\boxed{-3}$: عدد عشري لأنه يكتب من الشكل $a\times10^n$ حيث $a\ ,n$ عددان صحيحان.

* $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$: ليس عدد عشري لأن بسطه عدد غير صحيح

2) العدد غير العشري:

هو كل عدد عادي يكتب بصورة عشرية غير منتهية ودورية.

◆ مثل: $\left(\frac{5}{3}=1.6666...=1.\overline{6}\right)$

✍ نلاحظ عند استمرار القسمة يتكرر العدد 6 فتقول أن $\frac{5}{3}$ هو عدد غير عشري لأنه يكتب بصورة عشرية غير منتهية ودورية.

لسهولة معرفة العدد الغيرعشري يمكننا القول:

"كل عدد مقامه $(13,11,9,7,6,3)$ هو عدد غير عشري بشرط.

1- البسط والمقام عددان صحيحان

2- الكسر مكتوب بأبسط صورة.

س: بيّن فيما إذا كانت الأعداد التالية عشرية أو غير عشرية.

* $\boxed{\frac{7}{3}}$: لاحظ البسط والمقام عددان صحيحان والكسر مكتوب بأبسط صورة فتقول أنه عدد غير عشري لأنه يكتب بصورة عشرية غير منتهية ودورية.

* $\boxed{\frac{5}{11}}$: عدد غير عشري لأنه يكتب بصورة عشرية غير منتهية ودورية.

* $\boxed{\frac{7}{6}}$: عدد غير عشري لأنه يكتب بصورة عشرية غير منتهية ودورية.

* $\boxed{\frac{5}{11}}$: عدد غير عشري لأنه يكتب بصورة عشرية غير منتهية ودورية.

أفكار:

1- كل عدد صحيح هو عدد عشري.

2- العدد الدوري هو عدد غير عشري.

3- العددان $(0,1)$ هما عددان صحيحان وعشريان وعاديان.

تذكر: العمليات على الأعداد العادية:

① **الجمع والطرح:** لجمع عددان عاديان نميز حالتين:

a) **المقامات متساوية:** نجمع البسط مع البسط والمقام على حاله مع مراعاة الإشارات.

* $\frac{-3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{-3+2}{4}=\frac{-1}{4}$
* $\frac{-7}{5}+\frac{4}{5}=\frac{-7+4}{5}=\frac{-3}{5}$
* $\frac{-5}{7}-\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{-5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{-2}{7}$

b) **المقامات مختلفة:** نوحد المقامات وذلك بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر ثم نعود للحالة a.

* $\underset{(3)}{\frac{3}{5}}+\underset{(5)}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{15}+\frac{10}{15}=\frac{19}{15}$
* $\underset{(3)}{\frac{-3}{7}}+\underset{(1)}{\frac{-2}{21}}=\frac{-9}{21}+\frac{-2}{21}=\frac{-11}{21}$
* $\underset{(3)}{\frac{5}{8}}+\underset{(4)}{\frac{-11}{6}}=\frac{15}{24}+\frac{-44}{24}=\frac{-29}{24}$

② **الضرب:** لضرب عددين عاديين نضرب البسط مع البسط والمقام مع المقام مع الانتباه للإشارات والاختزال.

* $\frac{3}{5}\times\frac{6}{7}=\frac{3\times 6}{5\times 7}=\frac{18}{35}$
* $\frac{-3}{4}\times\frac{-8}{9}=\frac{\cancel{3}^{1}\times\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}_{1}\times\cancel{9}_{3}}=+\frac{2}{3}$
* $\frac{-3}{7}\times\frac{-21}{15}=\frac{\cancel{3}^{1}\times\cancel{21}^{3}}{\cancel{7}_{1}\times\cancel{15}_{5}}=\frac{3}{5}$

* **مقلوب كسر:**

لقلب كسر نبدل بين بسطه ومقامه فمقلوب الكسر $\frac{a}{b}$ هو $\frac{b}{a}$

أوجد مقلوب الكسر الآتية:

مقلوب $\frac{-3}{7}$ هو $-\frac{7}{3}$ كذلك مقلوب $\frac{2}{5}$ هو $\frac{5}{2}$

(اشارة الكسر هي للبسط أو للكسر كاملا)

ابسط صورة للكسر $\frac{3}{-8}$ هي $\frac{-3}{8}$ أو $-\frac{3}{8}$

③ **القسمة:** لقسمة كسرين عاديين نضرب الكسر الأول بمقلوب الكسر الثاني. (مع مراعاة الإشارات والاختزال).

* $\frac{3}{14}\div\frac{9}{7}=\frac{3}{14}\times\frac{7}{9}=\frac{\cancel{3}^{1}\times\cancel{7}^{1}}{\cancel{14}_{2}\times\cancel{9}_{3}}=\frac{1}{6}$
* $6\div\frac{-8}{3}=\frac{6}{1}\times-\frac{3}{8}=-\frac{\cancel{6}^{3}\times 3}{\cancel{8}_{4}}=\frac{-9}{4}$
* $\frac{-3}{7}\div\frac{-6}{14}=\frac{-3}{7}\times-\frac{14}{6}$

$=\frac{\cancel{3}^{1}\times\cancel{14}^{2}}{\cancel{7}_{1}\times\cancel{6}_{2}}=\frac{2}{2}=1$

ترتيب العمليات:

1- العمليات داخل الاقواس ان وجدت.

2- القوى ان وجدت

3- الضرب والقسمة من اليسار إلى اليمين.

4- الجمع والطرح من اليسار إلى اليمين.

تمرين: احسب ناتج $B=\left(\frac{3}{9}-\frac{6}{48}\right)\div\frac{15}{12}$

الحل:

$B=\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{9}}-\frac{\cancel{6}}{\cancel{48}}\right)\div\frac{15}{12}$

$B=\left(\frac{1}{3_{8}}-\frac{1}{8_{3}}\right)\div\frac{15}{12}$

$B=\left(\frac{8}{24}-\frac{3}{24}\right)\times\frac{12}{15}$

$B=\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{24}}\right)\times\frac{\cancel{12}}{\cancel{15}}$

$B=\left(\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}$

$B=\frac{1}{6}$

◆**مثال: احسب ناتج** $A = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right)$

نفك الأقواس أولاً ثم نطرح

$$A = 1 - \left(\underset{(5)}{\frac{1}{4}} + \underset{(4)}{\frac{3}{5}}\right)$$

$$A = 1 - \left(\frac{5}{20} + \frac{12}{20}\right)$$

$$A = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$$

$$B = \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{3} - 3\right)$$

$$B = \frac{5}{2} \times \left(\underset{(1)}{\frac{1}{3}} - \underset{(3)}{\frac{3}{1}}\right)$$

$$B = \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{9}{3}\right)$$

$$B = \frac{5}{2} \times \frac{-8}{3} = \frac{-20}{3}$$

$$C = \left(5 - \frac{3}{5}\right) \div \left(\frac{-1}{7} - \frac{3}{7}\right)$$

$$C = \left(\underset{(5)}{\frac{5}{1}} - \underset{(1)}{\frac{3}{5}}\right) \div \left(\frac{-4}{7}\right)$$

$$C = \left(\frac{25}{5} - \frac{3}{5}\right) \div \left(\frac{-4}{7}\right)$$

$$C = \frac{22}{5} \times -\frac{7}{4} = \frac{-77}{10}$$

السؤال الأول: أجب بصح أو خطأ عما يلي:

1- كل عدد صحيح هو عدد عادي .

2- كل عدد غير عشري هو عدد عادي

3- كل عدد دوري هو عدد غير عشري .

4- كل عدد صحيح هو عدد عشري .

5- الشكل العشري للكسر $\frac{3}{4}$ هو 0.75

فكر – ناقش – استنتج

السؤال الثاني: في كل مما يأتي اجابة واحدة صحيحة أشر اليها:

1- العدد $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هو عدد

a) غير عادي	b) عادي عشري	c) عادي غير صحيح

2- العدد 3.14 هو عدد

a) غير عادي	b) عادي عشري	c) صحيح

3- ناتج المقدار $\frac{3}{\pi} \times \pi$ هو عدد

a) غير عادي	b) عادي عشري	c) غير صحيح

4- ناتج المقدار $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ هو عدد

a) غير عادي	b) عادي عشري	c) غير عشري

5- ناتج المقدار $\frac{1}{6} - \frac{1}{2}$ هو عدد

a) غير عادي	b) عادي عشري	c) غير عشري

6- العدد 5×10^2 هو عدد

a) صحيح	b) عادي غير عشري	c) غير عادي

7- العدد $\frac{7}{3}$ هو عدد

a) غير عادي	b) عادي عشري	c) غير صحيح

8- ناتج المقدار $\frac{19}{11} + \frac{3}{11}$ هو عدد

a) غير عادي	b) عادي عشري	c) غير صحيح

9- مربع طول ضلعه $\sqrt{3}$ فإن العدد الدال على مساحته هو عدد

a) غير صحيح	b) عادي صحيح	c) غير عادي

10- قرص دائري نصف قطره $\frac{1}{3\pi}$ فإن العدد الدال على محيطه هو عدد:

a) عادي صحيح	b) غير عشري	c) غير عادي

11- دائرة طول قطرها 2π فإن العدد الدال على محيطها هو عدد

a) غير عادي	b) عادي غير عشري	c) عادي غير صحيح

السؤال الثالث: جد ناتج ما يلي وبيّن طبيعة الناتج:

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1$$

$$B = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$C = \frac{-2}{3} + \left(\frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{5}\right)$$

$$D = \left(\frac{2}{5} \times \frac{-2}{3}\right) \div \left(12 \times \frac{5}{16}\right)$$

$$E = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right)$$

$$F = 1 - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\right)$$

القاسم المشترك الأكبر((GCD))

طريقة1:طريقة القواسم المشتركة

1- نوجد قواسم العدد الاول
2- نوجد قواسم العدد الثاني
3- نوجد القواسم المشتركة للعددين
4- نبحث عن أكبر قاسم مشترك فهو القاسم المشترك الاكبر.

مثال: أوجد القاسم المشترك الأكبر

للعددين $a = 24, b = 18$

نوجد القواسم كما يلي:

24 ÷		
1	=	24
2	=	12
3	=	8
4	=	6

18 ÷		
1	=	18
2	=	9
3	=	6

الحل: قواسم العدد 24 هي: 1,2,3,4,6,8,12,24

قواسم العدد 18 هي: 1،2،3،6،9،18

القواسم المشتركة هي: 1،2،3،6

فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين 24،18 هو 6

أي $GCD(24,18) = 6$

طريقة2:طريقة التحليل الى عوامل أولية

1- نحلل العدد الاول لعوامله الاولية ونكتبه بشكل جداء قوى
2- نحلل لعدد الثاني لعوامله الاولية ونكتبه بشكل جداء قوى
3- نأخذ جداء العوامل المشتركة فقط بأصغر أس فهو القاسم المشترك الاكبر

مثال: أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين

$a = 24, b = 18$

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

الحل: $18 = 2 \times 3^2$

$24 = 2^3 \times 3$

$GCD(24,18) = 2 \times 3$

$GCD(24,18) = 6$

فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و18 هو 6

طريقة3:طريقة الطرح المتتالي

ناتج الطرح	المطروح	المطروح منه
a-b	b	A
أخر ناتج طرح غير معدوم هو القاسم المشترك الأكبر		

مثال: أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين

$a = 24, b = 18$

ناتج الطرح	المطروح	المطروح منه
6	18	24
12	6	18
6	6	12
0	6	6
$GCD(24,18) = 6$		

طريقة4: طريقة اقليدس

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
r	b	a
أخر باقي قسمة غير معدوم هو القاسم المشترك الأكبر		

مثال: أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين

$a = 24, b = 18$

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
6	18	24
0	6	18
$GCD(24,18) = 6$		

يفيد القاسم المشترك الأكبر في عمليات الاختزال

مثال1: اختزل $\frac{18}{24}$ باستخدام قواعد قابلية القسمة

$$\frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{3}{4}$$

مثال2: اختزل الكسر $\frac{357}{204}$ باستخدام GCD

الباقي	مقسوم عليه	المقسوم
153	204	357
51	153	204
0	51	153
$GCD(357,204) = 51$		

$$\frac{357}{204} = \frac{357 \div 51}{204 \div 51} = \frac{7}{4}$$

خواص القاسم المشترك الأكبر GCD:

1. $GCD(a,a)=a$
2. لما b قاسما للعدد a فإن $GCD(a,b)=b$
3. لما a و b أوليان فيما بينهما فإن: $GCD(a,b)=1$
4. إن $GCD(a,b)=GCD(b,a-b)$ لما $a>b$
5. لما k قاسما للعددين a,b
فإن k قاسما لـ $a+b$
و k قاسما لـ $a-b$
و k قاسما لـ $a\times b$

كيفية الحصول على الكسر المختزل للكسر

طريقة أولى: بتقسيم بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما

مثال1 : اختصر الكسر $\frac{24}{36}$

الحل: بما أن $GCD(24,36)=12$

فإن : $\frac{24}{36}=\frac{2\times \cancel{12}}{3\times \cancel{12}}=\frac{2}{3}$

طريقة ثانية: بإجراء اختصارات متتالية

$$\frac{24}{36}=\frac{24\div 2}{36\div 2}=\frac{12\div 2}{18\div 2}=\frac{6\div 3}{9\div 3}=\frac{2}{3}$$

كيف نتعرف عددين أوليين فيما بينهما؟

- **نقول عن عددين إنهما أوليان فيما بينهما إذا كان GCD لهما يساوي العدد /1/**

تمرين1: بيّن أن العددان 39،55 أوليين فيما بينهما

للإثبات: نثبت أن العدد 1 هو قاسم مشترك أكبر لهما

القواسم الطبيعية للعدد 39 هي 1 و 3 و 13 و 39

القواسم الطبيعية للعدد 55 هي 1 و 5 و 11 و 55

القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1، فهذان العددان أوليّان فيما بينهما

تمرين2: بيّن أن العددان 380،175 ليسا أوليين فيما بينهما

في هذه الحالة نحتاج لمثال نفي نلاحظ انهما يقبلان القسمة على العدد 5 فهما ليسا أوليان فيما بينهما

* مثال: أوجد $GCD(12\,,17)$ ⇦ قواسم العدد 12 هي: $1,2,3,4,6,12$

⇦ قواسم العدد 17 هي: $1\,,17$

$GCD(17\,,12)=1$ والعددان عددان أوليان فيما بينهما

تذكر * كل عددين طبيعيين متتاليين هما عددان أوليان فيما بينهما.

* كل عددين أوليين هما عددان أوليان فيما بينهما.

ورقة عمل (3)

السؤال الأول: في كل مما يأتي إجابة واحدة صحيحة أشر إليها:

1- الكسر المختزل للكسر $\frac{363}{231}$ هو:

a) $\frac{33}{21}$	b) $\frac{11}{7}$	c) $\frac{11}{3}$

2- الكسر المختزل للعدد $\frac{117}{63}$ هو:

a) $\frac{13}{9}$	b) $\frac{13}{7}$	c) $\frac{39}{21}$

3- الكسر المختزل للكسر $\frac{35}{133}$ هو:

a) $\frac{25}{45}$	b) $\frac{14}{35}$	c) $\frac{5}{19}$

4- أحد الكسور الآتية هو كسر مختزل:

a) $\frac{25}{45}$	b) $\frac{14}{35}$	c) $\frac{5}{19}$

5- أحد الكسور الآتية كسراً مختزلاً هو:

a) $\frac{11}{31}$	b) $\frac{15}{33}$	c) $\frac{11}{33}$

6- الشكل المختزل للكسر $\frac{153}{324}$ هو:

a) $\frac{51}{105}$	b) $\frac{17}{36}$	c) $\frac{102}{216}$

السؤال الثاني:

1) احسب $GCD\ (80\,,64)$ باستعمال طريقة اقليدس.

2) اكتب الكسر $\frac{80}{64}$ بشكل كسر مختزل.

3) أوجد ناتج $7-\frac{1}{5}+\frac{80}{64}$ وبين هل الناتج عدد صحيح.

السؤال الثالث:

1) جد القاسم المشترك الأكبر للعددين $192\,,32$

2) اختزل الكسر $\frac{32}{192}$

3) جد ناتج $\frac{7}{6}-\frac{32}{192}$ وبين طبيعة الناتج.

بعض الأسئلة والتمارين الداعمة لدرس القواسم المشتركة لعددين صحيحين:

س1: في كل مما يأتي إجابة واحدة صحيحة أشر إليها:

1) القاسم المشترك الأكبر للعددين 63 , 105 هو:

a) $\boxed{21}$	b) 6	c) 3

* لاحظ المطلوب هو أكبر قاسم مشترك.

$\frac{105}{21} = 5 \longrightarrow$ عدد صحيح

$\frac{63}{21} = 3 \longrightarrow$ عدد صحيح

وبالتالي 21 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين.

2- القاسم المشترك الأكبر للعددين 36 , 42 هو:

a) $\boxed{6}$	b) 14	c) 12

* لاحظ أن أكبر قاسم بين الإجابات هو 14 فهو يقسم العدد 42 ولا يقسم 36 اذاً هو ليس القاسم المشترك الأكبر

* والعدد 12 يقسم 36 ولا يقسم 42

* العدد 6 هو القاسم لأنه يقسم كلا العددين.

3- إذا كان b يقسم a فإن $GCD(a,b)$ هو:

a) a,b	b) $\boxed{b}$	c) a

4- القسم المشترك الأكبر للعددين 36 , 72 هو:

a) 1	b) $\boxed{36}$	c) 72

لاحظ أن 36 يقسم 72 وبالتالي:

$$GCD(72\,,36) = 36$$

5- نقول عن عددين (a,b) أنهما أوليان فيما بينهما إذا كان: $GCD(a,b)$ هو

a) b	b) $\boxed{1}$	c) a

6- إذا كان $GCD(a,b) = 1$ نسمي هذان العددان:

a) أوليان	b) غير أوليان	c) $\boxed{\text{أوليان فيما بينهما}}$

7- من بين الأعداد الآتية عدد غير أولي هو:

a) 29	b) 23	c) $\boxed{1}$

8- العدد الأولي من بين الأعداد الآتية هو:

a) $\boxed{101}$	b) 91	c) 85

ورقة عمل (2)

س1: في كل مما يأتي اجابة واحدة صحيحة أشر اليها:

1- القاسم المشترك الأكبر (GCD) للعددين **90 , 120** هو:

a) 15	b) 6	c) 30

2- إذا كان b قاسما للعدد a فإن $GCD(a,b)$ هو

a) 1	b) b	c) a

3- إذا كان a,b أوليان فيما بينهما فإن $GCD(a,b)$ هو

a) 1	b) b	c) a

4- القاسم المشترك الأكبر (GCD) للعددين 70 , 105 هو:

a) 35	b) 5	c) 15

5- القاسم المشترك الأكبر (GCD) للعددين 126 , 252 هو:

a) 126	b) 9	c) 13

6- أحد الأعداد الآتية هو عدد أولي:

a) 29	b) -3	c) 1

7- أصغر عدد أولي هو :

a) 1	b) 2	c) 0

8- القاسم المشترك الأكبر للعددين 35 , 18 هو:

a) 5	b) 7	c) 1

س 2: أجب بصح أو خطأ على كل من القضايا الآتية:

1) العدد 0 هو عدد أولي.

2) العدد 1 هو عدد أولي

3) $GCD(3,3) = 1$.

4) $GCD(a\,,a+1) = 1$ بشرط $a > 0$

5) إذا كان العدد 15 قاسم مشترك أكبر للعددين 45, 60 فإن 15يقسم 105

6) اذا كان $a = 2b$ فإن $GCD(a,b) = a$

تمرين منزلي: جد بطريقتين مختلفتين القاسم المشترك الأكبر للأعداد الآتية:

$GCD\,(512\,,384)$ ، $GCD\,(1056\,,792)$

$GCD\;341\,,165)$ ، $GCD\,(4200\,,1950)$

$GCD\,(1775\,,639)$ ، $GCD\,(891\,,275)$

بعض التمارين والأسئلة الداعمة لدرس الكسور المختزلة:

س1: في كل مما يأتي إجابة واحدة صحيحة أشر إليها:

1) الكسر المختزل للكسر $\frac{105}{70}$ هو:

a) $\boxed{\frac{3}{2}}$	b) $\frac{7}{4}$	c) $\frac{35}{14}$

عندما يرد هكذا تمرين قم بدراسة قابلية القسمة فالكسر المختزل هو كسر بسطه ومقامه أوليان فيما بينهما

فمثلاً $\frac{35}{14}$ كل منهما يقبل القسمة على 7 وبالتالي الكسر غير مختزل.

أما الكسر $\frac{7}{4}$ نلاحظ أن العدد 7 يقسم 105 بينما العدد 4 لا يقسم 70 فالكسر $\frac{7}{4}$ ليس الكسر المختزل لـ $\frac{105}{70}$

فالجواب الصحيح هو a

أو قم بإيجاد GCD وقسم حدي الكسر على GCD لتحصل على الكسر المختزل.

2) أحد الكسور الآتية كسر مختزلاً:

a) $\frac{5}{35}$	b) $\frac{48}{38}$	c) $\boxed{\frac{7}{3}}$

لاحظ الكسر a بسطه ومقامه يقبل القسمة على 5

فهو ليس مختزلاً. والكسر b يقبل بسطه ومقامه القسمة على 2.فالجواب هو c

تمرين (1): ليكن لدينا المقدار: $A = \frac{585}{455} + \frac{5}{7}$

والمطلوب:

1) احسب $GCD(585\,,455)$

2) اكتب الكسر $\frac{585}{455}$ بشكل كسر مختزل

3) اكتب A بأبسط شكل هل A عدد طبيعي

الحل:

المقسوم	المقسوم عليه	الباقي
585	455	130
455	130	$\boxed{65}$
130	65	0

$$GCD(585\,,455) = 65$$

2) نختزل $\frac{585 \div 65}{455 \div 65} = \frac{9}{7}$

3) $A = \frac{9}{7} + \frac{5}{7} = \frac{14}{7} = 2$ وهو عدد طبيعي

تمرين (2): ليكن لدينا المقدار

$$A = \frac{1130}{4520} + 2$$

$$B = \frac{27}{16} - \left(-\frac{7}{8} \times \frac{72}{21}\right) \div \frac{16}{3}$$

1) أوجد $GCD(4520\,,1130)$

2) اختزل A هل الناتج عدد عشري ولماذا؟

3) اختزل B هل الناتج عدد عشري ولماذا؟

4) قارن بين $B\,, A$ ماذا نستنتج؟

الحل: 1)

المقسوم	المقسوم عليه	الباقي
4520	1130	0

$$GCD(4520\,,1130) = 1130$$

2)

$$A = \frac{1130 \div 1130}{4520 \div 1130} + 2$$

$$A = \frac{1}{4} + \frac{2}{1} \Longrightarrow A = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4}$$

(4)

A عدد عشري لأنه يكتب من الشكل $a \times 10^{n}$ حيث $a\,, n$ عددان صحيحان

$$B = \frac{27}{16} - \left(\frac{-\cancel{7} \times \cancel{72}}{\cancel{8} \times \cancel{21}}\right) \div \frac{16}{3}$$

$$B = \frac{27}{16} + (3) \times \frac{3}{16}$$

$$B = \frac{27}{16} + \frac{9}{16} = \frac{36 \div 4}{16 \div 4}$$

$$B = \frac{9}{4}$$

B عدد عشري لأنه يكتب من الشكل $a \times 10^{n}$ حيث $a\,, n$ عددان صحيحان.

4) $A = B$

طلاب اليوم صناع الغد المشرق

تأكد أن بعد كل هذه الغيوم ستشرق شمس النجاح

فقط كن مع الله

الدرس الرابع
الجذر التربيعي لعدد موجب

☺ أفكار الدرس:

① مربعات الأعداد:

$(0)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = 0$

$(1)^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1$

$(2)^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$

$(3)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$

$(4)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$

$(5)^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{25} = 5$

$(6)^2 = 36 \Rightarrow \sqrt{36} = 6$

$(7)^2 = 49 \Rightarrow \sqrt{49} = 7$

$(8)^2 = 64 \Rightarrow \sqrt{64} = 8$

$(9)^2 = 81 \Rightarrow \sqrt{81} = 9$

$(10)^2 = 100 \Rightarrow \sqrt{100} = 10$

$(11)^2 = 121 \Rightarrow \sqrt{121} = 11$

$(12)^2 = 144 \Rightarrow \sqrt{144} = 12$

$(13)^2 = 169 \Rightarrow \sqrt{169} = 13$

$(14)^2 = 196 \Rightarrow \sqrt{196} = 14$

$(15)^2 = 225 \Rightarrow \sqrt{225} = 15$

$(16)^2 = 256 \Rightarrow \sqrt{256} = 16$

$(17)^2 = 289 \Rightarrow \sqrt{289} = 17$

$(18)^2 = 324 \Rightarrow \sqrt{324} = 18$

$(19)^2 = 361 \Rightarrow \sqrt{361} = 19$

$(20)^2 = 400 \Rightarrow \sqrt{400} = 20$

$(21)^2 = 441 \Rightarrow \sqrt{441} = 21$

$(22)^2 = 484 \Rightarrow \sqrt{484} = 22$

$(23)^2 = 529 \Rightarrow \sqrt{529} = 23$

$(24)^2 = 576 \Rightarrow \sqrt{576} = 24$

$(25)^2 = 625 \Rightarrow \sqrt{625} = 25$

② تعريفه:

الجذر التربيعي لعدد موجب a هو عدد مربعه يساوي a

* مثال: $\sqrt{9} = 3$

لأن $3^2 = 9$

③ لكل عدد موجب a جذران

أحدهما $+\sqrt{a}$ والآخر $-\sqrt{a}$

☜ **وتستخدم هذه الخاصية في حل المعادلات**

$\sqrt{36} = \mp 6$

لأن $(+6)^2 = 36$

$(-6)^2 = 36$

④ **العدد السالب ليس له جذر تربيعي:**

⑤ **التربيع يحذف الجذر**

* $(\sqrt{a})^2 = a$
* $\left(\sqrt{a^2}\right) = a$

أمثلة:

* $(\sqrt{5})^2 = 5$
* $\left(\sqrt{9^2}\right) = 9$

⑥ خواص هامة:

* $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
* $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
* $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$
* $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ (هامة)

لا يمكن تفريق الجذور أثناء الجمع والطرح

أمثلة:

1) اكتب كلاً مما يلي بشكل جداء جذرين:

* $\sqrt{10} = \sqrt{2} \times \sqrt{5}$
* $\sqrt{15} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$
* $\sqrt{35} = \sqrt{5} \times \sqrt{7}$
* $\sqrt{14} = \sqrt{2} \times \sqrt{7}$

2) أوجد ناتج ما يلي:

* $\sqrt{5}\times\sqrt{6} = \sqrt{5\times 6} = \sqrt{30}$
* $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7} = \sqrt{2\times 3\times 7} = \sqrt{42}$
* $\sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}} = \frac{7}{6}$
* $\sqrt{\frac{3\div 3}{12\div 3}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
* $\sqrt{\frac{8}{32}} = \sqrt{\frac{8\div 8}{32\div 8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
* $\sqrt{400-256} = \sqrt{144} = 12$
* $(\sqrt{3})^2 = \sqrt{3^2} = 3$
* $\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 5$

⑦ العمليات على الجذور:

1) الجمع والطرح

$$\underbrace{a}_{\text{دليل الجذر}}\sqrt{b} + \underbrace{c}_{\text{دليل الجذر}}\sqrt{b}$$

لجمع جذرين نجمع الدليل مع الدليل وما تحت الجذر يبقى.

* يجب أن يكون ما تحت الجذر العدد نفسه.
* العدد الذي ليس له دليل دليله العدد /1/

أمثلة:

* $2\sqrt{3}+3\sqrt{3} = (2+3)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
* $7\sqrt{2}-5\sqrt{2} = (7-5)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
* $3\sqrt{3}-\sqrt{3} = (3-1)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
* $-5\sqrt{2}+3\sqrt{2} = (-5+3)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$
* $-2\sqrt{3}+\sqrt{7}-2\sqrt{3}+4\sqrt{7} =$

$= (-2-2)\sqrt{3}+(1+4)\sqrt{7}$

$= -4\sqrt{3}+5\sqrt{7}$

لا يمكن جمع $\sqrt{7}$ مع $\sqrt{3}$ لأن العددان تحت الجذر مختلفان.

* $-2\sqrt{5}+\sqrt{11}+2\sqrt{5}-3\sqrt{11}$

$= -2\sqrt{5}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}-3\sqrt{11}$

$= 0+\sqrt{11}-3\sqrt{11} = -2\sqrt{11}$

2) الضرب:

$$a\sqrt{b}\times c\sqrt{d} = (a\times c)\sqrt{b\times d}$$

لضرب جذرين نضرب الدليل مع الدليل وما تحت الجذر بما تحت الجذر

تذكر: $\boxed{\sqrt{a}\times\sqrt{a} = a}$

أمثلة:

* $2\sqrt{5}\times 3\sqrt{3} = (2\times 3)\sqrt{5\times 3} = 6\sqrt{15}$
* $-2\sqrt{7}\times 3\sqrt{5} = (-2\times 3)\sqrt{7\times 5}$

$= -6\sqrt{35}$

* $-5\sqrt{6}\times\sqrt{6} = (-5\times 1)\sqrt{6\times 6}$

$= -5\times 6 = -30$

* $2\sqrt{7}\times 2\sqrt{7} = (2\times 2)\sqrt{7\times 7} = 4\times 7$

$= 28$

* $2\sqrt{3}\times\sqrt{12} = (2\times 1)\sqrt{3\times 12}$

$= 2\times\sqrt{36} = 2\times 6 = 12$

* $-5\sqrt{3}\times -2\sqrt{2} = (-5\times -2)\sqrt{3\times 2}$

$= 10\sqrt{6}$

⑧ تربيع الجذور:

تذكر: مربع أي عدد سالب هو عدد موجب.

لتربيع جذر نربع الدليل ثم نربع الجذر

تذكر: التربيع يحذف الجذر.

$$(a\sqrt{b})^2 = (a)^2\times(\sqrt{b})^2 = a^2.b$$

أمثلة:

* $(2\sqrt{3})^2 = (2)^2\times(\sqrt{3})^2$

$= 4\times 3 = 12$

* $(-2\sqrt{5})^2 = (-2)^2\times(\sqrt{5})^2$

$= 4\times 5 = 20$

⑨ **جذر القوة الزوجية:** إذا كان a عدداً عادياً موجباً و $n > 0$ عدداً زوجياً.

$$\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$$

$$(\sqrt{a})^n = a^{\frac{n}{2}}$$

أمثلة:

$$\sqrt{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2$$

$$(\sqrt{7})^8 = 7^{\frac{8}{2}} = 7^4$$

⑩ كتابة عدد $\sqrt{c}$ بشكل $a\sqrt{b}$ لكتابة عدد $\sqrt{c}$ بشكل $a\sqrt{b}$ يجب أن نبحث عن عددين جداءهما يساوي c وأحدهما له جذر تربيعي.

$$\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = \sqrt{4}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{3}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{20} = \sqrt{4\times 5} = \sqrt{4}\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$
$$\sqrt{24} = \sqrt{4\times 6} = \sqrt{4}\times\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$
$$\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = \sqrt{9}\times\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$
$$\sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = \sqrt{16}\times\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$
$$\sqrt{48} = \sqrt{16\times 3} = \sqrt{16}\times\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = \sqrt{25}\times\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$
$$\sqrt{52} = \sqrt{4\times 13} = \sqrt{4}\times\sqrt{13} = 2\sqrt{13}$$
$$\sqrt{63} = \sqrt{9\times 7} = \sqrt{9}\times\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$
$$\sqrt{72} = \sqrt{36\times 2} = \sqrt{36}\times\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$
$$\sqrt{75} = \sqrt{25\times 3} = \sqrt{25}\times\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$
$$\sqrt{80} = \sqrt{16\times 5} = \sqrt{16}\times\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$
$$\sqrt{96} = \sqrt{16\times 6} = \sqrt{16}\times\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$
$$\sqrt{108} = \sqrt{36\times 3} = \sqrt{36}\times\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$
$$\sqrt{112} = \sqrt{16\times 7} = \sqrt{16}\times\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$
$$\sqrt{125} = \sqrt{25\times 5} = \sqrt{25}\times\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$
$$\sqrt{150} = \sqrt{25\times 6} = \sqrt{25}\times\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$
$$\sqrt{180} = \sqrt{36\times 5} = \sqrt{36}\times\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

11 كتابة عدد $a\sqrt{b}$ بشكل $\sqrt{c}$

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2\times b}$$

احفظها هكذا: أنا عدد لا ادخل إلى الجذر بدون تربيع

مثال: اكتب الأعداد الآتية بصيغة $\sqrt{c}$

* $2\sqrt{7} = \sqrt{2^2\times 7} = \sqrt{4\times 7} = \sqrt{28}$
* $2\sqrt{6} = \sqrt{2^2\times 6} = \sqrt{4\times 6} = \sqrt{24}$
* $6\sqrt{2} = \sqrt{6^2\times 2} = \sqrt{36\times 2} = \sqrt{72}$
* $5\sqrt{6} = \sqrt{5^2\times 6} = \sqrt{25\times 6} = \sqrt{150}$
* $3\sqrt{6} = \sqrt{3^2\times 6} = \sqrt{9\times 6} = \sqrt{54}$
* $7\sqrt{2} = \sqrt{7^2\times 2} = \sqrt{49\times 2} = \sqrt{98}$

12 نشر الجذور

تذكر:

$$a(b+c) = a\times b + a\times c$$

$$a(b-c) = a\times b - a\times c$$

أمثلة:

* $\sqrt{5}(2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{5} - \sqrt{15}$
* $\sqrt{7}(\sqrt{3}-\sqrt{7}) = \sqrt{21} - 7$
* $\sqrt{5}(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{10} - \sqrt{15}$

تذكر: جداء ذي حدين بمثله

$$(a+b)(c-d) = a(c-d) + b(c-d)$$

* $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{7})$

$= \sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{7}) + \sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{7})$

$= \sqrt{15} - \sqrt{35} + \sqrt{6} - \sqrt{14}$

س: أثبت أن ناتج المقدار عدد صحيح

$A = (\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})$

الحل : $A = \sqrt{7}(\sqrt{7}+\sqrt{3}) - \sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{3})$

$A = 7 + \sqrt{21} - \sqrt{21} - 3$

$A = 7 - 3$

$A = 4$ عدد صحيح

✎ س: أثبت أن ناتج المقدار N هو عدد صحيح

$N = (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

$N = \sqrt{5}(\sqrt{5}-2)+2(\sqrt{5}-2)$

$N = 5-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-4$

$N = 5-4 = 1$ عدد صحيح

13 إزالة الجذر من المقام:

لإزالة جذر من المقام نضرب حدي الكسر بجذر المقام.

$$\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

14 تحليل الجذور

تفيد خاصية تحليل الجذور في كتابة عدد بأبسط صورة.

تذكر مفاتيح الحل للجذور

$\{2,3,5,6,7,10,11,13\}$

✎ **أمثلة:** اكتب المقادير الآتية في أبسط صورة

* $A = \sqrt{48}-\sqrt{27}+\sqrt{3}$

⇦ مفتاح الحل هو /3/

$A = \sqrt{16\times 3}-\sqrt{9\times 3}+\sqrt{3}$

$A = \sqrt{16}\times\sqrt{3}-\sqrt{9}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$A = 4\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$A = (4-3+1)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

* $B = \sqrt{24}-2\sqrt{54}+\sqrt{6}$

$B = \sqrt{4\times 6}-2\sqrt{9\times 6}+\sqrt{6}$

$B = \sqrt{4}\times\sqrt{6}-2\sqrt{9}\times\sqrt{6}+\sqrt{6}$

$B = 2\sqrt{6}-2\times 3\sqrt{6}+\sqrt{6}$

$B = 2\sqrt{6}-6\sqrt{6}+\sqrt{6} = -3\sqrt{6}$

* $C = 2\sqrt{7}-\sqrt{63}+2\sqrt{28}$

$C = 2\sqrt{7}-\sqrt{9\times 7}+2\times\sqrt{4\times 7}$

$C = 2\sqrt{7}-\sqrt{9}\times\sqrt{7}+2\times\sqrt{4}\times\sqrt{7}$

$C = 2\sqrt{7}-3\sqrt{7}+4\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

* $D = \sqrt{18}-\sqrt{20}-2\sqrt{50}+3\sqrt{45}$

$D = \sqrt{9\times 2}-\sqrt{4\times 5}-2\sqrt{25\times 2}+3\sqrt{9\times 5}$

$D = \sqrt{9}\times\sqrt{2}-\sqrt{4}\times\sqrt{5}-2\sqrt{25}\times\sqrt{2}+3\sqrt{9}\times\sqrt{5}$

$D = 3\sqrt{2}-2\sqrt{5}-10\sqrt{2}+9\sqrt{5}$

$D = -7\sqrt{2}+7\sqrt{5}$

* $E = -4\sqrt{48}+\sqrt{8}+\sqrt{27}-\sqrt{18}$

$E = -4\sqrt{16\times 3}+\sqrt{4\times 2}+\sqrt{9\times 3}-\sqrt{9\times 2}$

$E = -4\sqrt{16}\times\sqrt{3}+\sqrt{4}\times\sqrt{2}+\sqrt{9}\times\sqrt{3}-\sqrt{9\times 2}$

$E = -16\sqrt{3}+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

$E = -13\sqrt{3}-\sqrt{2}$

* $F = -\sqrt{50}-3\sqrt{12}+5\sqrt{2}+\sqrt{108}$

$F = -\sqrt{25\times 2}-3\sqrt{4\times 3}+5\sqrt{2}+\sqrt{36\times 3}$

$F = -\sqrt{25}\times\sqrt{2}-3\sqrt{4}\times\sqrt{3}+5\sqrt{2}+\sqrt{36}\times\sqrt{3}$

$F = -5\sqrt{2}-6\sqrt{3}+5\sqrt{2}+6\sqrt{3}$

$F = 0$

بعض التمارين والأسئلة الداعمة للوحدة الأولى جبر

س: في كل مما يأتي إجابة واحدة صحيحة أشر إليها:

1- الشكل العشري للعدد $\frac{25}{16}\times\frac{4}{5}$ هو:

a) $\boxed{1.25}$	b) 0.25	c) 0.1

توضيح الإجابة:

$$\frac{25}{16}\times\frac{4}{5} = \frac{\cancel{25}^{5}\times\cancel{4}}{{}_{4}\cancel{16}\times\cancel{5}} = \frac{5\times 25}{4\times 25} = \frac{125}{100} = 1.25$$

2- ناتج المقدار $\sqrt{2^4\times 3^4\times 5^2}$ هو عدد:

a) $\boxed{\text{صحيح}}$	b) عادي غير صحيح	c) غير عادي

توضيح الإجابة:

$$\sqrt{2^4\times 3^4\times 5^2} = \sqrt{2^{2^2}}\times\sqrt{3^{2^2}}\times\sqrt{5^2}$$

$$= 2^2\times 3^2\times 5 = 4\times 9\times 5 = 180$$

عدد صحيح

3- إذا كان $a = \frac{1}{3}b$ فإن $GCD(a,b)$ هو:

a) $\frac{1}{3}$	b) b	c) $\boxed{a}$

توضيح الإجابة:

$a = \frac{1}{3}b$

ومنه b مضاعف للعدد a أي a يقسم b ومنه:

$GCD(b,a) = a$

4- العدد 3.14 هو عدد:

a) عادي صحيح	b) غير عادي	c) $\boxed{\text{عادي عشري}}$

5- ثلاثة أمثال $\sqrt{18}$ هو:

a) $9\sqrt{3}$	b) $\boxed{9\sqrt{2}}$	c) $6\sqrt{2}$

توضيح الإجابة:

ثلاثة أمثال $\sqrt{18}$ هو

$$3\times\sqrt{18} = 3\sqrt{9\times 2}$$
$$= 3\times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

6- ستة أمثال العدد $\frac{5}{3\sqrt{2}}$ يساوي:

a) $10\sqrt{2}$	b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$	c) $\boxed{5\sqrt{2}}$

$$6\times\frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{30}{3\sqrt{2}} = \frac{10\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

7- أبسط صورة للكسر $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ هي:

a) 6	b) $\boxed{2\sqrt{6}}$	c) $\sqrt{6}$

توضيح الإجابة:

$$\frac{6\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$$

8- إن المقدار $\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}$ هو:

a) 4	b) $\boxed{3}$	c) 2

☺ في مثل هكذا تمرين نبدأ من الجذر الأدنى أي من $\sqrt{4}$

$$= \sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{7+2}}}$$
$$= \sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{9}}}$$
$$= \sqrt{5+\sqrt{13+3}} = \sqrt{5+\sqrt{16}}$$
$$= \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

9- الكسر المختزل فيما يأتي هو:

a) $\boxed{\frac{17}{35}}$	b) $\frac{18}{27}$	c) $\frac{13}{26}$

10- قرص دائري نصف قطره $\frac{1}{3\pi}$ فإن العدد الدال على محيطه هو عدد:

a) غير عادي	b) $\boxed{\text{غير عشري}}$	c) عادي عشري

☜ **تذكر:** محيط الدائرة $P = 2\pi r$

$$P = 2\pi \times r$$
$$P = 2\pi\times\frac{1}{3\pi} = \frac{2}{3}$$

والناتج عدد غير عشري.

فكرة: كيف نحصر جذرين عددين صحيحين متتاليين

1- نكتب العدد بصيغة $\sqrt{c}$

2- نبحث عن عدد أكبر من c له جذر صحيح وليكن a و أصغر من c له جذر صحيح وليكن b

3- نكتب $\sqrt{b} < \sqrt{c} < \sqrt{a}$

احصر العدد $2\sqrt{7}$ بين عددين صحيحين متتاليين

نكتب $2\sqrt{7}$ بشكل $\sqrt{c}$

$$2\sqrt{7} = \sqrt{4\times 7} = \sqrt{28}$$

العدد الذي أصغر من 28 وله جذر هو 25

العدد الذي أكبر من 28 وله جذر هو 36

$$\sqrt{25} < \sqrt{28} < \sqrt{36}$$
$$5 < 2\sqrt{7} < 6$$

احصر العدد $3\sqrt{6}$ بين عددين صحيحين متتاليين

$$3\sqrt{6} = \sqrt{9\times 6} = \sqrt{54}$$
$$\sqrt{49} < \sqrt{54} < \sqrt{64}$$
$$7 < 3\sqrt{6} < 8$$

{دمج الجبر مع الهندسة ☺}

☜ **تذكر:** محيط أي شكل هندسي يساوي مجموع أطوال أضلاعه

مساحات بعض الأشكال الهندسية:

مساحة المثلث $= \dfrac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$

مساحة المثلث القائم $= \dfrac{\text{جداء الضلعين القائمتين}}{2}$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

مساحة المربع $= (\text{طول الضلع})^2$

محيط المربع = طول الضلع × 4

مساحة المثلث المتساوي الأضلاع:

طول الضلع $= a$ وَ $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

مساحة المعين $= \dfrac{\text{جداء قطريه}}{2}$

🔔 **أفكار هندسية**

* حتى يكون المثلث مثلث متساوي أضلاع يجب أن تكون أضلاعه الثلاث متساوية:

مثال: ABC مثلث فيه

$AC = \sqrt{48} - \sqrt{3}, BC = \sqrt{108} - \sqrt{27}, AB = 3\sqrt{3}$

1) أثبت أن ABC مثلث متساوي الأضلاع

2) احسب محيط المثلث

الحل:

$AB = \boxed{3\sqrt{3}}$

$BC = 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \boxed{3\sqrt{3}}$

$AC = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = \boxed{3\sqrt{3}}$

ومنه $AB = BC = AC = 3\sqrt{3}$

فالمثلث متساوي الأضلاع لتساوي أطوال أضلاعه

2) $P = AB + BC + AC$

$P = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

**إذا تساوت طولا ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع كان معين.

مثال1: $ABCD$ متوازي أضلاع منه

$BC = \sqrt{98} - \sqrt{72}, AB = \sqrt{50} - \sqrt{32}$

1- اكتب كلاً من AB , BC بصيغة $a\sqrt{2}$

2- أثبت أن $ABCD$ معين واحسب محيطه

الحل: 1) $AB = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}}$

$BC = 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}}$

2) $BC = AB = \boxed{\sqrt{2}}$ تساوى طولا ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع فهو معين

محيط المعيَن = طول الضلع ×4

$P = 4 \times AB = 4 \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

....

مثال2: ABCD مربع طول ضلعه: $AB = \sqrt{20} + 1$

EFGH مستطيل بعداه : $FG = \sqrt{5} + 3$

$FE = \sqrt{45} - 1$

أثبت أن محيطي الشكلين متساويين

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ورقة عمل (4)

أولاً: السؤال الأول:

في كل مما يأتي إجابة واحدة صحيحة أشر إليها:

1) العدد $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ هو عدد:

a) غير عادي	b) غير صحيح	c) صحيح

2) العدد $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}$ يساوي:

$2\sqrt{3}$ (a	2 (b	$\sqrt{3}$ (c

3) العدد $\left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^4$ هو:

$\sqrt{5}$ (a	25 (b	5 (c

4) مثلا $\sqrt{12}$ هو:

$2\sqrt{3}$ (a	$2\sqrt{6}$ (b	$4\sqrt{3}$ (c

5) العدد $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$ هو عدد:

a) غير عادي	b) عشري	c) صحيح غير عشري

6) إن قيمة العدد $A = \sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{9}}}$ يساوي:

$A = 2$ (a	$A = 3$ (b	$A = 4$ (c

7) العدد $\frac{\sqrt{27}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ هو عدد:

a) غير عادي	b) عادي غير صحيح	c) صحيح

8) العدد $\sqrt{75}-\sqrt{48}$ يساوي:

$3\sqrt{3}$ (a	$\sqrt{3}$ (b	$2\sqrt{3}$ (c

9) العدد $\sqrt{11^2 \times 7^4}$ يساوي:

11×7^2 (a	$\sqrt{11 \times 7^2}$ (b	$(11 \times 7)^2$ (c

السؤال الثاني:

أجيب بكلمة صح أو خطأ على الادعاءات الآتية:

1) إن العدد $\sqrt{9+16}$ يساوي $\sqrt{9}+\sqrt{16}$

2) ثلاثة أمثال العدد $\sqrt{18}$ يساوي $9\sqrt{2}$

3) العدد $\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 5^2$ هو عدد صحيح.

4) إن العدد $\sqrt{0.01}$ هو 0.1

5) إن قيمة المقدار $A = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\right)$ هو -4

ثانياً: حل التمارين الآتية:

التمرين الأول: $ABCD$ متوازي أضلاع فيه:

$AB = \sqrt{125} + \sqrt{112}\ cm$

$BC = \sqrt{45} - \sqrt{28} + 6\sqrt{7} + 2\sqrt{5}$

1) AB , BC بصيغة $a\sqrt{7} + b\sqrt{5}$

2) احسب محيط الشكل $ABCD$

الحل: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

التمرين الثاني: لتكن العبارتان: $A = 3\sqrt{3} + \sqrt{75}$

$B = 2\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{48}$

1) اكتب A , B بصيغة $a\sqrt{3}$

2) جد ناتج كل مما يلي:

$(A + B)(A - B)\ ,(A - B)\ ,(A + B)$

الحل : ....

التمرين الثالث:

ABCD مستطيل طول كل من بعديه:

$BC = \sqrt{108}\ , AB = \sqrt{48} + \sqrt{12}$ المطلوب:

1) اكتب كل من AB , BC بصيغة $a\sqrt{3}$

2) أثبت أن $ABCD$ مربع

3) جد طول AC وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه واحسب نصف قطرها.

الحل : ....

انتهت الوحدة الاولى

الدرس الأول: قوة عدد عادي

☺ أفكار الدرس الأول:

① تقرأ القوة بالشكل (a أس n) أو (قوة العدد a بالأس n)

أس

a^n قوة

أس

تعريف: $a^n = 1\times \underbrace{a\times a\times a\times a\times \dots\dots}_{n\ \text{مرة}}$

نتائج التعريف	
$a^1 = a$	**مثال:** $8^1 = 8$
$a^0 = 1$	**مثال:** $\left(\frac{-2}{3}\right)^0 = 1$
$0^n = 0$ **بشرط** $n \neq 0$	**مثال:** $(0)^{65} = 0$
$1^n = 1$	**مثال:** $(1)^{654} = 1$
$(a)^{-n} = \frac{1}{a^n}$	**مثال** $(2)^{-7} = \frac{1}{(2)^7}$

خواص القوى:

الأساس مشترك	
$a^n \times a^m = a^{n+m}$ ضرب قوتين للأساس ذاته نجمع الاسس	$5^3\times 5^4 = 5^{3+4}$ $= 5^7$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ قسمة قوتين للأساس ذاته نطرح الاسس	$\frac{3^4}{3^{-2}} = 3^{4-(-2)}$ $= 3^6$
$(a^n)^m = a^{n\times m}$ قوة مرفوعة لقوة أخرى نضرب الاسس	$(7^2)^4 = (7)^{2\times 4}$ $= (7)^8$

الأس مشترك	
$(a\times b)^n = a^n \times b^n$ قوة جداء = جداء القوى	$(2\times 5)^2 = (2)^2\times(5)^2$ $= 4\times 25 = \boxed{100}$ $(2\times 5)^2 = 4\times 25 = \boxed{100}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ قوة كسر = $\frac{\text{قوةالبسط}}{\text{قوةالمقام}}$	$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4}$

تمرين1: ليكن المقدار: $M = 2\times 3^4 + 9^2$

والمطلوب:

أكتب المقدار M على شكل قوة اساسها عدد طبيعي.

الحل: (1

$$M = 2\times 3^4 + 9^2$$
$$M = 2\times 3^4 + 3^4$$
$$M = 3^4(2+1)$$
$$M = 3^4(3)$$
$$M = \boxed{3^5}$$

تمرين2: أوجد نصف العدد $G = 4^{50}$.

الحل: نصف العدد $G = 4^{50}$ هو $G = \frac{1}{2}\times 4^{50}$

$$G = \frac{4^{50}}{2} = \frac{(2^2)^{50}}{2} = \frac{2^{100}}{2} = 2^{99}$$

....

تمرين3: احسب ما يلي: $A = \frac{2^8\times 3^2\times 5^7}{2^3\times(15)^2}$

الحل:

$$A = \frac{2^8\times 3^2\times 5^7}{2^3\times(3\times 5)^2}$$
$$= \frac{2^8\times \cancel{3^2}\times 5^7}{2^3\times \cancel{3^2}\times 5^2}$$
$$= 2^{8-3}\times 5^{7-2}$$
$$= 2^5\times 5^5$$
$$= (2\times 5)^5 = 10^5$$

ومنه $A = 100000$

تمرين4: بيّن أن B عدد صحيح:

$$B=\frac{-2\times10^{-3}\times25\times\left(10^{2}\right)^{2}}{50\times10^{5}\times(-0.1)\times10^{-3}}$$

الحل:

$$B=\frac{-2\times10^{-3}\times25\times10^{4}}{50\times10^{5}\times(-10)^{-1}\times10^{-3}}$$

$$B=\frac{-50\times10}{-50\times10}=\boxed{1}$$

وهو عدد صحيح

تمرين5: ليكن المقدارين:

$$A=\frac{16\times10^{-2}\times12}{\left(10^{3}\right)^{2}\times48\times10^{-8}} \quad ، \quad B=\frac{7^{8}\times(25)^{2}\times10^{3}}{2^{2}\times(35)^{7}}$$

1) احسب المقدار A.

2) أثبت أن $B=14$.

3) احسب $\frac{B}{A}$ واكتبه بالصيغة العشرية.

الحل:1)

$$A=\frac{16\times10^{-2}\times12}{\left(10^{3}\right)^{2}\times48\times10^{-8}}$$

$$A=\frac{\cancel{16}\times10^{-2}\times\overset{4}{\cancel{12}}}{(10)^{6}\times\cancel{16}\times\underset{1}{\cancel{3}}\times10^{-8}}$$

$$A=\frac{10^{-2}\times4}{10^{-2}}=4$$

2).

$$B=\frac{7^{8}\times(25)^{2}\times10^{3}}{2^{2}\times(35)^{7}}$$

$$B=\frac{7^{8}\times\left(5^{2}\right)^{2}\times(2\times5)^{3}}{2^{2}\times(7\times5)^{7}}$$

$$B=\frac{7^{8}\times5^{4}\times2^{3}\times5^{3}}{2^{2}\times7^{7}\times5^{7}}$$

$$B=7\times2=14$$

3). $\frac{B}{A}=\frac{14}{4}$ ومنه $\frac{B}{A}=\frac{7}{2}=3.5$

العدد 3.5 عشري يحوي فاصلة يمينها أرقام منتهية

وصيغته العشرية هي: $3.5=35\times10^{-1}$

③ **كتابة عدد بشكل قوة للعدد 10**

* أياً كان العدد الطبيعي n.

$$10^{n}=10\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0\ (n\ \text{صفرا})$$

حيث (n = عدد الأصفار)

$$10^{n}=1\underbrace{00000.....000}_{n\text{صفر}}$$

أمثلة:

$$*\ \underbrace{1000}_{n=3}=10^{3}$$

$$*\ 100=10^{2}$$

$$*\ 1000000=10^{6}$$

$$*\ 1000000000=10^{9}$$

* أياً كان العدد الصحيح n

$$10^{-n}=\underbrace{0.000.......00}_{n\text{صفر}}1\ (n\ \text{عدد الأصفار})$$

أمثلة:

$$*\ \underbrace{0,0}_{n=2}1=10^{-2}$$

$$*\ 0,001=10^{-3}$$

$$*\ 0,000001=10^{-6}$$

$$\left((2)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=2^{2}=4$$

$$\left(\left(\sqrt{5}\right)^{2}\right)^{3}=\sqrt{5}^{3\times2}=\sqrt{5}^{6}=5^{3}$$

بعض الامور الهامة هامة في القوى يتوجب حفظها:

① مفاتيح القوى: (2,3,5,7,10,11,13)

② $4=2^{2}$

$8=2^{3}$

$9=3^{2}$

$27=3^{3}$

$25=5^{2}$

$125=5^{3}$

③ $(21)^{3}=(7\times3)^{3}=7^{3}\times3^{3}$

✓أسئلة امتحانية (ترد عن درس القوى)

* في كل مما يأتي إجابة واحدة صحيحة أشر إليها:

1) العدد $\left(\sqrt{5}^{-3}\right)^{2}$ هو عدد:

A	غير عادي	B	$\boxed{\text{عادي}}$	C	صحيح

التوضيح:

$$\left(\sqrt{5}^{-3}\right)^{2}=\left(\sqrt{5}\right)^{-6}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^{6}}=\frac{1}{5^{3}}=\frac{1}{125}$$

2) ثلث العدد 3^4 هو:

A	$\frac{3}{9}$	B	$\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$	C	$\boxed{3^3}$

التوضيح:

$$\frac{1}{3}\times 3^{4}=\frac{3^{4}}{3^{1}}=3^{4-1}=3^{3}$$

3) ربع العدد 8^5 هو:

A	2^{15}	B	2^{8}	C	$\boxed{2^{13}}$

توضيح:

$$\frac{1}{4}\times 8^{5}=\frac{8^{5}}{4^{1}}=\frac{(2^{3})^{5}}{2^{2}}=\frac{2^{15}}{2^{2}}$$

$$=2^{15-2}=2^{13}$$

لاحظنا في التمرين أن الأسس والأساسات غير متفقة ولكننا نعلم أن:

$8=2\times2\times2=2^3$ كذلك $4=2\times2=2^2$

4) ثلث العدد 9^3 هو:

A	3^4	B	9	C	$\boxed{3^5}$

التوضيح:

$$\frac{1}{3}\times 9^{3}=\frac{9^{3}}{3}=\frac{(3^{2})^{3}}{3}=\frac{3^{6}}{3^{1}}=3^{6-1}=3^{5}$$

5) قيمة المقدار $\frac{2^3}{4^3}$ يساوي:

A	$\frac{1}{16}$	B	$\boxed{\frac{1}{8}}$	C	$\frac{1}{2}$

التوضيح:

$$\frac{2^{3}}{4^{3}}=\left(\frac{2}{4}\right)^{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1^{3}}{2^{3}}=\frac{1}{8}$$

6) قيمة المقدار $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$ يساوي:

A	$\boxed{3}$	B	$2\sqrt{3}$	C	$\frac{1}{3}$

توضيح:

نوزع القوى $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}=\frac{1^{-2}}{\left(\sqrt{3}\right)^{-2}}$

نقلب القوة لنجعلها موجبة

$$\frac{\sqrt{3}^{2}}{1^{2}}=\frac{3}{1}=3$$

7) ناتج المقدار $\frac{1}{4}\times 2^5$ هو:

A	$\boxed{8}$	B	1	C	16

التوضيح:

$$\frac{2^{5}}{4}=\frac{2^{5}}{2^{2}}=2^{5-2}=2^{3}=8$$

8) العدد 3^9+3^7 يكتب بالصيغة:

A	6^{16}	B	3^{16}	C	$\boxed{10\times 3^{7}}$

توضيح: 👌 انتبه !! هنا العملية جمع وليس ضرب نخرج 3^7 عامل مشترك.

$$=3^{7}(3^{9-7}+3^{7-7})$$
$$=3^{7}(3^{2}+3^{0})$$
$$=3^{7}(9+1)$$
$$=3^{7}\times 10$$

9) إذا كان $3^n=9^4$ فإن قيمة n تساوي :

A	6	B	$\boxed{8}$	C	4

التوضيح:

$$3^{n}=(3^{2})^{4}$$
$$3^{n}=3^{8}$$

ومنه $n=8$

10) قيمة المقدار: $3^5+3^5+3^5$ هو:

9^5	C	$\boxed{3^6}$	B	3^{15}	A

فكرة: $\underbrace{2+2+2}_{\text{3 مرات}} = 3\times 2$ أو(كما ورد في 8)

$$3^5+3^5+3^5 = 3\times 3^5 = 3^{1+5} = 3^6$$

تمرين (1): 1- احسب العدد: $T=\frac{2^9\times5^8\times7^3}{2^4\times35^3}$

-2 اكتب: $l=\frac{4^5\times(3^3\times5^2)^3}{2^4\times5^{-3}}$

بالشكل: $L=2^a\times3^b\times5^c$

الحل:

$$T=\frac{2^9\times5^8\times7^3}{2^4\times5^3\times7^3}$$

$$T=2^{9-4}\times5^{8-3}$$

$$T=2^5\times5^5$$

$$T=(2\times5)^5=10^5=100000$$

-2

$$L=\frac{(2^2)^5\times(3^3)^3\times(5^2)^3}{2^4\times5^{-3}}$$

$$L=\frac{2^{10}\times3^9\times5^6}{2^4\times5^{-3}}$$

$$L=2^{10-4}\times3^9\times5^{6+3}$$

$$L=2^6\times3^9\times5^9$$

تمرين (2): أوجد قيمة المقدار:

$$A=\frac{3^5\times10^4\times25^3}{15^5\times0.00001\times10^7}$$

الحل:

$$A=\frac{3^5\times10^4\times(5^2)^3}{(3\times5)^5\times10^{-5}\times10^7}$$

$$A=\frac{3^5\times10^4\times5^6}{3^5\times10^2\times5^5}$$

$$A=3^0\times10^{4-2}\times5^{6-5}$$

$$A=5\times10^2=500$$

ورقة عمل (5)

السؤال الأول: في كل مما يلي أجب بكلمة صح أو خطأ:

1) العدد 5^{-2} هو عدد عشري.

2) قيمة A حيث $A=\frac{2^3\times5^2\times7}{2^2\times5\times7}$ هي 70

3) قيمة العدد $\left(\sqrt{3}\right)^{-4}$ تساوي 9

4) إذا كان العدد $A=\frac{2^3\times3}{8\times3^{-2}}$ والعدد $B=3^3$
فإن $A=B$

السؤال الثاني: في كل مما يأتي إجابة واحدة صحيحة أشر إليها:

1) $(2^{-2})^2$ هو عدد:

صحيح	C	غير عادي	B	عادي غير صحيح	A

2) المقدار $A=3^{-3}+3^{-3}+3^{-3}$ هو:

3^{-4}	C	3^{-2}	B	3^4	A

3) إن قيمة العدد $A=\frac{3^2\times5^2\times7^4}{15^2\times7^2}$

49	C	7	B	$\frac{1}{7}$	A

4) إن قيمة العدد $A=\frac{6^4\times7^2\times5^3}{(35)^2\times4^2\times3^3}$

15	C	$\frac{3}{5}$	B	$\frac{5}{3}$	A

5) العدد 0.00003 يكتب بالصيغة:

3×10^3	C	3×10^{-5}	B	3×10^5	A

السؤال الثالث: ليكن لدينا العددان:

$$B=\frac{5\times(5^{-2})^{-3}}{5^5},\ A=\frac{2^7\times5^3\times7^4}{2^4\times35^3}$$

1) احسب المقدار A.

2) أثبت أن B عدد طبيعي.

الحل:

التراكيب والعبارات الجبرية (تأسيس)

المتغير: هو رمز جبري يدل على عدد غير ثابت. مثل: $x, y, z, m, n, ...$.

التركيب الجبري (العبارة الجبرية): هي صيغة لغوية تتضمن أعداد ورموز جبرية .

مثل: $8m+3n-9,\ \sqrt{2}x,\ 7-\frac{y}{8+z},\ 2x-3y^2$.

التعويض: هو عملية استبدال الاعداد بالرموز

القيمة العددية للعبارة الجبرية: هي ناتج العمليات الحسابية بعد اجراء عملية التعويض.

مثال: أوجد القيمة العددية للعبارة الجبرية

$A=7-\frac{y}{8+z}$ من اجل $z=-3$, $y=80$.

الحل: بالتعويض نجد: $A=7-\frac{80}{8+(-3)}$

ومنه $A=7-\frac{80}{5}$

ومنه $A=7-16=-9$

الحد الجبري: هو تركيب جبري يمثل جداء أعداد ومتغيرات.

مثل: ..... , $\sqrt{2}x$, $8z$, $-3xy^2$, $\frac{-2}{5}x$.

الحد العددي: هو الحد الذي يحوي متغيّر مرفوع للأس صفر مثل: $-3x^0=-3\times1=-3$

يتألف الحد الجبري من قسمين هما:

1. معامل عددي (الأمثال)
2. قسم حرفي (المتغيّرات)

الحدان الجبريان المتشابهان: هما حدان جبريان لهما القسم الحرفي ذاته.

مثل: الحد $-3xy^2$ يشابه $5\sqrt{7}xy^2$.

بينما الحد $-3xy^2$ لا يشابه $-3xy$.

الحدان الجبريان المتعاكسان: هما حدان جبريان متشابهان معاملاهما العدديان عددان متعاكسان.

مثل: الحد $-3xy^2$ معاكسه $+3xy^2$.

مثل: الحد $9\pi x$ معاكسه $-9\pi x$.

درجة حد جبري بالنسبة لمتغير: هو الأس الذي رفع اليه ذلك المتغير.

مثل: الحد $9x^3y$ من الدرجة الثالثة بالنسبة للمتغير x، ومن الدرجة الأولى بالنسبة للمغير y.

العمليات على الحدود والتراكيب الجبرية:

أولاً: الجمع والطرح: نجمع ونطرح الحدود الجبرية المتشابهة فقط

المجموع الجبري لحدين جبريين متشابهين:

هو حد جبري يشابههما ومعامله العددي هو مجموع معاملاهما العدديين أويكون الناتج حداً عدديا

مثال: اوجد ناتج

$$A=\underline{-3x^2y}+\overline{\overline{6y}}+\underline{7x^2y}\overline{\overline{-5y}}+6$$

لاحظ لدينا: $-3x^2y$ يشابه $+7x^2y$ ولدينا $+6y$ يشابه $-5y$ بينما العدد $+6$ لا مشابه له

الحل: نجمع الحدود المتشابهة فقط نجد الناتج:

$$A=4x^2y+y+6$$

ثانياً :ضرب حدين جبريين: نضرب المعاملين العددين ببعضهما ونضرب القسمين الحرفيين ببعضهما

مع ملاحظة:(ضرب القوى للأساس ذاته نجمع الاسس)

مثال:

$$2x^2y^3\times(-3x^4z)=2\times(-3)\times x^2y^3\times x^4z$$

$$2x^2y^3\times(-3x^4z)=-6x^6y^3z$$

مثال:

$$-\frac{2}{3}x^2y\times(-6xy)=\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-6)\times x^2y\times xy$$

$$\frac{2}{3}x^2y\times(6xy)=4x^3y^2$$

النشر: هو عملية تحويل الجداء الى مجموع

$$a(b+c)=a\times b+a\times c$$

و

$$(a+b)(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$$

الدرس الثاني: النشر والتحليل

① **النشر:** هو تحويل الجداء إلى مجموع.

☜ **تذكر:**

*** ضرب عدد بمتغير**

$* \ 2.x = 2x$

$* \ -3(2x) = -6x$

$* \ -5(-2y) = 10y$

$* \ \sqrt{2}(\sqrt{3}Z) = \sqrt{6}Z$

$* \ -2\sqrt{3}(\sqrt{3}y) = -2 \times 3y = -6y$

$* \ \frac{1}{2}(4Z) = \frac{4}{2}Z = 2Z$

☜ **تذكر:**

*** قاعدة التوزيع:**

$k(a+b) = ka + kb$

$k(a-b) = ka - kb$

أمثلة:

$* \ 2(x+3) = 2x + 6$

$* \ -3(x-5) = -3x + 15$

$* \ -2(5+x) = -10 - 2x$

$* \ x(x+1) = x^2 + x$

$* \ 3x(x-5) = 3x^2 - 15x$

$* \ \frac{1}{2}x(4x+2) = \frac{1}{2}x \times 4x + \frac{1}{2}x \times 2$

$= 2x^2 + x$

☜ **تذكر:**

*** اختزال عبارة جبرية:**

- نجمع الحدود المتشابهة أي.
- نجمع أمثال x^2 مع أمثال x^2 .
- نجمع أمثال x مع أمثال x.
- نجمع العدد مع العدد.

مثال: اختزل العبارات الجبرية الآتية:

$\boldsymbol{A = x^2 - 3x + 5 - 2x^2 + 5x}$

$A = -x^2 + 2x + 5$

$\boldsymbol{B = -x^2 + 3x - 5x + 2}$

$B = -x^2 - 2x + 2$

$\boldsymbol{C = 3x^2 - 5x - 2x - x^2 + 2}$

$C = 2x^2 - 7x + 2$

*** جداء ذي حدين بمثله:**

$(a+b)(c+d) = a(c+b) + b(c+d)$

أمثلة : انشر ما يلي:

$\boldsymbol{A = (x-2)(x-3)}$

$A = x(x-3) - 2(x-3)$

$A = x^2 - 3x - 2x + 6$

$A = x^2 - 5x + 6$

$\boldsymbol{B = (x-1)(x-5)}$

$B = x(x-5) - 1(x-5)$

$B = x^2 - 5x - x + 5$

$B = x^2 - 6x + 5$

$\boldsymbol{E = (2x-1)(x+3)}$

$E = 2x(x+3) - 1(x+3)$

$E = 2x^2 + 6x - x - 3$

$E = 2x^2 + 6x - x - 3$

$E = 2x^2 + 5x - 3$

$\boldsymbol{F = (2x-3)(5x+2)}$

$F = 2x(5x+2) - 3(5x+2)$

$F = 10x^2 + 4x - 15x - 6$

$F = 10x^2 - 11x - 6$

$\boldsymbol{H = (2-x)(x-5)}$

$H = 2(x-5) - x(x-5)$

$H = 2x - 10 - x^2 + 5x$

$H = -x^2 + 7x - 10$

* النشر باستخدام المتطابقات التربيعية:

① مربع مجموع عددين يساوي

مربع الأول + ضعفي الأول بالثاني + مربع الثاني

$$\left(\underbrace{a}_{\text{أول}} + \underbrace{b}_{\text{ثاني}}\right)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b^2)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

*** انشر ما يلي:**

$$(x+2)^2 = (x)^2 + 2(x)(2) + (2)^2$$
$$= x^2 + 4x + 4$$

$$(x+5)^2 = (x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2$$
$$= x^2 + 10x + 25$$

$$(2x+7)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(7) + (7)^2$$
$$= 4x^2 + 28x + 49$$

$$(3+5x)^2 = (3)^2 + 2(3)(5x) + (5x)^2$$
$$= 9 + 30x + 25x^2$$
$$= 25x^2 + 30x + 9$$

$$\left(3\sqrt{2}+x\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(3\sqrt{2}\right)(x) + (x)^2$$
$$= 18 + 6\sqrt{2}x + x^2$$

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$$

$$3(2x+2)^2 = 3[(2x)^2 + 2(2x)(2) + (2)^2]$$
$$= 3[4x^2 + 8x + 4]$$
$$= 12x^2 + 24x + 12$$

$$(3x+1)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(1) + (1)^2$$
$$= 9x^2 + 6x + 1$$

$$\left(2x+\sqrt{7}\right)^2 = (2x)^2 + 2(2x)\left(\sqrt{7}\right) + \left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$= 4x^2 + 4\sqrt{7}x + 7$$

$$(100+3)^2 = (100)^2 + 2(100)(3) + (3)^2$$
$$= 10000 + 600 + 9$$
$$= 10609$$

② مربع فرق عددين يساوي

مربع الأول – ضعفي الأول بالثاني + مربع الثاني.

$$(a-b)^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2$$

انشر ما يلي:

$$(x-3)^2 = (x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 - 6x + 9$$

$$(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(5) + (5)^2$$
$$= 4x^2 - 20x + 25$$

$$\left(\sqrt{2}x - 3\right)^2 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 - 2\left(\sqrt{2}x\right)(3) + (3)^2$$
$$= 2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9$$

$$(5-x)^2 = (5)^2 - 2(5)(x) + (x)^2$$
$$= 25 - 10x + x^2$$
$$= x^2 - 10x + 25$$

$$\left(\sqrt{2}-x\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\left(\sqrt{2}\right)(x) + (x)^2$$
$$= 2 - 2\sqrt{2}x + x^2$$
$$= x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$$

$$(2y-3)^2 = (2y)^2 - 2(2y)(3) + (3)^2$$
$$= 4y^2 - 12y + 9$$

③ جداء مجموع عددين في فرقهما يساوي

مربع الأول – مربع الثاني

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

أمثلة:

$$* \quad (x-7)(x+7) = (x)^2 - (7)^2$$
$$= x^2 - 49$$

$$* \quad (x-5)(x+5) = (x)^2 - (5)^2$$
$$= x^2 - 25$$

$$* \quad (2x-3)(2x+3) = (2x)^2 - (3)^2$$
$$= 4x^2 - 9$$

ماطبيع العدد: $N = \left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$

الحل:

$$N = \left(\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 7 - 3 = 4$$

وهو عدد صحيح

* النشر المجمع: انشر ما يلي

$$B = \underbrace{(2x+5)^2}_{\text{متطابقة}} - \underbrace{(2x-3)(x+1)}_{\text{نشر عادي}}$$

$B = (2x)^2 + 2(2x)(5) + (5)^2 - [2x(x+1) - 3(x+1)]$

$B = 4x^2 + 20x + 25 - (2x^2 + 2x - 3x - 3)$

$B = 4x^2 + 20x + 25 - 2x^2 + x + 3$

$B = 2x^2 + 21x + 28$

$$C = \underbrace{(x-7)(x+7)}_{\text{متطابقة}} - \underbrace{(x-3)^2}_{\text{متطابقة}}$$

$C = (x)^2 - (7)^2 - [(x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2]$

$C = x^2 - 49 - (x^2 - 6x + 9)$

$C = +x^2 - 49 - x^2 + 6x - 9$

$C = 6x - 58$

ورقة عمل (6)

انشر ما يلي:

$D = 2(x-3)(7-x)$

....

....

$H = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)(2x+4)$

....

....

$R = \left(\sqrt{5}x + 3\right)^2$

....

....

$T = (x-2)(x+2) - (x+7)^2$

....

....

....

....

$M = 2x(2x-1) + (x-3)(x+3)$

....

....

....

....

$X = (x-3)^2 - 5(x-3)$

....

....

....

$y = (x-3)^2 - 5(x-3)(x+8)$

....

....

....

$U = (2x-1)(2x+1) - (x-3)(x+3)$

....

....

....

$T = (x-2)(x+2) + (x+7)^2$

....

....

....

....

....

$R = \left(\sqrt{5}x + 3\right)^2 - (2x+3)^2$

....

....

....

....

....

....

$T = (x-2)(x+2) - 2(x-2)^2$

....

....

....

....

....

....

* التحليل: هو تحويل المجموع إلى جداء

① التحليل بإخراج العامل المشترك الأصغر

نخرج العامل المشترك بالشكل الآتي

إشارة الأول

العدد GCD

متغير إن وجد مشترك وبأصغر أس

قوس إن وجد مشترك وبأصغر أس

ثم نقسم التركيب على العامل المشترك بالشكل الآتي

إشارة / إشارة

عدد / عدد

متغير / متغير

قوس / قوس

مع ملاحظة ما يلي

الحد / الحد ذاته = 1 ، الحد / معاكسه = 1-

قسمة القوى للأساس ذاته نطرح الأسس

* العامل المشترك هو عدد

$$ka + kb = k(a + b)$$

✎ أمثلة:

$* \; 2x + 4 = 2\left(\frac{2x}{2} + \frac{4}{2}\right) = 2(x + 2)$

$* \; 5x - 10 = 5\left(\frac{5x}{5} - \frac{10}{5}\right) = 5(x - 2)$

$* \; 12x - 3 = 3\left(\frac{12x}{3} - \frac{3}{3}\right) = 3(4x - 1)$

* العامل المشترك هو متغير أو متغير مع عدد

$* \; 5x^2 - 3x = x(5x - 3)$

$* \; x^3 - 3x^2 + x = x(x^2 - 3x + 1)$

$* \; 5x^4 - 3x^2 = x^2(5x^2 - 3)$

$* \; 2x^3 - 4x = 2x(x^2 - 2)$

$* \; x^2y + xy^2 = xy(x + y)$

$* \; 3y^2 - 9y + 27 = 3(y^2 - 3y + 9)$

* العامل المشترك هو قوس أو قوس المضمر

✎ مثال: حلل ما يلي إلى جداء أقواس:

$A = (x + 2) + (x + 2)(x + 3)$

$A = (x + 2)[(1) + (x + 3)]$

$A = (x + 2)(x + 4)$

$B = (x - 1) - (x + 3)(x - 1)$

$B = (x - 1)[(1) - (x + 3)]$

$B = (x - 1)(-x - 2)$

$D = (x - 2)^2 - (2x + 3)(x - 2)$

$D = (x - 2)[(x - 2) - (2x + 3)]$

$D = (x - 2)(x - 2 - 2x - 3)$

$D = (x - 2)(-x - 5)$

$E = (2x - 3)^2 + (x - 5)(2x - 3)$

$E = (2x - 3)[(2x - 3) + (x - 5)]$

$E = (2x - 3)(3x - 8)$

$G = (x - 7)^2 - (2x - 14)(x - 5)$

$G = (x - 7)^2 - 2(x - 7)(x - 5)$

$G = (x - 7)[(x - 7) - 2(x - 5)]$

$G = (x - 7)(x - 7 - 2x + 10)$

$G = (x - 7)(-x + 3)$

$H = (5x - 1)^2 + (1 - 5x)(2x + 3)$

$H = (5x - 1)^2 - (5x - 1)(2x + 3)$

$H = (5x - 1)[(5x - 1) - (2x + 3)]$

$H = (5x - 1)(3x - 4)$

$I = (x - 1)^2 - (x - 1)(2 - 3x)$

$I = (x - 1)[(x - 1) - (2 - 3x)]$

$I = (x - 1)(x - 1 - 2 + 3x)$

$I = (x - 1)(4x - 3)$

$J = (x - 3)^2 - (x - 3)(x + 5)$

$J = (x - 3)[(x - 3) - (x + 5)]$

$J = (x - 3) - (x - 3 - x - 5)$

$J = (x - 3)(-8)$

② التحليل باستخدام المتطابقات:

1. من الشكل $x^2 \pm 2xy + y^2$ **نحلل كما يلي:**

لتحليل هذا الشكل من المتطابقات نأخذ

(جذر الأول   إشارة الثاني   جذر الثالث)^2

ونتحقق بالشكل:

2×الأول × الثاني = الحد الأوسط

أمثلة: حلل ما يلي:

$\boldsymbol{A = x^2 - 6x + 9}$

$A = (x-3)^2$

$\boldsymbol{B = x^2 + 10x + 25}$

$B = (x+5)^2$

$\boldsymbol{C = 49x^2 - 70x + 25}$

$C = (7x-5)^2$

$\boldsymbol{D = 9x^2 - 12x + 4}$

$D = (3x-2)^2$

$\boldsymbol{E = (x-1)^2 + 10(x-1) + 25}$

$E = ((x-1)+5)^2$

$E = (x+4)^2$

2. من الشكل $a^2 - b^2$ **نحلل كما يلي:**

(مجموع الجذرين) × (فرق الجذرين)

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

أمثلة: حلل ما يلي:

$* \boldsymbol{A = x^2 - 4}$

$A = (x+2)(x-2)$

$* \boldsymbol{B = x^2 - 9}$

$B = (x-3)(x+3)$

$* \boldsymbol{C = 81 - y^2}$

$C = (9-y)(9+y)$

$* \boldsymbol{D = 16 - 25Z^2}$

$D = (4-5Z)(4+5Z)$

$* \boldsymbol{F = 49 - (x+3)^2}$

$F = [7 + (x+3)][7 - (x+3)]$

$F = (7 + x + 3)(7 - x - 3)$

$F = (x+10)(-x+4)$

$* \boldsymbol{G = 4(x-3)^2 - 25}$

$G = [2(x-3) - 5][2(x-3) + 5]$

$G = (2x - 6 - 5)(2x - 6 + 5)$

$G = (2x-11)(2x-1)$

$* \boldsymbol{H = x^4 - 81}$

$H = (x^2-9)(x^2+9)$

$H = (x-3)(x+3)(x^2+9)$

$* \boldsymbol{I = (x-3)^2 - (2x-5)^2}$

$I = [(x-3) + (2x-5)][(x-3) - (2x-5)]$

$I = (x - 3 + 2x - 5)(x - 3 - 2x + 5)$

$I = (3x-8)(-x+2)$

$* \boldsymbol{J = (x-3)^2 - (x-2)^2}$

$J = [(x-3) - (x-2)][(x-3) + (x-2)]$

$\mathrm{J} = (x - 3 - x + 2)(x - 3 + x - 2)$

$J = (-1)(2x-5)$

$* \boldsymbol{K = -2x^3 + 20x^2 - 50x}$

$\boldsymbol{K = -2x(x^2 - 10x + 25)}$

$K = -2x(x+5)^2$

$* \boldsymbol{L = (x-3)^2 - 9x^2}$

$L = [x - 3) + 3x][\,(x-3) - 3x)]$

$\mathrm{L} = (4x-3)(-2x-3)$

$* \boldsymbol{M = (x-1)^2 - 16}$

$M = [x - 1) + 4][\,(x-1) - 4)]$

$\mathrm{M} = (x+3)(x-5)$

بشكل عام السؤال حل إلى جداء عوامل

أولاً: إذا كان عدد الحدود 2 نفكر في

1- العامل المشترك(...± ...)@

2- متطابقة (...+...) (...-...)

3- عامل مع متطابقة(...+...) (...-...)@

ثانياً: إذا كان عدد الحدود 3 نفكر في

1- العامل المشترك(...± ...± ...)@

2- متطابقة $(...\pm...)^2$

3- عامل مع متطابقة $(...\pm...)^2$ @

ثالثاً: غير ذلك نحلل الحدود التي تدل على المجموع الجبري ثم نتابع كما في أولا او ثانيا.

أمثلة داعمة للتحليل:

تمرين: حلل ما يلي إلى جداء عوامل أولية من الدرجة الأولى:

$$\boldsymbol{A = 4x^2(x+1) - 9(x+1)}$$
$$A = (x+1)(4x^2-9)$$
$$A = (x+1)(2x-3)(2x+3)$$
$$\boldsymbol{B = (x-3)^2 + 5(x-3)}$$
$$B = (x-3)[(x-3)+5]$$
$$B = (x-3)(x-3+5)$$
$$B = (x-3)(x+2)$$
$$\boldsymbol{C = \underbrace{x^2-4}_{\text{متطابقة}} - (x-2)}$$
$$C = (x-2)(x+2) - (x-2)$$
$$C = (x-2)[(x+2)-1]$$
$$C = (x-2)(x+2-1)$$
$$C = (x-2)(x+1)$$
$$\boldsymbol{D = \underbrace{x^2-4x+4}_{\text{متطابقة}} - 9(x-2)}$$
$$D = (x-2)^2 - 9(x-2)$$
$$D = (x-2)[(x-2)-9]$$
$$D = (x-2)(x-11)$$

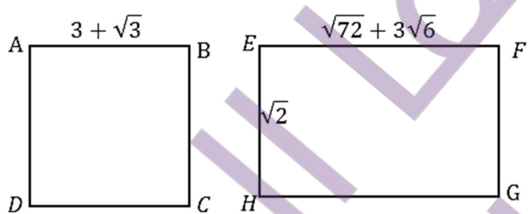
$$\boldsymbol{C = (2x-1)(x+3) - 4x + 2}$$
$$C = (2x-1)(x+3) - 2(2x-1)$$
$$C = (2x-1)[(x+3)-(2)]$$
$$C = (2x-1)(x+3-2)$$
$$C = (2x-1)(x+1)$$
$$\boldsymbol{F = (5x-2)^2 + 10x - 4}$$
$$F = (5x-2)^2 + 2(5x-2)$$
$$F = (5x-2)[(5x-2)+2]$$
$$F = (5x-2)(5x-2+2)$$
$$F = (5x-2)(5x)$$

دمج الجبر مع الهندسة

في الشكل المجاور $ABCD$ مربع طول ضلعه $3+\sqrt{3}$ ونرمز لمساحته S_1 و $EFGH$ مستطيل بعداه $EF = \sqrt{72}+3\sqrt{6}$ و $EH = \sqrt{2}$ مساحته S_2 والمطلوب:

1) احسب S_2 واختزل الناتج

2) أثبت أن $S_1 = S_2$



الحل: تذكر: مساحة المستطيل = الطول × العرض

مساحة المربع = $(\text{طول الضلع})^2$

$$EF = \sqrt{36\times 2} + 3\sqrt{6}$$
$$EF = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$$
$$S_2 = EF \times EH$$
$$S_2 = (6\sqrt{2}+3\sqrt{6})\times\sqrt{2}$$
$$S_2 = 12 + 3\sqrt{12}$$

وحدة مربعة

$$S_2 = 12 + 6\sqrt{3}$$

-2

$$S_1 = (AB)^2 = (3+\sqrt{3})^2$$
$$S_1 = (3)^2 + 2(3)(\sqrt{3}) + 3$$
$$S_1 = 12 + 6\sqrt{3}$$

ومنه $S_1 = S_2$

ورقة عمل (7)

حلل ما يلي:

$A = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$

$B = x^2 + 2xy + y^2$

$C = (x+1) + (x+2)(x+1)$

$D = (x-2)^2 + (x+3)(x-2)$

$E = (x-3)(2x+5) + (2x-6)$

$F = x^3 + x^2 + x + 1$

$G = (x-2)^2 - (9+x)^2$

$H = (x-2)(x+3) + x^2 + 6x + 9$

$I = 4x^4(x-2) - 32(x-2)$

$J = (3t-7)(2t+3) - 2t - 3$

$k = (y-2)^2 - (y-3)^2$

$L = (2x-1)(x+3) - 4(x+3)$

$M = (x-2)^2 - 9$

انتهت الوحدة الثانية

3 الوحدة الثالثة-جبر

المعادلات من الدرجة الأولى

1) معنى حل معادلة: هو إيجاد قيمة أو (قيم) المجهول التي تحقق المعادلة وتجعلها صحيحة.

2) كل قيمة تحقق المعادلة تسمى حلاً للمعادلة أو جذراً لها.

3) نقول معادلتين أنهما متكافئتين إذا كانت لهما نفس الحل.

*** المعادلة من الدرجة الأولى:**

هي معادلة تؤول إلى الشكل $ax+b=0$ حيث $a \neq 0$

خطوات حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

1) إذا وجد في المعادلة كسور نضرب الطرفين بالمضاعف المشترك الأصغر للمقامات (L.C.M) فنتخلص من الكسور

2) النشر (فك الأقواس)

3) نقل المجاهيل لطرف والمعاليم لطرف مع تغيير إشارة المنقول

4) جمع الحدود المتشابهة في كل طرف على حدا إن وجدت

5)القسمة على أمثال المجهول(حر/مقيد) وتبسيط الناتج.

أمثلة:

① $2x-4=2$

$$2x=2+4$$
$$2x=6$$
$$x=\frac{6}{2}$$
$$x=3$$

② $5x-4=3x+2$

$$5x-3x=2+4$$
$$2x=6$$
$$x=\frac{6}{2}$$
$$x=3$$

③ $2(x+2)=-3(-x+2)$

$$2x+4=+3x-6$$
$$2x-3x=-6-4$$

$-x=-10$ ومنه $x=10$

④ $\frac{Z}{3}=\frac{1}{2}$

نضرب الطرفين بالمضاعف المشترك الأصغر للمقامات $(L.C.M=6)$

$$3\times z=3$$
$$\Rightarrow Z=\frac{3}{2}$$

⑤ $\frac{2}{5}x=\frac{3}{25}$

نضرب الطرفين بالمضاعف المشترك الأصغر للمقامات $(L.C.M=25)$

$$25\times\frac{2}{5}x=\frac{3}{25}\times 25$$
$$10x=3$$
$$x=\frac{3}{10}$$

⑥ $\frac{1}{2}x+2=\frac{1}{3}x+\frac{5}{2}$

نضرب الطرفين بالمضاعف المشترك الأصغر للمقامات $(L.C.M=6)$

$$6\times\frac{1}{2}x+6\times 2=6\times\frac{1}{3}x+6\times\frac{5}{2}$$
$$3x+12=2x+15$$
$$3x-2x=+15-12$$
$$x=+3$$

⑦ $\frac{1}{2}x+2=\frac{3x-1}{3}$

الحل: نضرب الطرفين بالمضاعف المشترك الأصغر للمقامات $(L.C.M=6)$

$$3x+12=2(3x-1)$$
$$3x+12=6x-2$$
$$3x-6x=-2-12$$
$$-3x=-14$$
$$x=\frac{-14}{-3}$$

ومنه $x=\boxed{\frac{14}{3}}$

⑧ $4x+\frac{5}{3}=2x-\frac{1}{3}$

الحل: نضرب الطرفين بـ **(L.C.M)** **للمقامات** وهو 3

$$12x+5=6x-1$$
$$12x-6x=-1-5$$
$$6x=-6$$
$$x=\frac{-6}{6}$$

ومنه $x=\boxed{-1}$

⑨ $3(5+3x)-(x-3)=0$

الحل:

$$15+9x-x+3=0$$
$$8x+18=0$$
$$8x=-18$$
$$x=\frac{-18}{8}$$

ومنه $x=\boxed{\frac{-9}{4}}$

⑩ $5x-1=7x+5$

وتحقق من صحة الحل

الحل:

$$5x-7x=5+1$$
$$-2x=6$$
$$x=\boxed{-3}$$

التحقق $5(-3)-1=7(-3)+5$

ومنه $-15-1=-21+5$

ومنه $-16=-16$

المساواة محققة فهو حل لها

الدرس الثالث
المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

التراجح: لغةً: هو التباين والاختلاف.

المتراجحة: هي مقارنة بين طرفين من نفس النوع ونستخدم عادة إشارات التراجح للمقارنة وهي:

$<$ أصغر تماماً أي $(3<5)$

$>$ أكبر تماماً أي $(7>4)$

$\leq$ أصغر أو يساوي أي $(x\leq 5)$ وتقرأ أصغر

$\geq$ أكبر أو يساوي أي $(x\geq 3)$ وتقرأ أكبر

مثال: قل إن كانت المتراجحة صحيحة أم خاطئة في كل مما يأتي:

① $\mathbf{11+3\geq 8+7}$

$14\geq 15$ خاطئة

② $\mathbf{11-3\geq 1+8}$

$8\geq 9$ خاطئة

③ $\mathbf{1-3\geq 6-7}$

$-2\geq -1$ خاطئة

④ $\mathbf{5-3\geq 8-7}$

$2\geq 1$ صحيحة

⑤ $\mathbf{10-1\geq 2+7}$

$9\geq 9$ صحيحة

⑥ $\mathbf{1-3>6-9}$

$-2>-3$ صحيحة

حَلُّ المتراجحة: هو كل قيمة لـ x تجعل المتراجحة صحيحة.

مثال: أي القيم الآتية تحقق المتراحجة.

$$2x + 1 < x - 5$$

$$x = 0 \quad , \quad x = -10 \quad , \quad x = 5$$

نعوض في المتراجحة كل x بـ 5 إذا كانت تحقق المتراجحة فهي حلاً وإذا لم تحقق فهي ليست حلاً.

$$x = 5$$

$$2(5) + 1 < 5 - 5$$

$$11 < 0$$

لاحظ 11 ليس أصغر من 0 وبالتالي المتراجحة خاطئة ومنه $x = 5$ ليس حلاً.

نعوض $x = -10$

$$2(-10) + 1 < -10 - 5$$

$$-20 + 1 < -15$$

$$-19 < -15$$

القيمة $x = -10$ حلاً للمتراجحة لأنها تحقق المتراجحة

نعوض $x = 0$

$$2(0) + 1 < 0 - 5$$

$$1 < -5$$

$x = 0$ ليست حلاً للمتراجحة.

خواص المتراجحة:

1) إذا جمعنا نفس العدد إلى طرفي متراجحة أو طرحنا نفس العدد من طرفيها نحصل على متراجحة مكافئة للمتراجحة المعطاة.

$$15 > 9$$

نضيف 3 إلى طرفي المتراجحة

$$15 + 3 > 9 + 3$$

$$18 > 12$$

لاحظ المتراجحة بقيت صحيحة لو طرحنا 3 من طرفي المتراجحة.

$$15 - 3 > 9 - 3$$

$$12 > 6$$

لاحظ المتراجحة بقيت صحيحة

2) إذا ضربنا طرفي متراجحة بعدد موجب تماماً أو قسمنا طرفيها على عدد موجب تماماً نحصل على متراجحة مكافئة للمتراجحة المعطاة.

$$6 < 18$$

لو ضربنا طرفي المتراجحة بـ 2

$$6 \times 2 < 18 \times 2$$

$$12 < 36$$

لو قسمنا طرفي المتراجحة على 2

$$\frac{6}{2} < \frac{18}{2}$$

$$3 < 9$$

3) إذا ضربنا طرفي متراجحة بعدد سالب تماماً أو قسماً طرفيها على عدد سالب تماماً، يُعكس اتجاهها.

$$12 > 4$$

نضرب بـ -1

$$-12 < -4$$

نقسم على -4

$$-3 < -1$$

هام

نستنتج مما سبق أن جهة المتراجحة تتغير في حالة ضرب أو قسمة طرفيها على عدد سالب

حل المتراجحة:

لحل متراجحة من الدرجة الأولى نتبع ما يلي:

1- ننقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى طرف مع الانتباه إلى تغير إشارة الحد المنقول

2- نقسم على أمثال المجهول مع الانتباه عند القسمة على عدد سالب نغير إشارة التراجح.

3- نحدد على مستقيم الأعداد قيم x التي تحقق المتراجحة

تمارين:

حل المتراجحات ومثل حلولها على مستقيم الأعداد:

① $5x - 2 > 3$

$$5x > 3 + 2$$

$$\frac{5x}{5} > \frac{5}{5}$$

$$x > 1$$

حلول المتراجحة هي قيم x الأكبر تماماً من 1

② $\mathbf{2x + 1 < x - 5}$

$$2x - x < -5 - 1$$

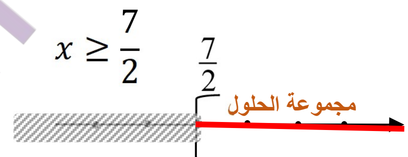
$$x < -6$$

③ $\mathbf{3x - 2 \geq x + 5}$

$$3x - x \geq 5 + 2$$

$$2x \geq 7$$

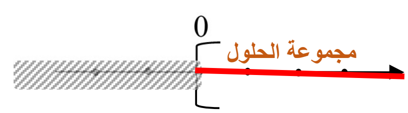
$$x \geq \frac{7}{2}$$



④ $\mathbf{2x - \frac{1}{4} \leq 3x - \frac{1}{4}}$

$$2x - 3x \leq -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$-x \leq 0$ ومنه $x \geq 0$



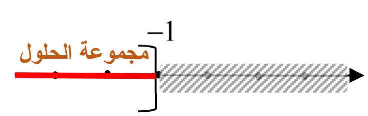
⑤ $\mathbf{3(y - 1) - 2(4y + 1) \geq 0}$

$$3y - 3 - 8y - 2 \geq 0$$

$$3y - 8y \geq 5$$

$$-5y \geq 5$$

$$y \leq -1$$



بعض التمارين الداعمة لدرس المتراجحات

تمرين (1):

لدينا المتراجحة : $\mathbf{2x - 5 \geq x - 3}$

1- بين أي الأعداد الآتية $\mathbf{1\,,3\,,-5}$ حلاً للمتراجحة وأيها ليس حلاً.

2- حل المتراجحة ومثل حلولاً على مستقيم الأعداد.

الحل:

1) نعوض في المتراجحة $x = 1$

$$2(1) - 5 \geq 1 - 3$$

$$2 - 5 \geq -2$$

$$-3 \geq -2$$

ومنه $x = 1$ ليس حلاً للمتراجحة

نعوض في المتراجحة $x = 3$

$$2(3) - 5 \geq 3 - 3$$

$$6 - 5 \geq 0$$

$$1 \geq 0$$

ومنه $x = 3$ حلاً للمتراجحة

نعوض في المتراجحة $x = -5$

$$2(-5) - 5 \geq -5 - 3$$

$$-15 \geq -8$$

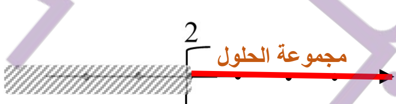
$x = -5$ ليست حلاً للمتراجحة

2)

$$2x - 5 \geq x - 3$$

$$2x - x \geq -3 + 5$$

$$x \geq 2$$



تمرين (2):

لدينا المتراجحة $3x - 5 \leq 4$

1) أي الأعداد: 3 , $\frac{1}{2}$, 4 , 5 حلاً لهذه المتراجحة وأيّها ليس حلاً لها؟

2) حل هذه المتراجحة.

3) مثّل حلولها على مستقيم الأعداد.

الحل:

1) نعوض $x = 3$

$3(3) - 5 \leq 4$

$9 - 5 \leq 4$

محقق $4 \leq 4$

ومنه $x = 3$ حلاً للمتراجحة

نعوض $x = \frac{1}{3}$

$3\left(\frac{1}{3}\right) - 5 \leq 4$

$1 - 5 \leq 4$

محققة $-4 \leq 4$

ومنه $x = \frac{1}{3}$ حلاً للمتراجحة

نعوض $x = 5$

$3(5) - 5 \leq 4$

غير محققة $10 \leq 4$

ومنه $x = 5$ ليس حلاً للمتراجحة

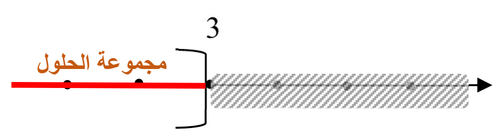
(2

$3x \leq 4 + 5$

$3x \leq 9$

ومنه $x \leq 3$

-3



تمرين (3):

لدينا المتراجحة $3x + 7 \leq -8$

1) أي الأعداد -6 , -4 حلاً للمتراجحة وأيها ليس حلاً.

2) حل المتراجحة ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

الحل:

1) نعوض $x = -4$

$3(-4) + 7 \leq -8$

$-12 + 7 \leq -8$

غير محققة $-5 \leq -8$

$x = -4$ ليس حلاً

نعوض $x = -6$

$3(-6) + 7 \leq -8$

محققة $-11 \leq -8$

$x = -6$ حلاً للمتراجحة

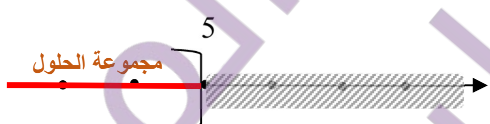
(2

$3x + 7 \leq -8$

$3x \leq -8 - 7$

$3x \leq -15$

$x \leq -5$



حل المسائل باستخدام المعادلات

نقرأ النص بإمعان

إن كان في النص مجهول واحد نفرض قيمته x

إن كان في النص مجهولين نفرض قيمة الصغير x

ثم نوجد الكبير بدلالة الصغير

نشكل معادلة بحسب مفردات المسألة نحلها ونناقش الحل

مسألة1: في أحد المجالس عددٌ من الأشخاص، ربعهم تنحصر أعمارهم بين 20 سنة و 30 سنة، وثُلثهم تنقص أعمارهم عن 20 سنة، ومنهم 20 شخصاً تزيد أعمارهم عن 30 سنة. ما عدد الأشخاص في هذا المجلس؟

الحل: نفرض عدد الاشخاص فيكون

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+20=x$$ نتخلص من الكسور

بضرب الطرفين بـ **(L.C.M) للمقامات** و هو 12

$$4x+3x+240=12x$$
$$7x+240=12x$$
$$240=12x-7x$$
$$240=5x$$
$$\frac{240}{5}=x$$
$$x=48$$

مسألة 2: تضم مكتبة رولا اربعة أصناف من الكتب نصفها مدرسية وربعها روايات وخمسها علمية بالإضافة إلى معجمين. ما عدد كتب رولا؟ .

الحل: نفرض عدد كتب رولا x فيكون

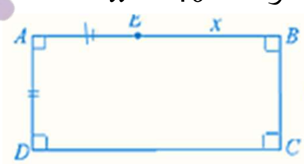
$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+2=x$$

نضرب الطرفين بالعدد 20 وهو **(L.C.M) للمقامات**

$$10x+5x+4x+40=20x$$
$$19x+40=20x$$

$40=20x-19x$ ومنه $x=40$

مسألة



مستطيل $ABCD$

و E نقطة من $[AB]$ تحقّق $EA=AD=3$ و $EB=x$

1. احسب بدلالة x محيط المستطيل

2. استعمل معادلة لحساب قيمة x التي تجعل محيط المستطيل مساوياً 20 cm

الحل: 1) محيط المستطيل = (الطول + العرض)×2

المحيط = 2×(3 + x+3)

المحيط = 2x+12

2) 2x+12 = 20

2x = 20-12

2x = 8 ومنه x = 4

حل المسائل باستخدام المتراجحات

نقرأ النص بإمعان

إن كان في النص مجهول واحد نفرض قيمته x

نشكل متراجحة بحسب مفردات المسألة

نحلها ونناقش الحلول

مسألة1: شراء محابر من المكتبة يكلف 1790 ليرة لكل محبرة. وشراؤها عن طريق موقع إنترنيت يكلف 1650 ليرة لكل محبرة مع إضافة أجرة النقل وهي 490 ليرة أياً كان عدد المحابر المشتراة بدءاً من أي عدد من المحابر يكون الشراء عن طريق موقع إنترنيت أوفر من الشراء من المكتبة؟

الحل: نفرض عدد المحابر x

$$1790x>1650x+490$$
$$1790x-1650x>490$$
$$140x>490$$

$x>\frac{490}{140}$ ومنه $x>3.5$

عدد المحابر عن طريق الانترنت أوفر بدءاً من 4 محابر.

مسألة2: هناك عرضان في محل تأجير أفلام الفيديو

- **اشتراك واستعارة:** يدفع المشترك 6000 ليرة سنوياً، ويدفع 550 ليرة عن كل فلم يستعيره.
- **استئجار:** يدفع المستأجر 800 ليرة عن كل فلم يستأجره.

بدءاً من كم فلماً يشاهده الشخص سنوياً يكون العرض الأول أوفر له

الحل: نفرض عدد الأفلام x

في العرض الاول الكلفة $550x+6000$

في العرض الثاني الكلفة $800x$

ومنه $550x+6000<800x$

ومنه $550x-800x<-6000$

ومنه $-250x<-6000$

ومنه $x>\frac{-6000}{-250}$

ومنه $x>24$

إذاً بدءاً من 25 فلم يصبح العرض الأول أوفر

مسألة3: في احد المسابح تم اعلان العرض التالي

1) دفع نقدي: يدفع الشخص مبلغ 340 ليرة عن كل زيارة للمسبح

2) اشتراك : يشترك الشخص ببطاقة سنوية تصلح لعشر زيارات للمسبح سعرها 1700 ليرة

بدءاً من كم زيارة للمسبح يكون العرض اشتراك أوفر

الحل: نفرض عدد الزيارات للمسبح x

فتكون تكلفة الدخول بدون اشتراك $340x$

$$340x>1700$$

ومنه $x>\frac{1700}{340}$ ومنه $x>5$

اذاً بدءاً من 6 زيارات يصبح العرض الثاني أوفر

معادلات ــ خاصة الجداء الصفري

1) خاصة الجداء الصفري:

* إذا كان أحد مضاريب جداء معدوماً بمعنى إذا كان:

$a = 0$ أو $b = 0$ كان $a \times b = 0$

* إذا كان جداء مضاريب معدوماً كان واحد على الأقل من المضاريب معدوماً بمعنى إذا كان :

$a \times b = 0$

إما $a = 0$

أو $b = 0$

* يرمز a, b, c, d إلى أعداد حقيقية حلول المعادلة

$(ax + b)(cx + d) = 0$

هي قيم x التي تحقق

إما $ax + b = 0$ أو $cx + d = 0$

أمثلة: حل كلاً من المعادلات الآتية:

① $A = (x - 2)(x + 3)$

حل $A = 0$

$A = 0 \Longrightarrow$

إما $x - 2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 2}$

أو $x + 3 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = -3}$

② $\boldsymbol{B = (2x - 4)(3x + 2)}$

حل $B = 0$

$(2x - 4)(3x + 2) = 0$

إما $2x - 4 = 0$

$\Longrightarrow 2x = 4 \Longrightarrow x = 2$

أو $3x + 2 = 0 \Longrightarrow 3x = -2$

$\Longrightarrow x = \dfrac{-2}{3}$

③ $\boldsymbol{C = (2x + 5)(3x - 1)}$

حل $C = 0$

$(x + 5)(3x - 1) = 0$

إما $2x + 5 = 0 \Longrightarrow 2x = -5 \Longrightarrow x = \dfrac{-5}{2}$

أو $3x - 1 = 0 \Longrightarrow 3x = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

④ $\boldsymbol{3x(x - 3)(3x - 7) = 0}$

$3x(x - 3)(3x - 7) = 0$

إما $3x = 0 \Longrightarrow x = 0$

أو $x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$

أو $3x - 7 = 0 \Longrightarrow 3x = 7 \Longrightarrow x = \dfrac{7}{3}$

2) حل المعادلة $x^2 = a$

لحل هذه المعادلة نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: $\boxed{a > 0}$

أي a عدد موجب تماماً

للمعادلة حلان هما:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = +\sqrt{a} \text{ إما} \\ x = -\sqrt{a} \text{ أو} \end{array}}$$

مثال: حل المعادلات الآتية:

① $\boldsymbol{x^2 = 144}$

إما $x = +12$ أو $x = -12$

② $x^2 - 64 = 0$

$x^2 = 64$

$x = \mp\sqrt{64}$

إما $x = 8$ أو $x = -8$

③ $(x - 1)^2 = 49$

$(x - 1) = \mp\sqrt{49}$

إما $x - 1 = 7$

$\Longrightarrow x = 7 + 1 \Longrightarrow x = 8$

أو $x - 1 = -7$

$\Longrightarrow x = -7 + 1 \Longrightarrow x = -6$

④ $(x - 2)^2 - 36 = 0$

$(x - 2)^2 = 36$

$(x - 2) = \mp\sqrt{36}$

إما $x - 2 = 6 \Longrightarrow x = 8$

أو $x - 2 = -6 \Longrightarrow x = -4$

⑤ $\boldsymbol{121 - (x + 3)^2 = 0}$

$121 = (x + 3)^2$

ومنه $(x + 3)^2 = 121$

$(x + 3) = \mp\sqrt{121}$

إما $x + 3 = 11 \Longrightarrow x = 11 - 3 \Longrightarrow x = 8$

أو $x + 3 = -11 \Longrightarrow x = -11 - 3 = -14$

⑥ $(x-3)^2-25=144$

$(x-3)^2=144+25$

$(x-3)^2=169$

بالجذر $(x-3)=\mp\sqrt{169}$

إما $x-3=13 \Longrightarrow x=16$

أو $x-3=-13 \Longrightarrow x=-10$

الحالة الثانية $a=0$ للمعادلة حل وحيد

أمثلة

① $\boldsymbol{x^2=0}$

$x=0$

② $\boldsymbol{(x-1)^2=0}$

$(x-1)=0 \Longrightarrow x=1$

③ $\boldsymbol{(2x-5)^2=0}$

$2x-5=0 \Longrightarrow 2x=5 \Longrightarrow x=\frac{5}{2}$

الحالة الثالثة $\boldsymbol{a<0}$

العدد a أصغر تماماً من الصفر فالمعادلة مستحيلة الحل.

① $x^2=-64$

$-64<0$ المعادلة مستحيلة لأن

② $x^2+16=0$

$x^2=-16$ المعادلة مستحيلة لأن $-16<0$

3) معادلات تؤول إلى الجذر الصفري بعد تحليلها

تمرين (1): حل المعادلة:

① $\boldsymbol{(x-1)^2=(2x-1)^2}$

بالجذر

$(x-1)=\pm(2x-1)$

إما $x-1=2x-1$

$x-2x=-1+1$

$-x=0$

$\Longrightarrow x=0$

أو $x-1=-(2x-1)$

$x-1=-2x+1$

$3x=2$

$\Longrightarrow x=\frac{2}{3}$

نقول عن معادلتين أنهما متكافئتين إذا كان لهما الحل ذاته

هل المعادلتان الأتيتين متكافئتين؟ علل

$5x+2=3x-2 \;,\; 3x-1=2x-3$

لاحظ لكل منهما حل هو $x=-2$

تمرين (2): $\boldsymbol{A=6x^2+x-1}$

$\boldsymbol{B=(3x-1)(2x+1)}$

1) انشر B واستنتج أن $A=B$

2) حل $A=0$

الحل:

1 - $B=[3x(2x+1)-1(2x+1)]$

$B=(6x^2+3x-2x-1)$

$B=6x^2+x-1$

ومنه $A=B$

2 - $A=B=0$

$\Longrightarrow (3x-1)(2x+1)=0$

أما $3x-1=0 \Longrightarrow x=\frac{1}{3}$

أو $2x+1=0 \Longrightarrow 2x=-1$

$\Longrightarrow x=\frac{-1}{2}$

تمرين (3)

لدينا المقداران

$\boldsymbol{A=3x^2+x-2}$

$\boldsymbol{B=(x+1)(3x-2)}$

1- انشر B وقارن بين A, B

2- حل $A=0$

الحل:

$B=[x(3x-2)+1(3x-2)]$

$B=(3x^2-2x+3x-2)$

$B=3x^2+x-2$

بالمقارنة نجد $A=B$

2 –

$A = B = 0$

$(x+1)(3x-2) = 0$

إما $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$

أو $3x-2=0 \Longrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

تمرين (4): لدينا المقدار

$$\boldsymbol{E = (3x+2)^2 - (3x+2)(x+7)}$$

1- انشر واختزل E.

2- حلل E.

3- حل $E = 0$

الحل:1- $E = \underbrace{(3x+2)^2}_{\text{متطابقة}} - \underbrace{(3x+2)(x+7)}_{\text{نشر عادي}}$

$E = (3x)^2 + 2(3x)(2) + (2)^2 - [3x(x+7) + 2(x+7)]$

$E = (9x^2 + 12x + 4) - (3x^2 + \mathbf{21x} + 2x + 14)$

$E = 9x^2 + 12x + 4 - 3x^2 - 23x - 14$

$E = 6x^2 - 11x - 10$

-2 $E = (3x+2)[3x+2-(x+7)]$

$E = (3x+2)(3x+2-x-7)$

$E = (3x+2)(3x+2-x-7)$

$E = (3x+2)(2x-5)$

-3 $E = 0$

$\Longrightarrow (3x+2)(2x-5) = 0$

إما $3x+2=0 \Longrightarrow x=\dfrac{-2}{3}$

أو $2x-5=0 \Longrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

تمرين (5) : لدينا المقداران: $\boldsymbol{B = (x-2)^2}$

$$\boldsymbol{A = (-4x+1)(2x+3) + (3x+1)^2}$$

1- انشر العبارتين A , B واستنتج أن $A = B$

2- حل المعادلة $(x-2)^2 = x^2$

$A = -4x(2x+3) + 1(2x+3) + (3x)^2 + 2(3x)(1) + (1)^2$

$A = (-8x^2 - 12x + 2x + 3) + (9x^2 + 6x + 1)$

$A = -8x^2 - 10x + 3 + 9x^2 + 6x + 1$

$A = x^2 - 4x + 4 \ldots$ ①

$B = (x-2)^2$

$B = (x)^2 - 2(x)(2) + (2)^2$

$B = x^2 - 4x + 4 \ldots$ ②

من ① و ② نجد $A = B$

$(x-2)^2 - x^2 = 0$

$(x-2-x)(x-2+x) = 0$

$(-2)(2x-2) = 0$

$2x-2=0 \Longrightarrow 2x-2 \Longrightarrow x=1$

ورقة عمل (7)

1) حل المعادلات الآتية:

$2x + 5 = 9$

....
....
....

$\frac{1}{2}x + 2 = \frac{3}{5}x - 4$

....
....
....

$\frac{1}{2}(x + 5) = \frac{1}{7}x - 2$

....
....
....

$\frac{-x}{3} = \frac{9}{27}$

....
....
....

$(x - 2)(x + 3) = 0$

....
....
....

$(5x - 2)(7x - 3) = 0$

....
....
....

$\left(\frac{1}{2}x + 3\right)\left(\frac{1}{2}x - 5\right) = 0$

....
....
....

$(\sqrt{3}x - 5)(\sqrt{2}x + \sqrt{8}) = 0$

....
....
....

$x^2 - 64 = 0$

....
....
....

$(x - 3)^2 - 9 = 0$

....
....
....

$(x - \sqrt{6})^2 - 24 = 0$

....
....
....

$(2x - 3)^2 = 0$

....
....
....

$(5x - 3)^2 + 16 = 0$

....
....
....

$(2x - 1)^2 - (3x + 7)^2 = 0$

....
....
....

$x^2 - 10x + 25 = 0$

....
....

حل التمارين الآتية:

التمرين (1): لدينا المقداران:

$$A = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$B = \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)$$

1- انشر A واستنتج أن $A = B$

2- أوجد قيمة A من أجل $x = \sqrt{2}$

3- حل $B = \frac{1}{2}$

التمرين (2): لتكن العبارتان

$$A = 16(x+1)^2 - 9x^2$$

$$B = (x+4)(7x+4)$$

1- انشر كلاً من المقداران A , B واستنتج أن $A = B$

2- حل $A = 0$

دمج الجبر مع الهندسة في الوحدة الثالثة

تمرين (1):

في الشكل المجاور $ABCD$ مستطيل فيه DC , AB مماسان للدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{3}$

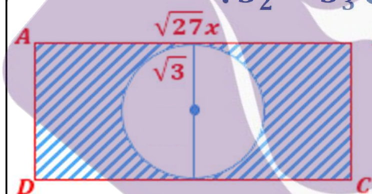
والمطلوب: إذا علمت أن x موجباً : $AB = \sqrt{27x}$

1) احسب S_1 مساحة المستطيل واكتبه بأبسط صورة بدلالة x .

2) احسب S_2 مساحة الدائرة التي مركزها O .

3) احسب مساحة الجزء المظلل S_3 بدلالة x

4- أوجد قيم x التي تجعل $S_2 = S_3$.



$BC = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$AB = \sqrt{27x} = \sqrt{9 \times 3x} = 3\sqrt{3x}$

1 − $S_1 = AB \times BC$

$S_1 = 3\sqrt{3x} \times 2\sqrt{3} = 18x$

2 − $S_2 = \pi r^2$

$S_2 = \pi(\sqrt{3})^2$

$S_2 = 3\pi$

3 − $S_3 = S_1 - S_2$

$S_3 = 18x - 3\pi$

4 − $S_2 = S_3$

$3\pi = 18x - 3\pi$

ومنه $18x - 3\pi - 3\pi = 0$

$18x - 6\pi = 0$

$18x = 6\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

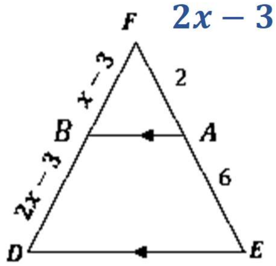
تمرين (2):

في الشكل المجاور $BF = x - 3 , DB = 2x - 3$

$AB \parallel ED \ , AE = 6 \ , AF = 2$ ، والمطلوب:

1) احسب قيمة x ثم أوجد طول BD

2) حل المتراجحة $2x - 3 \geq 1$



توازي ← تناسب

حسب مبرهنة $BA \parallel DE$

النسب الثلاث المتساوية

$$\left.\begin{matrix} F\ A\ B \\ F\ E\ D \end{matrix}\right\} \frac{FA}{FE} = \frac{FB}{FD}$$

$\frac{2}{8} = \frac{x-3}{2x-3+x-3}$

$\frac{2}{8} = \frac{(x-3)}{(3x-6)}$

$8(x-3) = 2(3x-6)$

$8x - 24 = 6x - 12$

$8x - 6x = -12 + 24$

$2x = 12$

$\Rightarrow \boxed{x = 6}$

$BD = 2x - 3$

$BD = 2(6) - 3$

$\boxed{BD = 9}$

2 − $2x - 3 \geq 1$

$2x \geq 1 + 3$

$2x \geq 4$

$x \geq 2$

بعض التمارين التي ترد كـ اختر الإجابة الصحيحة:

في كل مما يأتي إجابة واحدة صحيحة أشر إليها:

1- حلول المتراجحة $4x \le 12$ هي جميع قيم x التي تحقق

A	$\boxed{x \le 3}$	B	$x \le 4$	C	$x \le -3$

التوضيح:

$$4x \le 12$$
$$\frac{2x}{4} \le \frac{12}{4}$$
$$x \le 3$$

2- أحد حلول المتراجحة $3x + 2 \le x + 4$ هو

A	2	B	$\boxed{-3}$	C	5

التوضيح: نعوض $x = 2$ في المتراجحة

$$3(2) + 2 \le 2 + 4$$
$$6 + 2 \le 6$$
$$8 \le 6$$

ومنه $x = 2$ ليس حلاً

نعوض $x = -3$

$$3(-3) + 2 \le -3 + 4$$
$$-9 + 2 \le 1$$
$$-7 \le 1$$

محققة

وبالتالي $x = -3$ أحد حلول المتراجحة

3- المثلث ABC تكبير للمثلث EFG نسبة التكبير k هي نفسها حل المعادلة.

A	$2x + 3 = 4$	B	$2x + 3 = 5$	C	$\boxed{2x + 3 = 6}$

التوضيح: نعلم أن نسبة التكبير $k > 1$

$$2x + 3 = 4 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

والحل هو نسبة تصغير (نحل الاختيار B)

$$2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

والنسبة تطابق

(نحل الاختيار C)

$$2x + 3 = 6 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

وهو نسبة تكبير

بعض الأسئلة ترد كصح أو خطأ:

1- العدد الوحيد الذي مربعه يساويه هو العدد (0) **خطأ**

نفرض العدد x

$$x^2 = x$$
$$x^2 - x = 0$$
$$x(x - 1) = 0$$

إما $x = 0$

أو $x = 1$

3- حلول المتراجحة $-3x > 5$ هي جميع قيم x التي تحقق $x > \frac{-5}{3}$ **خطأ**

$$-3x > 5$$
$$x < \frac{-5}{3}$$

4- إذا كانت $x < 3$ فإن $-x < -3$

خطأ: عند الضرب بعدد سالب تتغير إشارة التراجح

$$-x > -3$$

تمرين هام: دورة طرطوس (2018)

إذا كان $A = \frac{2x-1}{3}$ والمطلوب:

1) هل العدد $\frac{9}{2}$ حلاً للمتراجحة $\frac{2x-1}{3} > 5$

2) حل المتراجحة $\frac{2x-1}{3} > 5$

-1

$$\frac{2x - 1}{3} > 5$$
$$\frac{2\left(\frac{9}{2}\right) - 1}{3} > 5$$
$$\frac{29 - 1}{3} > 5 \Rightarrow \frac{8}{3} > 5$$

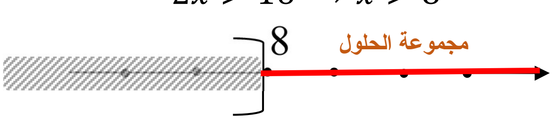
ومنه $x = \frac{9}{2}$ ليس حلاً للمتراجحة

-2

$$\frac{2x - 1}{3} > 5$$

نضرب طرفي المتراجحة بـ 3

$$3\left(\frac{2x - 1}{3}\right) > 5 \times 3$$
$$2x - 1 > 15$$
$$2x > 16 \Rightarrow x > 8$$



ورقة عمل (8)

حل التمارين الآتية:

تمرين (1): لدينا المتراجحة $3x - \frac{5}{2} \le x + \frac{1}{2}$ ، والمطلوب:

1) تحقق فيما إذا كان العدد (1) يحقق المتراجحة السابقة.

2) حل المتراجحة ومثل حلولها على مستقيم الأعداد.

3) هل العدد $\sqrt{3}$ يمثل حلاً للمتراجحة؟ برر إجابتك.

تمرين (2): لدينا المتراجحة $x - 8 < 3x + 2$ والمطلوب:

1) تحقق أي الأعداد -6 , 0 , 3 حلاً لهذه المتراجحة وأيها ليس حلاً.

2) حل المتراجحة $x - 8 < 3x + 2$

3) مثل حلولها على مستقيم الأعداد.

تمرين (3): في الشكل المجاور FED مثلث فيه $ED \parallel AB$

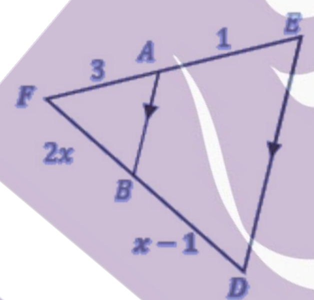
$BD = x - 1 , BF = 2x , AF = 3 , AE = 1$

والمطلوب:

1) اكتب النسب الثلاث للمثلثين FED , FAB

2) جد قيمة x ثم جد BD

3) حل المتراجحة $x - 1 \leq 2x$ ثم مثل حلولها على مستقيم الأعداد.



الحل: ....

تمرين (4): لتكن A , B , C ثلاث نقاط

وباعتبار أن $x > 0$

$$AB = x \, , AC = x + 1 \, , \qquad BC = x + 2$$

1) عيّن قيم x التي تحقق تشكيل المثلث ومثل هذه القيم على مستقيم الأعداد.

2) جد قيم x التي تجعل النقاط A , B , C على استقامة واحدة.

تذكر: ((طول أي ضلع في مثلث أصغر من مجموع الضلعين الأخرين وأكبر من فرقهما))

الحل: ....

تمرين (5): عمر خليل $x+2$ وعمر أخته شام ينقص عن عمره (4) سنوات فإذا كان العدد الدال على جداء عمريهما 60. اوجد عمر كل منهما

الحل: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين (6): ما العدد الذي إذا جمعنا ثلاثة أرباعه مع خمسيه كان الناتج 460

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين (7): المثلث ABC قائم في B فيه $AB=x$ ، $AC=x+2$ ، $BC=6$. احسب x

الحل: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين (8): الأن عمر سامر 11 سنة وعمر غيث 26 سنة بعد كم سنة يصبح عمر غيث مساويا ضعفي عمر سامر

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

انتهت الوحدة الثالثة

4 الوحدة الرابعة-جبر

المعادلة الخطية بمجهولين: هي معادلة من الشكل

$ax + by = c$ حيث a,b,c أعداد معلومة

و a,b لا يساويان الصفر معا.

إيجاد حلول لمعادلة خطية

نعطي قيمة اختيارية لأحد المجهولين فتؤول المعادلة الى معادلة ذات مجهول واحد نحلها ونوجد قيمة الآخر.

أوجد ثلاثة حلول للمعادلة الخطية التالية

$$2x + 3y - 6 = 0$$

الحل: $\boxed{2x + 3y = 6} \quad (1)$

نفرض $x = \boxed{0}$ ونعوض في (1)

$$2(0) + 3y = 6$$

$$3y = 6$$

$y = \frac{6}{3}$ ومنه $y = \boxed{2}$

حل أول $\{x = 0 \text{،} y = 2\}$

نفرض $y = \boxed{0}$ ونعوض في (1)

$$2x + 3(0) = 6$$

$$2x = 6$$

$x = \frac{6}{2}$ ومنه $x = \boxed{3}$

حل ثاني $\{x = 3 \text{،} y = 0\}$

نفرض $y = \boxed{-4}$ ونعوض في (1)

$$2x + 3(-4) = 6$$

$$2x - 12 = 6$$

$$2x = 6 + 12$$

$$2x = 18$$

$x = \frac{18}{2}$ ومنه $x = \boxed{9}$

حل ثالث $\{x = 9 \text{،} y = -4\}$

التحقق من حلول معادلة خطية

للتحقق من حلول معادلة خطية
نعوض قيمة x وقيمة y في المعادلة الخطية
إن تحققت المساواة يكون حل لها والعكس بالعكس

مثال: هل $(x = 9 \text{،} y = -4)$

حل للمعادلة الخطية $2x + 3y - 6 = 0$

الحل: $2(9) + 3(-4) - 6 = 0$

$$18 - 12 - 6 = 0$$

$0 = 0$ المساواة محققة فهو حل للمعادلة

مثال(1): لتكن المعادلة $3x + y = 5$

أي الثنائيات $(1,2)$, $(0,5)$, $(8,-4)$ حلاً للمعادلة وأيها ليس حلاً.

الحل:

نعوض الثنائية $(1,2)$ في المعادلة

نعوض $y = 2 , x = 1$

$$3(1) + 2 = 5$$

$$3 + 2 = 5$$

محققة $5 = 5$

وبالتالي الثنائية $(1,2)$ حلاً للمعادلة.

ونعوض الثنائية $(0,5)$ في المعادلة $y = 5 , x = 0$

$$3(0) + 5 = 5$$

محققة $5 = 5$

وبالتالي الثنائية $(0,5)$ حلاً للمعادلة

نعوض الثنائية $(8,-4)$ في المعادلة

$$x = 8 , y = -4$$

$$3(8) + (-4) = 5$$

$$24 - 4 = 5$$

$$20 \neq 5$$

الثنائية $(8,-4)$ ليست حلاً للمعادلة.

حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x , y

الطريقة الأولى: حل جملة معادلتين بالحذف بالتعويض

1. نكتب أحد المجهولين من إحدى المعادلتين بدلالة الآخر ونسميها (3).(تابع حلول)
2. **نعوض قيمة هذا المجهول في المعادلة الأخرى فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.**
3. نحل المعادلة ذات المجهول الواحد الناتجة فينتج عنه أحد المجهولين.
4. نعوض قيمة هذا المجهول في المعادلة (3) فنحصل على قيمة المجهول الآخر.

ملاحظة:

للتحقق من الحل: نعوض قيمة x وقيمة y في المعادلتين فإن تحققت المساواة في كلتا المعادلتين فالثنائية هي الحل المشترك والعكس بالعكس

حل الجملة: $\begin{cases} x+2y=8 & (1) \\ 3x-y=3 & (2) \end{cases}$

الحل: من المعادلة (1) نوجد تابع حلول x بدلالة y كما يلي $\boxed{x=8-2y}$ (3)

نعوض في المعادلة (2)

$$3(8-2y)-y=3$$

$$24-6y-y=3$$

$$-6y-y=3-24$$

$$-7y=-21$$

ومنه $y=\boxed{3}$

نعوض في (3)

$$x=8-2(3)$$

$x=8-6=\boxed{2}$ الحل المشترك هو الثنائية $(2,3)$

للتحقق من صحة الحل:

نعوض $(3,2)$ في المعادلتين

$$x+2y=8$$

$$2+2(3)=8$$

$2+6=8$ محققة

$$3x-y=3$$

$$3(2)-3=6-3$$

$6-3=3$ محققة فالثنائية $(3,2)$ حل للجملة

مثال (1): لدينا المعادلتين من الدرجة الأولى

$$\boldsymbol{2x-y=5} \quad ...①$$

$$\boldsymbol{x+y=4} \quad ...②$$

بيّن أي الثنائيات $(2,-1)$, $(3,1)$ تحقق حلاً للجملة وأنها لا تحقق.

الحل: الثنائية $(2,-1)$ نعوض الثنائية في المعادلة ①

$$x=2 \quad ,y=-1$$

$$2(2)-(-1)=5$$

$4+1=5 \Rightarrow 5=5$ محقق

نعوض في المعادلة ② : $2-1=4$

$1\neq 4$ غير محققة

وبالتالي الثنائية $(2,-1)$ ليست حلاً للجملة.

الثنائية $(3,1)$ نعوض في المعادلة ①

$2(3)-1=5 \Rightarrow 5=5$ محقق

نعوض في المعادلة ②

$3+1=4 \Rightarrow 4=4$ محققة

الثنائية $(3,1)$ حلاً للجملة لأنها حققت المعادلتين معاً

مثال (2): لدينا جملة المعادلتين

$$\boldsymbol{2x+3y=1} \quad ...①$$

$$\boldsymbol{3x+5y=6} \quad ...②$$

بيّن أي الثنائيات $(-1,2)$, $(-13,9)$ حلاً للجملة وأيّها ليس حلاً.

$(-1,2)$ نعوض في ①

$$2(-1)+3(2)=1$$

$$-2+6=1 \Rightarrow 4\neq 1$$

وبالتالي الثنائية $(-1,2)$ ليست حلاً للجملة

$(-13,9)$ نعوض في المعادلة ①

$$2(-13)+3(9)=1$$

$-26+27=1 \Rightarrow 1=1$ محقق

نعوض في المعادلة ②: $3(-13)+5(9)=6$

$$-39+45=6 \Rightarrow 6=6$$

محقق وبالتالي الثنائية $(-13,9)$ حلاً للجملة.

مثال (1): لتكن جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} y = 15 + 3x & (1) \\ -3x + 4\,y = 0 & (2) \end{cases}$$

أوجد حل جملة جبرياً.

نعوض (1) في 2

$$-3x + 4(15 + 3x) = 0$$
$$-3x + 60 + 12x = 0$$
$$+9x = -60$$
$$\Rightarrow x = \frac{-60}{9} = \frac{-20}{3}$$

نعوض في (1)

$$y = 15 + 3\left(\frac{-20}{3}\right)$$
$$y = 15 - 20$$
$$y = -5$$

حل الجملة $\left(\frac{-20}{3}, -5\right)$

مثال (2): حل الجملة

$$\begin{cases} x + 4y = 14 & (1) \\ x + 11\,y = 35 & (2) \end{cases}$$

من (2) نجد:

$$x = 35 - 11y \;\ldots\; (3)$$

نعوض (3)في (1)

$$35 - 11y + 4y = 14$$
$$-7y = 14 - 35$$
$$-7y = -21$$
$$y = \frac{-21}{-7} = 3$$

نعوض في (3)

$$x = 35 - 11(3)$$
$$x = 35 - 33 \Rightarrow x = 2$$

حل الجملة $(2, 3)$

مثال (3): **لدينا الجملة**

$$\begin{cases} 4x + y = -14 & (1) \\ 3x + 2y = -8 & (2) \end{cases}$$

حل جملة المعادلتين جبرياً.

من (1) نجد

$$y = -14 - 4x \;\ldots\; ③$$

نعوض في (3) في (2)

$$3x + 2(-14 - 4x) = -8$$
$$3x - 28 - 8x = -8$$
$$-5x = -8 + 28$$
$$-5x = 20$$
$$\Rightarrow x = \frac{20}{-5} = -4$$

نعوض في (3)

$$y = -14 - 4(-4)$$
$$y = -14 + 16$$
$$y = 2$$

حل الجملة $(-4, 2)$

مثال (4): **لتكن جملة المعادلتين**

$$\begin{cases} x = 80 - y & (1) \\ x - y = 4 & (2) \end{cases}$$

أوجد حل الجملة جبرياً

لاحظ المعادلة (1) جاهزة للتعويض في (2)

نعوض 1 في 2

$$80 - y - y = 4$$
$$-2y = 4 - 80$$
$$-2y = -76$$
$$y = \frac{-76}{-2} = 38$$

نعوض في (1)

$$x = 80 - 38 \Rightarrow x = 42$$

حل الجملة $(42, 38)$

الطريقة الثانية: حل جملة معادلتين بالحذف بالجمع

1. نضع المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف
2. **نرتب المعادلتين حيث كل حدين متشابهين تحت بعضهما**
3. **نجعل أمثال أحد المجهولين في المعادلتين عددان متعاكسان**
4. **بجمع المعادلتين طرفاً لطرف يتم حذف أحد المجهولين**
5. نحل المعادلة ذات المجهول نجد قيمة أحد المجهولين
6. **نعوض قيمة المجهول في إحدى المعادلتين نجد الاخر**

مثال: حل الجملة:
$$\begin{cases} x + 2y = 8 & (1) \\ 3x - y = 3 & (2) \end{cases}$$

الحل: نضرب طرفي المعا ① بالعدد **(-3)**

$$\begin{array}{r} -3x - 6y = -24 \\ 3x - y = 3 \\ \hline -7y = -21 \end{array} +$$
وبالجمع نجد

ومنه $y = \dfrac{-21}{-7}$ ، $y = \boxed{3}$

نعوض قيمة y ① $x + 2(3) = 8$

نجد $x + 6 = 8$ ومنه $x = \boxed{2}$

الحل المشترك للجملة هو الثنائية $(2,3)$

مثال (1): حل الجملة

$$\mathbf{4x - 3y = 32} \quad \dots \ ①$$
$$\mathbf{-2x + 3y = 2} \quad \dots \ ②$$

نلاحظ أن أمثال المجهول y في المعادلتين هو $+3$, -3 بالجمع يمكن التخلص من y وإيجاد x .

$$\begin{array}{r} 4x - 3y = 32 \\ -2x + 3y = 2 \\ \hline +2x + 0 = 34 \end{array} +$$

$$2x = 34 \Rightarrow x = \frac{34}{2} = 17$$

نعوض x في 1

$$4(17) - 3y = 32$$
$$68 - 3y = 32$$
$$-3y = 32 - 68$$
$$-3y = -36$$
$$y = \frac{-36}{-3} = 12$$

حل الجملة $(17\,,12)$

مثال (2): أوجد حل الجملة

$$\mathbf{5x + 4y = 60} \quad \dots \ ①$$
$$\mathbf{-5x - 3y = 105} \dots \ ②$$

بجمع جملة المعادلتين:

$$\begin{array}{r} 5x + 4y = 60 \\ -5x - 3y = 105 \\ \hline 0 + y = 165 \end{array}$$

نعوض في (1)

$$5x + 4(165) = 60$$
$$5x = 60 - 660$$
$$5x = -600 \Rightarrow x = -120$$

حل الجملة $(-120,165)$

مثال (3): لدينا الجملة:

$$\mathbf{6x + 7y = 7} \quad \dots \ ①$$
$$\mathbf{-3x + 2y = -31} \ \dots \ ②$$

أوجد حل الجملة جبرياً

نلاحظ أنه لا يوجد أمثال متعاكسة

لذلك نلجأ إلى ضرب إحدى المعادلات بعدد لحذف أحد المجاهيل عند الجمع.

* نضرب المعادلة (2) بـ2

$$6x + 7y = 7$$
$$+2(-3x + 2y) = 31 \times 2$$

$$\begin{array}{r} 6x + 7y = 7 \ \dots \ ① \\ -6x + 4y = -62 \dots \ ② \\ \hline 0 + 11y = -55 \end{array} +$$

انتباه!!! نضرب طرفي المعادلة

$$y = \frac{-55}{11} = -5$$

نعوض في (1)

$$6x + 7(-5) = 7$$
$$6x - 35 = 7$$
$$6x = 42 \Rightarrow x = 7$$

حل الجملة $(7\,,-5)$

✐ **مثال (4): حل الجملة ثم اكتب المعادلة ① *بالصيغة*** $y = mx + p$ ثم تحقق أن الثنائية $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ حل للمعادلة ام ليس حلا لها .

$$-2x + 3y = 5 \quad \dots ①$$

$$5x + 9y = -7 \dots ②$$

نضرب المعادلة (1) بـ -3

$$-3(-2x + 3y) = 5 \times -3$$

$$+6x - 9y = -15 \dots (1)`$$

$$5x + 9y = -7 \dots (2) \quad +$$

$$11x + 0 = -22$$

$$\Rightarrow 11x = -22 \Rightarrow x = -2$$

نعوض في 2 نجد $5(-2) + 9y = -7$

$$-10 + 9y = -7$$

$$9y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

حل الجملة $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$

$$-2x + 3y = 5$$

$$3y = 2x + 5$$

$$\boxed{y = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2 \times (-2)}{3} + \frac{5}{3}$$

$\frac{1}{3} = \frac{-4}{3} + \frac{5}{3}$ محققة

✐ **مثال (5): حل الجملة جبرياً**

$$4x + y = -14 \dots ①$$

$$3x + 2y = -8 \dots ②$$

نضرب المعادلة (1) بـ -2

$$-8x - 2y = +28 \dots (1)`$$

$$3x + 2y = -8 \quad +$$

$$-5x = 20 \Rightarrow x = -4$$

نعوض في (1) نجد: $4(-4) + y = -14$

$$\Rightarrow y = 2$$

حل الجملة $(-4, 2)$

ورقة عمل (9)

حل التمارين الآتية:

* باستخدام إحدى الطريقتين الحذف بالتعويض أو الحذف بالجمع

تمرين (1): لدينا الجملة

$$x + 4y = 14 \quad \dots ①$$

$$x + 11y = 35 \dots ②$$

1) بيّن أي الثنائيات $(2, 3)(-2, -4)$ و $(-2, 4)$ حلاً للجملة وأيها ليس حلاً.

2) حل جملة المعادلتين جبرياً.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين (2): لدينا الجملة

$$y = x$$

$$x + y = 4$$

1) بيّن أي الثنائيات $(1\,,1)$ و $(2\,,2)$ حلاً للجملة وأيها ليس حلاً.

2) حل جملة المعادلتين جبرياً.

تمرين (3) : لدينا الجملة

$$x = 3y - 1 \ldots ①$$

$$y = 2x - 3 \ldots ②$$

1) بين أي الثنائيات $(0\,,1)$ و $(2\,,1)$ حلاً للجملة وأيها ليست حلاً.

2) حل جملة المعادلتين ① و ② جبرياً.

استخدام حل جملة معادلتين خطيتين في حل المسائل

1- نفرض أحد المجهولين x والآخر y
2- نشكل جملة معادلتين
3- نحل الجملة
4- نوجد المطلوب في المسألة.

مثال1: اشترت سارة ستة دفاتر وخمسة أقلام بمبلغ 570 واشترى شقيقها سامر ثلاثة دفاتر وسبعة أقلام بمبلغ 555 .ما سعر الدفتر ؟ وما سعر القلم؟

الحل: نفرض سعر الدفتر x ونفرض سعر القلم y

نشكل جملة :
$$\begin{Bmatrix} 6x+5y=570 & (1) \\ 3x+7y=555 & (2) \end{Bmatrix}$$

نضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد -2
$$\begin{Bmatrix} 6x+5y=570 & (1) \\ -6x-14y=-1110 & (2) \end{Bmatrix}$$

وبالجمع نجد $-9y=-540$

ومنه $y=60$

نعوض في المعادلة (1): $6x+5(60)=570$

$6x+300=570$

$6x=570-300$

$6x=270$

$x=45$

فيكون سعر الدفتر الواحد $x=45$

وسعر القلم الواحد $y=60$

مسألة (1): جد عددين مجموعهما 80 والفرق بينهما 4

نفرض العدد الأول x والعدد الثاني y

مجموعهما 80 أي:

$$x+y=80 \ldots ①$$

فرقهما 4 أي:

$$x-y=4 \ldots ②$$

نحل الجملة

$$\begin{array}{r} x+y=80 \ \ldots ① \\ x-y=4 \ \ \ldots ② \\ \hline 2x=84 \Rightarrow x=42 \end{array} +$$

نعوض في 1 نجد: $42+y=80$

$\Rightarrow y=80-42$

$y=38$

العدد الأول 42 / العدد الثاني 38

مسألة (2): جد عددين مجموعهما 4 وفرقهما 80

نفرض العدد الكبير x والعدد الصغير y

$$\begin{array}{r} x+y=4 \ldots ① \\ x-y=80 \ldots ② \\ \hline 2x=84 \Rightarrow x=42 \end{array} +$$

نعوض في (1) نجد $42+y=4$

$y=-38$

العدد الكبير 42 العدد الصغير -38

مسألة(3):رسم عدنان مثلثات ومضلعات خماسية عددها 32 إذا علمت أن مجموع أضلاع المثلثات والمضلعات الخماسية 124 أوجد عدد المثلثات وعدد الخماسية.

نفرض عدد المثلثات x وعدد المضلعات لخماسية y

$-3(x+y=32) \ldots ①$

$3x+5y=124 \ldots ②$

نضرب ① بالعدد -3 ونجمع

$$\begin{array}{r} -3x-3y=-96 \\ 3x+5y=124 \\ \hline 2y=28 \end{array} +$$

ومنه $y=\frac{28}{2}=14$ نعوض في ①

$x+14=32 \Rightarrow x=18$

عدد المثلثات 18 وعدد المضلعات الخماسية 14

مسألة (4):

في إحدى المزارع أرانب ودجاجات، عدد رؤوس هذه الحيوانات 28 وعدد قوائمها 76، ما عدد الدجاجات في هذه المزرعة؟ وما عدد الأرانب؟

. نفرض عدد الدجاجات x وعدد الأرانب y

$$\begin{Bmatrix} x+y=28 & (1) \\ 2x+4y=76 & (2) \end{Bmatrix}$$

نضرب بطرفي المعادلة (1) بالعدد $\boxed{-2}$ نجد

$$\begin{array}{r} -2x-2y=-56 \\ 2x+4y=76 \\ \hline 2y=20 \end{array}$$ وبالجمع نجد

ومنه $y=10$

نعوض في (1)نجد $x+10=28$

وبالحل نجد $x=18$

عدد الدجاجات 18 وعدد الأرانب 10

معادلة مستقيم

المستقيم الذي لا يمر من مبدأ الإحداثيات معادلته

$\boxed{ax+by=c}$ و $c\neq 0$

أولاً: معرفة (انتماء) وقوع نقطة على المستقيم

سير العمل: *نعوض إحداثيات النقطة في معادلة المستقيم إن تحققت المساواة فهي تقع على المستقيم والعكس بالعكس*

تمرين: هل النقطة $A(-3\ ,\ 2)$ تقع على المستقيم d الممثل بالمعادلة الخطية $3y=6x-4$

الحل: $3(2)=6(-3)-4$

$6=-18-4$

$6=-22$

المساواة ليست صحيحة

فالنقطة A لا تقع على المستقيم

ثانيا:معرفة رسم المستقيم الذي لايمر من المبدأ

سير العمل: لرسم المستقيم نوجد نقطتين ونحددهما على المَعلمْ ونصل بينهما بمستقيم نجد المطلوب

تمرين: ارسم المستقيم L الممثل بالمعادلة الخطية التالية

$$4x-3y-12=0$$

الحل: نجعل المجاهيل في طرف والمعاليم في طرف

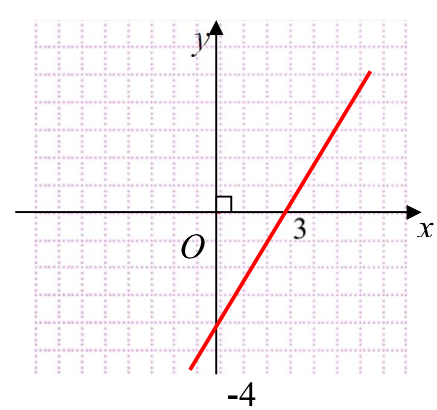
نفرض $x=0$ فتكون y هي ناتج قسمة الحر على المقيد

نفرض $y=0$ فتكون x هي ناتج قسمة الحر على المقيد

$$4x-3y=12$$

x	0	3
y	-4	0

نرسم المَعلمْ ونعيّن النقطتين ونرسم مستقيم يصل بين النقطتين فيكون هو المستقيم المطلوب.



المستقيم الذي يمر من مبدأ الإحداثيات

معادلته $\boxed{ax+by=0}$ **والشكل العام**

سير العمل: كي نرسم المستقيم نوجد نقطتين ونحددهما على المَعلمْ ونصل بينهما بمستقيم نجد المطلوب

تمرين: ارسم المستقيم L الممثل بالمعادلة الخطية التالية

$$4x-3y=0$$

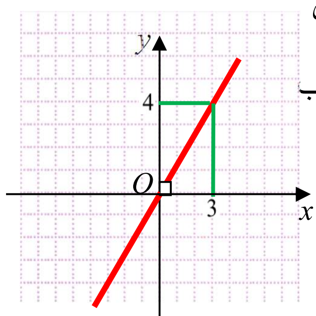
الحل: نجعل المعادلة بالشكل $ax=by$ ثم بالجدول

نعطي لـ x قيمة أمثال y ونعطي لـ y قيمة أمثال x

$$3y=4x$$

x	0	3
y	0	4

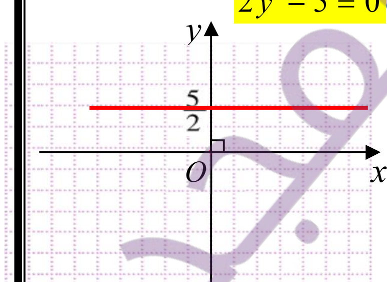
نرسم المَعلمْ ونعيّن النقطتين ونرسم مستقيم يصل بينهما فيكون هو المستقيم المطلوب



المستقيم الذي يوازي محور الفواصل معادلته

$y=p$

تمرين : ارسم المستقيم $2y-5=0$



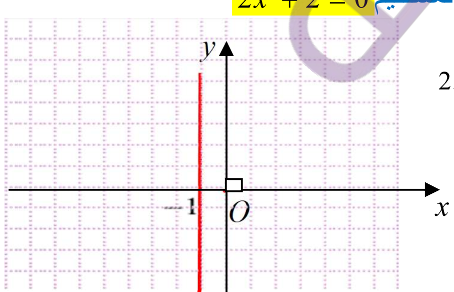
الحل: $2y=5$

$y=\frac{5}{2}$

المستقيم الذي يوازي محور التراتيب معادلته

$x=c$

تمرين : ارسم المستقيم $2x+2=0$



الحل: $2x=-2$

$x=\frac{-2}{2}$

$x=-1$

حل جملة معادلتين خطيتين بيانياً

1. نرسم المستقيم الممثل للمعادلة الأولى
2. نرسم المستقيم الممثل للمعادلة الثانية
3. إذا تقاطع المستقيمين في نقطة ما $M(x,y)$

فهي الحل المشترك لجملة المعادلتين

وإذا لم يتقاطع المستقيمين بنقطة فهما متوازيين

وإذا اشترك المستقيمان بجميع النقط فهما منطبقين

مثال (1): أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين التاليتين بيانياً:

$$\begin{cases} x+2y-6=0.......(1) \\ 2x-y-2=0.......(2) \end{cases}$$

الحل:

المعادلة (1) $x+2y-6=0$

وهي معادلة مستقيم لا يمر من المبدأ

$$x+2y=6$$

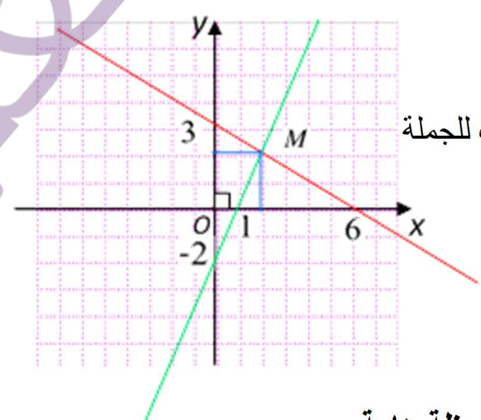
X	0	6
Y	3	0

المعادلة (2) $2x-y-2=0$

وهي معادلة مستقيم لا يمر من المبدأ

$$2x-y=2$$

X	0	1
Y	-2	0



الحل المشترك للجملة هو $M(2,2)$

لا تنسى: ملاحظة هامة:

1) إذا قطع المستقيم محور الفواصل فهو يقطعه في نقطة ترتيبها صفر

2) إذا قطع المستقيم محور التراتيب فهو يقطعه في نقطة فاصلتها صفر

مسألة1: ليكن $(d), (\Delta)$ مستقيمان معادلتيهما

$$d: y=2x+2$$
$$\Delta: y=x$$

والمطلوب:

1) تحقق أيّ النقطتين $(2,2)$ و $(-1,0)$ تنتمي إلى المستقيم (d), و أيّها لا تنتمي.

2) حل جملة المعادلتين جبرياً.

3) إذا كانت A نقطة تقاطع المستقيم (d) مع محور الفواصل و B نقطة تقاطع المستقيم (d) مع محور التراتيب جدْإحداثيات B و A.

4) في معلم متجانس ارسم $(d), (\Delta)$, ثمّ استنتج إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.

1) احسب مساحة المثلث OAB.

الحل:

$d: y=2x+2$	$d: y=2x+2$
$2=2(2)+2$	$0=2(-1)+2$
$2=4+2$	$0=-2+2$
$2=6$	$0=0$
المساواة غير محققة	المساواة محققة
فالنقطة لا تنتمي لـ d	فالنقطة تنتمي لـ d

2). الحل جبريا:

$$\begin{cases} d: y=2x+2 & (1) \\ \Delta: y=x & (2) \end{cases}$$

من(2) نعوض في (1):

$$x=2x+2$$
$$-2=2x-x$$
$$x=\boxed{-2}$$

نعوض في (2) $y=\boxed{-2}$

الحل المشترك جبريا: $(x=-2, y=-2)$

3) $d: y=2x+2$

$y=0$ ومنه $x=\boxed{-1}$ ومنه $A(-1,0)$

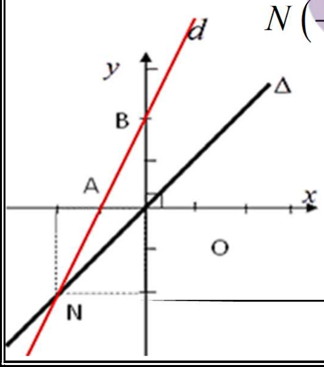
$x=0$ ومنه $y=\boxed{2}$ ومنه $B(0,2)$

4) $\boxed{d: y=2x+2}$ $\boxed{\Delta: y=x}$

x	0	-1
y	2	0

x	0	2
y	0	2

الحل المشترك بيانيا $N(-2,-2)$



5) $S_{OAB}=\frac{OA\times OB}{2}$

$S_{OAB}=\frac{1\times 2}{2}=\boxed{1}$

مثال (2): ليكن Δ مستقيماً $2x - 3y = 6$

1) ارسم Δ في معلم إحداثيات متجانس

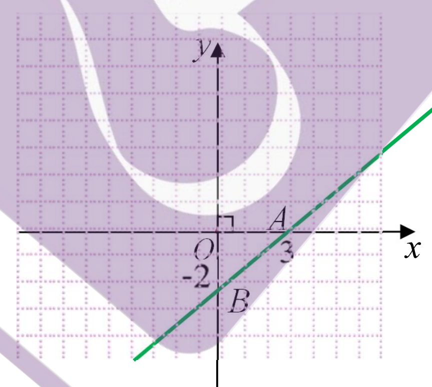
2) هل النقطة $B(0,-2)$ تنتمي للمستقيم Δ أم لا

3) لتكن A نقطة تقاطع المستقيم Δ مع محور الفواصل وB نقطة تقاطع المستقيم Δ مع محور التراتيب.

أوجد مساحة $O\hat{A}B$ واحسب $sinO\hat{B}A$

الحل: 1) نوجد نقاط تقاطع Δ مع محوري الإحداثيات

x	y	النقطة
0	-2	$(0,-2)$
3	0	$(3,0)$



2- نعوض الثنائية $(0,-2)$ في المستقيم

$$2(0) - 3(-2) = 6$$

$$6 = 6$$

ومنه $B \in \Delta$

$S_{O\hat{A}B} = \dfrac{AO \times BO}{2} = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3$ وحدة مربعة

المثلث $O\hat{A}B$ قائم في O حسب فيثاغورث

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2$$

$$(AB)^2 = (3)^2 + (2)^2$$

$$(AB)^2 = 9 + 4$$

$$(AB)^2 = 13$$

بالجذر $AB = \sqrt{13}$

$$S_{O\hat{B}A} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{OA}{AB} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

مثال (3): ليكن d الممثل بالمعادلة

$$d: 3\left(x - \frac{2}{3}y\right) - 6 = 0$$

1) ارسم المستقيم d في معلم متجانس.

2) هل النقطة $A(1,2)$ تقع على المستقيم d

3) بفرض d يقطع المحورين الإحداثيين $xx^\backprime, yy^\backprime$ ، A , B على الترتيب احسب مساحة المثلث AOB

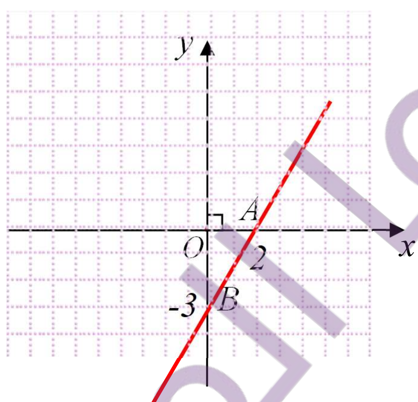
الحل:

1) نرسم المستقيم d الذي معادلته

$$3\left(x - \tfrac{2}{3}y\right) - 6 = 0$$

$$3x - 2y = 6$$

x	y	النقطة
0	-3	$(0,-3)$
2	0	$(2,0)$



2- نعوض $A(1,2)$ في معادلة المستقيم

$$3(1) - 2(2) = 6$$

$$3 - 4 = 6 \Longrightarrow -1 \neq 6$$

ومنه $A \notin d$

$S_{AOB} = \dfrac{AO \times BO}{2} = \dfrac{2 \times 3}{2} = 3$ وحدة مربعة

ورقة عمل (11)

تمرين (1): ليكن المستقيم Δ الذي معادلته

$$\Delta: x + y = 1$$

1) ارسم المستقيم الذي معادلته

$$\Delta: x + y = 1$$

2) ليكن A نقطة تقاطع Δ مع $xx`$ و B نقطة تقاطع $\Delta$ مع yy`

احسب مساحة المثلث AOB واحسب $\cos O\hat{A}B$

الحل:

....

تمرين (2): ليكن d المستقيم الذي معادلته

$$d: 2x - y = 0$$

1) ارسم المستقيم d في معلم إحداثيات متجانس.

2) بين أي النقاط $C(0,1), B(-2,-4), A(1,2)$ تنتمي للمستقيم d وأيها لا تنتمي.

اكتب y بدلالةx من معادلة المستقيم $d: 2x - y = 0$

....

تمرين (3):

ليكن Δ مستقيماً معادلته

$$\Delta: 2x - 6 = 0$$

1) ارسم المستقيم Δ على محور إحداثيات متجانس

2) ليكن d مستقيماً معادلته

$$d: 3y = 9$$

ارسم d على محور إحداثيات متجانس.

تمرين (4):

لتكن المعادلة

$$\Delta: x + by = 1$$

1) أوجد b حتى تنتمي النقطة $(2, -1)$ للمستقيم Δ

2) ارسم Δ في معلم متجانس إحداثيات متجانس.

مثال (2): لدينا الجملة

$$d: 3x + y = 5 \;...①$$

$$\Delta: x = -2y \quad ....$$

1- بين إذا كانت النقطة $A(2,-1)$ حلاً للجملة أم ليست حلاً

2- أرسم Δ و d في معلم إحداثيات متجانس

الحل:

1- نعوض الثنائية $(2,-1)$ في معادلة d

محقق $3(2) - 1 = 5 \Rightarrow 5 = 5$

نعوض الثنائية $(2,-1)$ في Δ

$2 = -2(-1)$

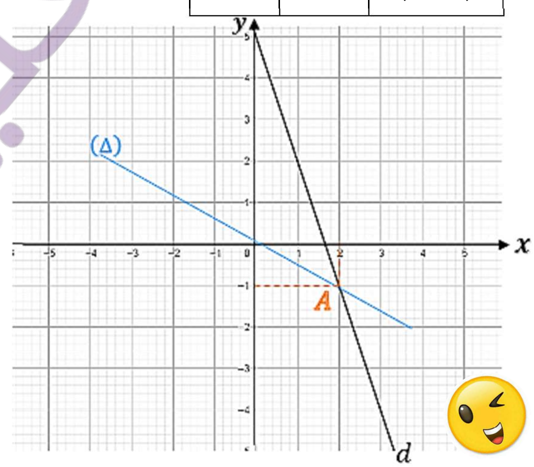
محقق $2 = 2$ ومنه الثنائية $(2,-1)$ حلاً للجملة.

2- نرسم Δ الذي معادلته $\Delta: x = -2y$

x	y	النقطة
0	0	$(0,0)$
2	-1	$(2,-1)$

نرسم d الذي معادلته $d: 3x + y = 5$

x	y	النقطة
0	5	$(0,5)$
$\frac{5}{3}$	0	$\left(\frac{5}{3},0\right)$



فكرة:

نقول عن معادلتين أنهما متكافئين إذا نتجت إحداهما عن الأخرى بضربها بعدد وللمعادلتين المتكافئتين عدد غير منتهي من الحلول وتمثليها البياني خطين منطبقين.

تمارين داعمة للوحدة الرابعة جبر

تمرين (1): ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادليتهما على التوالي :

$$d: y = x + 1$$

$$\Delta = : y = -x + 3$$

1- حل جملة المعادلتين جبرياً

2- احسب احداثيات نقاط تقاطع (d) مع (Δ) مع المحورين الاحداثيين

3- في معلم متجانس ارسم (d) و (Δ)واستنتج احداثي نقطة تقاطع المستقيمين

4- إذا كانت N نقطة تقاطع المستقيمين, d و Δ. وA نقطة تقاطع Δ مع محور الفواصل و H نقطة تقاطع المستقيم d مع محور الفواصل احسب مساحة ANH

الحل : -1

$$\begin{array}{l} d: y = x + 1 \;...\; (1) \\ \Delta: y = -x + 3 = \cdots (2) \\ \hline 2y = 4 \Rightarrow y = 2 \end{array} \quad +$$

نعوض y في نجد $2 = x + 1$ ومنه $x = 1$

الحل المشترك $(1,2)$

-2 نقاط تقاطع d مع محوري الاحداثين

x	y	النقطة
0	1	$(0,1)$
-1	0	$(-1,0)$

نقاط تقاطع (Δ) مع محوري الاحداثيات

x	y	النقطة
0	3	$(0,3)$
3	0	$(3,0)$

$$S_{NAH} = \frac{HA \times NM}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

التفاؤل وقت الفشل ذكاء، والثقة في النفس وقت اليأس قوة، والإصرار برغم المعوقات نجاح بحد ذاته.

تمرين (2): ليكن (d_1) و (d_2) مستقيمان معادلة كل منهما

$$d_1: x + 2y = 8$$
$$d_2: 3x - y = 3$$

① حل جبرياً جملة المعادلتين.

② عين نقاط تقاطع d مع المحورين الاحداثين.

③ في معلم متجانس ارسم كلاً من (d_1) و (d_2) ثم استنتج الحل المشترك بينهما بيانياً.

④ عين نقطة تقاطع Δ المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مع المستقيم (d_1)

الحل :

$x + 2y = 8 \quad \ldots ①$

$2(3x - y = 3) \ldots ②$

نضرب المعادلة ② بـالعدد 2

$$\begin{array}{r} x + 2y = 8 \\ 6x - 2y = 6 \\ \hline 7x = 14 \end{array} +$$

$$\Longrightarrow x = 2$$

نعوض في ①: $2 + 2y = 8$

$2y = 6$ ومنه $y = 3$

الحل المشترك $(2,3)$

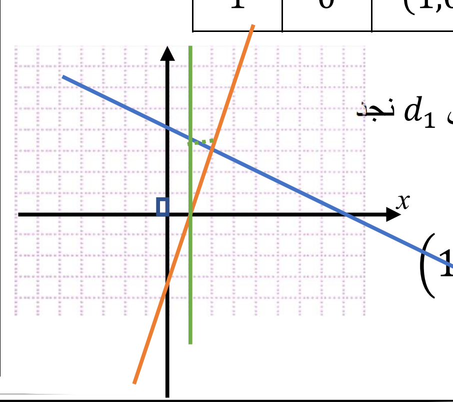
-2 نرسم d_1 الذي معادلته $x + 2y = 8$

x	y	النقطة
0	4	$(0,4)$
8	0	$(8,0)$

نرسم d_2 الذي معادلته $3x - y = 3$

x	y	النقطة
0	-3	$(0,-3)$
1	0	$(1,0)$

-3



$x = 1$ نعوض في d_1 نجد

$$y = \frac{7}{2}$$

نقطة التقاطع $\left(1, \frac{7}{2}\right)$

ورقة عمل (12)

تمرين (1): ليكن (d) و (Δ) مستقيمان معادليتهما

$$d: y - x = 0$$
$$\Delta: y + x = 6$$

1- حل جملة المعادلتين جبرياً

2- احسب احداثيات نقاط تقاطع (d) مع (Δ) مع المحورين الاحداثيين

3- في معلم متجانس ارسم كلاً من المستقيمين (d) و (Δ)

4- إذا كانت A نقطة تقاطع المستقيم Δ مع محور الفواصل و B نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (d) احسب مساحة المثلث AOB

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

انتهت الوحدة الرابعة

العلاقة

المجموعة: (هي مفهوم أولي يدل على التجمع)

مثال1 : قواسم العدد 6

مثال2: الحروف المنقوطة في كلمة عربي ...الخ

والمجموعة ممكن أن تحوي عنصر أو أكثر أو عدد لانهائي من العناصر أو لا تحوي أي عنصر (خالية)

تمثل المجموعات بمخطط (فن) يمنع تكرار العناصر فيه

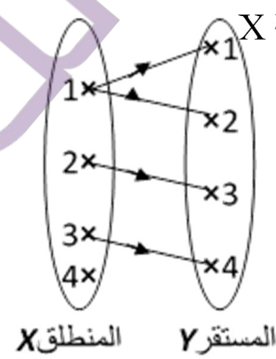
مثال : لتكن $X = \{1, 2, 3, 4\}$

ولتكن $Y = \{1, 2, 3, 4\}$

نعرف علاقة بالشكل :

كل عنصر من المجموعة X يرتبط بالعدد الذي يليه من المجموعةY

تمثيل العلاقة سهمياً ⟵



تعريف العلاقة: هي ارتباط بين مجموعتين نسمي إحداهما منطلق والأخرى مستقر

مكونات العلاقة

1- منطلق العلاقة

2- مستقر العلاقة

3- قاعدة ربط العلاقة(سبب الارتباط)أو شرطه

التابع

التابع ((هو علاقة يرتبط بكل عنصر من المنطلق يرتبط به عنصر واحد فقط من المستقر))

ثم طلب المساعدة من الطلاب لتميز هذه المجموعات التي تتصف بتلك الصفة

والوصول الى تسمية كل علاقة تتميز بهذه الصفة نسميها تابع ونعرفه بالشكل

التابع : هو علاقة يرتبط كل عنصر من منطلقها بعنصر واحد فقط من مستقرها

مكونات التابع

1- المنطلق : هو مجال تعريف التابع (مجموعة القيم التي يمكن للمتغيّر أخذها)

2- المستقر: هو(المجموعة التي تحوي قيّم التابع)

3- المستقر الفعلي : هو (مجموعة قيّم التابع)

4- قاعدة الربط : شرط الارتباط

اعطاء اسم للتابع f, g, h

وكيفية القراءة للتابع بالترميز

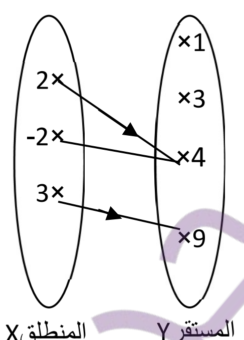
في الشكل المجاور عرفنا تابع

منطلقه $X = \{2, -2, 3\}$

مستقرها $Y = \{1, 3, 4, 9\}$

وقاعدة ربطه بالشكل

$f : X \to Y : f(x) = x^2$



هذه الفكرة ليست من المنهاج انما هي حسب اعتقادي توطئة للدخول للتابع

ثم الانتقال الى ألة انتاج الاعداد بأمثلة جديدة والتعزيز

أعزكم الله وأغدق عليكم من فيض عطائه

5 الوحدة الخامسة-جبر

❶ **مفهوم التابع:** هو اجرائية من الشكل

$\boldsymbol{f(x) = y}$ بحيث يُقرن كل قيمة للمتحول $\boldsymbol{x}$

قيمة وحيدة للمتحول $\boldsymbol{f(x)}$.

❷ مكونات التابع:

1) المنطلق: هو مجموعة قيم x ويُطلق عليه مجموعة تعريف التابع .

2) المستقر: وهي مجموعة قيم y ومنه نحدد أكبر قيمة للتابع وأصغر قيمة للتابع .

3) اسم التابع: يُرمز لتابع بأحرف صغيرة

مثل: $f\ ,h\ ,g\ ,h$

4) علاقة الربط: وهي الصيغة التي تربط المتحول y بالمتحول x .

مثال: ليكن لدينا التابع $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$

لاحظ أن f هو اسم التابع و $y = f(x) = x^2 + 1$ عبارة عن قاعدة الربط .

❸ إيجاد $\boldsymbol{f(a)}$ أو صورة العدد$\boldsymbol{a}$:

* لإيجاد f(عدد) أو صورة عدد نعوض هذا العدد في علاقة ربط التابع.

* العدد المعطى هو x والصورة هي y .

مثال (1): ليكن لدينا التابع

$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 3x + 1}$ **والمطلوب:**

1- **جد** $\boldsymbol{f(-1)}$ و$\boldsymbol{f(0)}$ و$\boldsymbol{f(2)}$.
2- **ما صورة العدد 3 ؟**
3- **ما صورة العدد $\boldsymbol{-2}$ ؟**
4- **ماذا تعني الكتابة $\boldsymbol{f(1) = 0}$ ؟**

الحل : ❶ $f(-1)$: لإيجاد $f(-1)$ نعوض $x = -1$ في التابع فنحصل على y

$f(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 1$

$f(-1) = 2 + 3 + 1$

$f(-1) = 6$

ومنه نقول أن صورة العدد (-1) هي 6

أو العدد 6 هو صورة للعدد -1 .

نوجد $f(0)$

$f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 1$

$f(0) = 0 - 0 + 1$

$f(0) = 1$

نوجد $f(2)$

$f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 1$

$f(2) = 8 - 6 + 1$

$f(2) = 3$

❷ إيجاد صورة العدد 3 يعني إيجاد $f(3)$

$f(3) = 2(3)^2 - 3(3) + 1$

$f(3) = 18 - 9 + 1$

$f(3) = 10$

❸ $f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) + 1$

$f(-2) = 8 + 6 + 1 = 15$

$$f\left(\underbrace{1}_{\text{عدد}}\right) = \underbrace{0}_{\text{صورة}}$$

❹ صورة العدد (1) هي (0)

أو العدد (0) صورة للعدد 1

أو العدد الذي صورته 0 هو 1 .

مثال (2):

ليكن التابع $f(x) = x^2 - 2x + 5$

❶ جد $f(1)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f(0)$ و $f(\sqrt{3})$.

❷ ما صورة العدد -2 ؟

❸ ماذا تعني الكتابة $f(-1) = 8$ ؟

الحل:

❶

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) + 5$$
$$f(1) = 1 - 2 + 5$$
$$f(1) = 4$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 5$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 + 5$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{4}{1}$$
$$(1) \quad (4)$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{16}{4} = \frac{17}{4}$$

$$f(0) = (0)^2 - 2(0) + 5$$
$$f(0) = 5$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3}) + 5$$
$$f(\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3} + 5$$
$$f(\sqrt{3}) = 8 - 2\sqrt{3}$$

❷

$$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) + 5$$
$$f(-2) = 4 + 4 + 5$$
$$f(-2) = 13$$

❸ $f(-1) = 8$

أي صورة العدد -1 هي 8 أو العدد الذي صورته 8 هو -1

❹ إثبات تساوي قاعدتي ربط :

مثال (1): ليكن التابعان

$$f(x) = x^2 - 11x + 24$$
$$g(x) = (x-3)(x-8)$$

❶ أثبت أن $f(x) = g(x)$.

❷ أوجد $f(-1)$ و $g(3)$.

❸ حل المعادلة $f(x) = 0$.

❹ حل المعادلة $f(x) = 24$

الحل: 1)

$$f(x) = x^2 - 11x + 24 \; \dots ①$$

ننشر $g(x)$

$$g(x) = x(x-8) - 3(x-8)$$
$$g(x) = x^2 - 8x - 3x + 24$$
$$g(x) = x^2 - 11x + 24 \; \dots . ②$$

من ① و ② نجد:

$$f(x) = g(x)$$

2)

$$f(-1) = (-1)^2 - 11(-1) + 2$$
$$f(-1) = +1 + 11 + 24$$
$$f(-1) = 36$$
$$g(3) = (3-3)(3-8)$$
$$g(3) = 0 \times -5 = 0$$

3)

$$f(x) = g(x) = 0$$

ومنه $(x-3)(x-8) = 0$

إما $x - 3 = 0 \implies x = 3$

أو $x - 8 = 0 \implies x = 8$

4)

$$24 = x^2 - 11x + 24$$
$$x^2 - 11x = 0$$
$$x(x - 11) = 0$$

اما $x = 0$

أو $x - 11 = 0$

ومنه $x = 11$

مثال (2): ليكن التابعان

$$h(x) = (x+3)^2 - (x-3)^2$$

$$k(x) = 12x$$

❶ أثبت أن $h(x) = k(x)$

❷ أوجد $h\left(\frac{1}{12}\right)$ و $h\left(-\frac{1}{4}\right)$ ❸ حل $h(x) = 0$

الحل: (1

$$h(x) = \big((x+3)+(x-3)\big)\big((x+3)-(x-3)\big)$$

$$h(x) = (x+3+x-3)(x+3-x+3)$$

$$h(x) = (2x)(6)$$

$$h(x) = 12x$$

$$\Leftarrow \quad h(x) = k(x) = 12x$$

(2 $h\left(\frac{1}{12}\right) = k\left(\frac{1}{12}\right) = 12 \times \frac{1}{12} = 1$

$$h\left(-\frac{1}{4}\right) = k\left(-\frac{1}{4}\right) = 12 \times -\frac{1}{4} = -3$$

(3 $h(x) = k(x) = 0$

$$12x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

ورقة عمل (13)

تمرين (1):

ليكن التابع: $f(x) = 2x^2 - x + 1$

❶ جد $f(0)$, $f(\sqrt{2})$.

❷ ما صورة العدد -2 ؟

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين (2): ليكن التابع

$$g(x) = (x-5)(x-2)$$

1- انشر التابع $g(x)$

2- أثبت أن $g(5) = g(2)$

3- أوجد $g(0)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تمرين (3): التابعين h, f معرفين بالصيغة

$$f(x) = (x-2)^2 - 4x + 8$$

$$h(x) = (x-2)(x-6)$$

1- أثبت أن $f(x) = h(x)$

2- حل $f(x) = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

❺طرائق تعيين التابع :

1) طريقة تعيين التابع بجدول:

سير العمل

1. **تتعين مجموعة التعريف:**
في السطر العلوي نختار أصغر عدد وأكبر عدد
2. **لإيجاد صورة عدد:**
يكون العدد في السطر العلوي وصورته تحته في السطر السفلي
3. **لإيجاد أسلاف عدد:**
يكون العدد في السطر السفلي وأسلافه فوقه في السطر العلوي
4. **لإيجاد اكبر قيمة للتابع :**
نجدها في السطر السفلي (أكبر عدد)
5. **لإيجاد أصغر قيمة للتابع :**
نجدها في السطر السفلي (أصغر عدد)

تمرين: ليكن الجدول الآتي الذي يعرف تابعاً f

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	+1	-1	0

1- جد مجموعة تعريف التابع f

2- جد أكبر قيمة للتابع f

3- جد أصغر قيمة للتابع f

4- ما صورة العدد (0) وفق التابع f

5- ما أسلاف العدد (-1) وفق التابع f

الحل:

1) مجموعة تعريف التابع $[-2,2]$.

2) أكبر قيمة للتابع f هي 3

3) أصغر قيمة للتابع f هي -1

4) صورة العدد (0) وفق التابع f هي +1

5) ما أسلاف العدد (-1) وفق التابع f هي 1و-2

مثال (1):

يعرف الجدول التالي تابعاً f يُقرن بعدد الأسطر عدد المقالات.

عدد الأسطر	1	2	3	4	5	6	7
عدد المقالات	3	6	24	38	24	15	9

وفق هذا الجدول أجب عن الأسئلة الآتية :

❶ ما هي مجموعة تعريف التابع؟

❷ ما عدد المقالات التي عدد أسطرها 4؟

❸ ما صورة العدد 5؟

❹ جد $f(1)$ و $f(7)$.

❺ ما العدد الذي صورته 38 ؟

❻ ما الأعداد التي صورتها 24 ؟

❼ ما هي أكبر و أصغر قيمة للتابع .

الحل : يُقرن بعدد الأسط عدد المقالات وبالتالي:

عدد الأسطر هي قيم x .

عدد المقالات هي قيم y .

❶ مجموعة تعريف التابع $[1,7]$.

❷ $f(4) = 38$ أي هناك 38 مقالة تتألف كلٍ منها 4 أسطر .

❸ $f(5) = 24$ أي هناك 24 مقالة تتألف كلٍ منها من 5 أسطر .

❹ $f(1) = 3$ و $f(7) = 9$

❺ العدد الذي صورته 38 هو 4 أي $f(4) = 38$

❻ الأعداد التي صورة كلاً منها 24 هما :

3 و 5 أي : $f(3) = f(5) = 24$

❼ أكبر قيمة للتابع هي : 38 أي $f(4) = 38$

وأصغر قيمة للتابع هي : 3 أي $f(1) = 3$

مثال (2): الجدول الآتي يعرف تابعاً f يربط بكل ساعة من ساعات أحد أيام شهر تموز درجة حرارة الطقس في مدينة دمشق ((مقدرة بالسيليسيوس))

الساعة	12	1	2	3	4	5	6
درجة الحرارة	36	37	38	39	38	37	36

والمطلوب :

❶ عند أي ساعة تكون درجة الحرارة 37 ؟

❷ جد $f(5)$.

❸ ما هي الأعداد التي صورتها 36 ؟

❹ ما هي أكبر قيمة للتابع ؟

❺ ما صورة العدد 2 ؟

الحل :

❶ عند الساعة 1 و5

أو يمكن القول أن : $f(1)=f(5)=37$

❷ $f(5)=37$.

❸ $f(12)=f(6)=36$

❹ $f(3)=39$

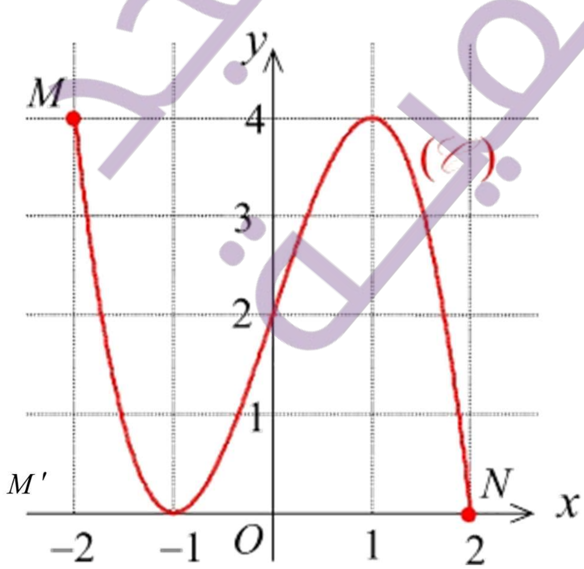
❺ $f(2)=38$

التعيين بخط بياني

سير العمل

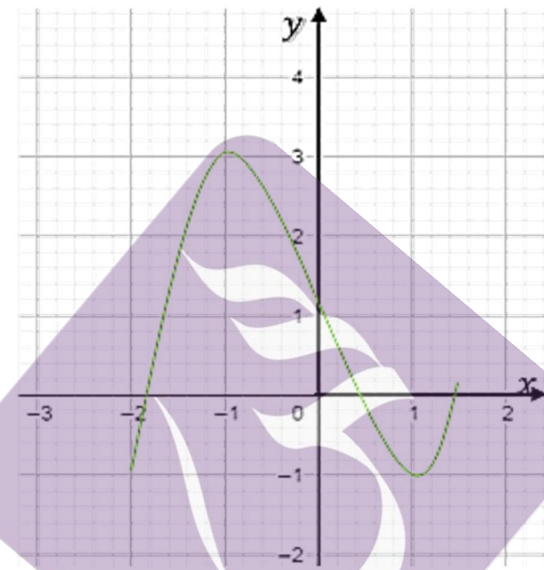
1. **تتعين مجموعة التعريف** من خلال بداية ونهاية الخط البياني(C) وذلك بإسقاط عمود من البداية والنهاية على محور الفواصل
2. **عند طلب إيجاد صورة عدد مثل a** نرسم من النقطة التي فاصلتها a عمود على محور الفواصل يقطع الخط البياني بنقطة نسقط منها عمود على محور التراتيب نجد صورته **عند طلب أسلاف عدد مثل b** نرسم من النقطة التي ترتيبها b مستقيم موازي لمحور الفواصل فيقطع الخط البياني(C) بنقط أو بنقطة نسقط منها عمود/اعمدة على محور الفواصل فتكون هي أسلاف العدد b
3. **لإيجاد اكبر قيمة للتابع :** من أعلى نقطة في الخط البياني (C) نرسم مستقيم موازي لمحور الفواصل يقطع محور التراتيب بنقطة
4. **لإيجاد أصغر قيمة للتابع :** من أخفض نقطة في الخط البياني (C) نرسم مستقيم موازي لمحور الفواصل يقطع محور التراتيب بنقطة

ملاحظة :في هذه الطريقة لا يمكن الحصول على قيمة دقيقة دائماً لذلك نلجأ إلى إعطاء قيمة تقريبية للمقدار $f(x)$



مثال: نموذجي عن تعيين التابع بالخط البياني

ليكن لدينا التابع g المعين بالخط البياني الآتي:



❶ جد مجموعة التعريف التابع

الحل : لإيجاد مجموعة تعريف التابع

نسقط بداية ونهاية الخط البياني على محور الفواصل ونكتب مجموعة التعريف بالشكل: $[-2\,, 1.5]$

❷ جد صورة العدد -1 .

الحل :

لإيجاد صورة العدد -1 أو بصيغة أخرى $f(-1)$ نرسم مستقيماً معادلته $x=-1$ يجب أن يقطع الخط البياني بنقطة واحدة **فقط** نسقط هذه النقطة على محور التراتيب $\overrightarrow{\acute{y}y}$ فنحصل على الصورة

وبالرسم والإسقاط نجد أن صورة العدد -1 هي 3:

أو $f(-1)=3$

❸ جد $f(1)$ و $f(0)$ و $f(1.5)$

الحل :

$f(1)=-1$

$f(0)=1$

$f(1.5)=0$

((أي نقطة على محور الفواصل صورتها 0))

❹ ما أسلاف العدد -1 ؟

الحل :

إن إيجاد أسلاف عدد يعني إيجاد قيم x ولإيجاد سلف العدد -1 نرسم مستقيماً معادلته $y=-1$ ونوجد نقاط تقاطعه مع الخط البياني حيث أنه يقطع الخط البياني بنقطة أو أكثر نسقط تلك النقاط على محور الفواصل $\overrightarrow{\acute{x}x}$ فنحصل على قيم x المطلوبة وهنا نجد : $x=-2$ و $x=1$ أي : $f(1)=f(-2)=-1$.

❺ ما العدد الذي صورته 3 ؟

الحل :

عندما ترد صيغة السؤال ما العدد الذي صورته فالمقصود إيجاد أسلاف العدد 3 .

نرسم مستقيماً معادلته $y=3$ فيقطع الخط البياني في نقطة واحدة نسقطها على محور الفواصل لنجد أن $x=-1$ أي $f(-1)=3$.

❻ ما أسلاف العدد 0 ؟

الحل :

$f(-1.8)=f(0.5)=f(1.5)=0$

❼ عين أكبر قيمة للتابع وأصغر قيمة له .

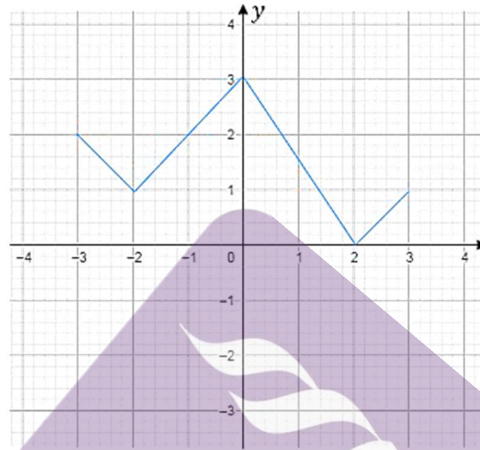
الحل :

نأخذ أكبر قيمة لـ y و أصغر قيمة لـ y

أكبر قيمة للتابع هي 3 أي : $f(-1)=3$

أصغر قيمة للتابع هي -1 أي : $f(-2)=-1$

مثال (2): ليكن التابع f المعرف بالخط البياني.



❶ أوجد مجموعة تعريف التابع

❷ ما صورة العدد (0)

❸ جد $f(3), f(-2)$

❹ ما أسلاف العدد 0 ؟

❺ ما العدد الذي صورته 3 ؟

❻ ما العدد الذي صورته أكبر ما يمكن ؟ وما هذه الصورة.

الحل :

❶ $[-3\,,3]$

❷ $f(0) = 3$

❸ $f(3) = 1$ و $f(-2) = 1$.

❹ $f(2) = 0$

❺ $f(0) = 3$

❻ العدد الذي صورته أكبر ما يمكن هو 0 أي

$f(0) = 3$

التعيين بإعطاء الصيغة

سير العمل

1. لإيجاد صورة عدد مثل a

نستبدل x بالعدد a ونجري العمليات الحسابية.

2. لإيجاد أسلاف عدد مثل a

نستبدل f(x) بالعدد a ونحل المعادلة الناتجة.

مثال (1) ليكن لدينا التابع

$$g(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

❶ اكتب التابع بالشكل $g(x) = (x + a)^2$.

❷ ما أسلاف العدد 9 ؟

❸ ما أسلاف العدد -25 ؟

❹ أوجد صورة العدد 1 .

الحل:

❶ $g(x) = 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

❷ $g(x) = 9$

$(2x - 3)^2 = 9$

بالجذر $2x - 3 = \pm 3$

إما: $2x - 3 = 3 \implies 2x = 6 \implies x = 3$

أو : $2x - 3 = -3 \implies 2x = 0 \implies x = 0$

$g(3) = g(0) = 9$

❸ $g(x) = -25$

$(2x - 3)^2 = -25$

بالجذر مستحيلة الحل .

فليس للتابع أسلاف عند القيمة -25

❹

$$g(1) = (2(1) - 3)^2$$
$$= (2 - 3)^2$$
$$= (-1)^2$$
$$= 1$$

أسئلة ترد في الامتحان كصح أو خطأ :

1) إذا كان $f(x)=x^2+4$ فإن $f(\sqrt{2})=7$

$$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2+4=2+4=6$$

الجواب خطأ.

2) f تابع معرف بالصيغة $f(x)=(x-1)(x+5)$ فإن : $f(2)=-6$

نعوض

$$f(2)=(2-1)(2+5)$$
$$=1\times 7=7$$

الجواب خطأ.

أسئلة ترد كأختر الإجابة الصحيحة :

في كل مما يأتي إجابة واحدة صحيحة أشر إليها:

1) f تابع معرف وفق $f(x)=x^2-5x$ فإن أحد أسلاف العدد 0 هو:

A		B		C	
A	-5	B	$\boxed{5}$	C	1

التوضيح:

$$f(x)=0$$
$$x^2-5x=0$$
$$x(x-5)=0$$

إما $x=0$

أو $x-5=0 \Rightarrow x=5$

2) f تابع معرف بالصيغة $f(x)=(x-1)^2$ فإن أسلاف العدد 9 هو :

A	$\{-3,3\}$	B	$\{2,-3\}$	C	$\boxed{\{4,-2\}}$

التوضيح:

$$f(x)=9$$
$$(x-1)^2=9$$

إما $x-1=3$

$$\Rightarrow x=3+1=4$$

أو $x-1=-3$

$$\Rightarrow x=-3+1=-2$$

3) إذا كان f تابعاً معطى بالصيغة $f(x)=2x-\sqrt{8}$ فإن $f(\sqrt{2})$ يساوي:

A	$\sqrt{2}$	B	$4\sqrt{2}$	C	$\boxed{0}$

التوضيح:

$$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-\sqrt{8}$$
$$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-\sqrt{4\times 2}$$
$$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0$$

4) التابع f المعرف بالصيغة $f(x)=x^2$ فإن أسلاف العدد 4 هي :

A	$\{1,-1\}$	B	$\{1,3\}$	C	$\boxed{\{2,-2\}}$

التوضيح:

$$x^2=4$$

$x=\pm 2$ بالجذر

5) إذا كان $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن $f\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$ هو :

A	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	B	8	C	$\boxed{2\sqrt{2}}$

التوضيح:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{8}}}=$$
$$=1\times\frac{\sqrt{8}}{1}=2\sqrt{2}$$

5) f تابع معرف بالصيغة $f(x)=(x-1)^2$ فإن $f(\sqrt{3}+1)$ تساوي:

A	$\boxed{3}$	B	$\sqrt{3}$	C	2

التوضيح:

$$f(\sqrt{3}+1)=(\sqrt{3}+1-1)^2=(\sqrt{3})^2=3$$

تذكر أن نجاحك تابعاً لاجتهادك

ورقة عمل (14)

تمرين (1): ليكن لدينا التابع المعرف بالصيغة

$f(x) = (x-2)(x-3)$

وليكن لدينا التابع g المعين بالصيغة

$g(x) = x^2 - 5x + 6$

❶ أثبت أن $f(x) = g(x)$.

❷ احسب $f(-2)$ و $f(4)$.

❸ وفق التابع f ما أسلاف العدد 0 ؟

❹ ما الأعداد التي صورة كل منها 6 وفق التابع السابق؟

تمرين (2): ليكن لدينا الجدول التالي الذي يعرف تابعاً:

x	1	5	11	6	17	8	9
$f(x)$	12	7	8	15	12	11	15

❶ أوجد $f(8)$ و $f(1)$.

❷ ما الأعداد التي صورتها أكبر ما يمكن وما هذه الصورة ؟

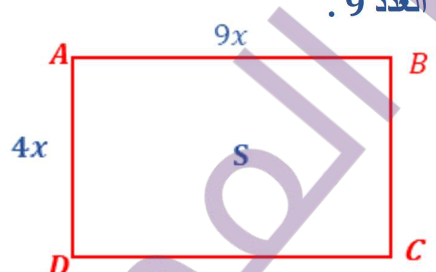
❸ ما العدد الذي صورته أصغر ما يمكن وما هذه الصورة ؟

تمرين (3): في الشكل المجاور $ABCD$ بفرض أن h تابع يقرن بكل عدد موجب x مساحة المستطيل $ABCD$ والمطلوب :

❶ أثبت أن h يعطى وفق الصيغة $h(x) = 36x^2$

❷ جد $h(3)$.

❸ جد أسلاف العدد 9 .



انتهت الوحدة الخامسة

المجموعة هي تجمع لأشياء معروفة وتتضمن عناصر

مثال1: مجموعة حروف كلمة سوريا

مثال2: مجموعة أرقام العدد 3254

وتسمى المجموعات بأحرف ابجدية كبيرة

مثل $A, B, C, D \ldots$

طريقة الحصر في كتابة المجموعة : هي بأن نسجل كافة عناصر المجموعة مع وضع فاصلة بين كل عنصرين متتاليين وحصر هذه العناصر بين قوسين كبيرين $\{\ \}$

مثال1:مجموعة حروف كلمة سوريا:

A= {س، و ، ر ، ي ، ا}

مثال2: مجموعة أرقام العدد 3254:

$A = \{4 ، 5 ، 2 ، 3\}$

ملاحظات

1. يمنع تكرار عناصر المجموعة
2. يهمل الترتيب في كتابة هذه العناصر

مثال1: مجموعة أرقام العدد 25245 تكتب

$B = \{4 ، 5 ، 2\}$

مثال2: مجموعة أرقام العدد 25245 تكتب

$G = \{2 ، 4 ، 5\}$

مثال3.مجموعة الارقام في نظام العد العشري

$C = \{1 ، 2 ،\ldots\ldots ، 8 ، 9\}$

مثال4.مجموعة مضاعفات العدد3 :

$D = \{0 ، 3 ، 6 ، 9\ldots\ldots\ldots\}$

الإنتماء: نقول عن عنصر أنه ينتمي لمجموعة إذا كان من عناصر المجموعة والعكس بالعكس

رمز الانتماء $\in$

رمز عدم الانتماء $\notin$

في المثال 4 نلاحظ $6 \in D$ ونلاحظ أن $5 \notin D$

المجموعة الجزئية: نقول عن مجموعة *A* أنها جزئية من مجموعة *B* إذا كان كل عنصر من المجموعة *A* عنصر في المجموعة *B*

ونقول أن المجموعة *A* محتواه في المجموعة *B*

رمز الاحتواء $\subset$ **وعدم الاحتواء** $\not\subset$

مثال: لتكن $B = \{4 , 5 , 2 , 7\}$

$A = \{8 , 7\}$ و $E = \{2 , 7\}$

إذاً: $E \subset B$ بينما $A \not\subset B$

المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا ينتمي إليها أي عنصر رمزها $\varnothing$ تقرأ فاي أو $\{\ \}$

مثال: مجموعة قواسم العدد 2 التي أكبر من 7 هي

$A = \{\ \}$ أو $A = \varnothing$

المجموعة الشاملة:

هي مجموعة تحوي مجموعات جزئية

ترمز بـ Ω وتقرأ ((أوميغا))

العمليات على المجموعات

تقاطع مجموعتين $\cap$:

هو مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين

مثال $A = \{2,3,4,5,6\}, B = \{5,7,3\}$

فأن : $A \cap B = \{2,3\}$

اجتماع مجموعتين $\cup$: هو مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين المجموعتين

مثال $A = \{2,3,4,5,6\}, B = \{5,7,3\}$

فأن : $A \cup B = \{2,3,4,5,6,7\}$

فرق مجموعتين / : هو مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة الاولى ولا تنتمي للمجموعة الثانية

مثال $A = \{2,3,4,5,6\}, B = \{5,7,3\}$

فأن : $A / B = \{4,5,6\}$

مكملة مجموعة A' هي مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة الشاملة ولا تنتمي للمجموعة ذاتها

مثال

$\Omega = \{2,3,4,5,6\}$

$B = \{5,3\}$

فأن : $B' = \{2,4,6\}$

التجربة العشوائية هي تجربة لها عدد من النتائج الممكنة ولا نعرف أية نتيجة من النتائج ستقع أولاً

لاحظ وانتبه

1. جميع النتائج الممكنة للتجربة معلومة قبل بدء التجربة.
2. لايمكن توقع أي نتيجة بشكل مؤكد قبل بدء بالتجربة.
3. يمكن معرفة احتمال ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل القيام بالتجربة.

مجموعة جميع النتائج الممكنة للتجربة تسمى فضاء العينة

نرمز لمجموعة جميع النتائج الممكنة بالرمز Ω

نرمز للحدث بحرف ابجدي A مثلاً

ولاحتماله نرمز له $P(A)$

قانون الاحتمال $P(A) = \dfrac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

في تجربة إلقاء حجر نرد فإن مجموعة النتائج هي

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

كل نتيجة لهذه التجربة (حدثاً بسيطاً)

وهو غير قابل للتجزئة فهو نتيجة واحدة فقط

احتمال حدث بسيط هو عدد محصور بين الصفر والواحد أي أن $\boxed{0<P(E)<1}$

في تجربة رمي حجر النرد الحدث M ظهور العدد 2 هو حدث بسيط يتكون من (نتيجة واحدة)

واحتمال ذلك الحدث M هو $P(M)=P(2)=\frac{1}{6}$

مجموع احتمالات الأحداث البسيطة في أي تجربة احتمالية يساوي الواحد

في التجربة السابقة مجموع الاحداث البسيطة هو

$$=P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

نسمي كل مجموعة جزئية من نتائج التجربة(حدثاً)

وهو الحدث الذي يمكن تجزئته إلى أحداث

ويكون احتمال أي حدث هو $\boxed{0\le P(E)\le 1}$

في تجربة رمي حجر النرد حدث ظهور عدد اولي H

هو حدث يتكون من عدة نتائج

ونتائج ذلك الحدث H هي $\{2,3,5\}$

احتمال الحدث H هو:

مجموع احتمالات الاحداث البسيطة المُشَكِّلة للحدث

$$P(H)=P(2)+P(3)+P(5)$$

$$P(H)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

الحدث المستحيل: هو حدث غير قابل للتحقيق

ورمزه $\varnothing$ واحتماله صفر أي أن $P(\varnothing)=0$

في تجربة رمي حجر النرد الحدث B ظهور عدد رقم 7 هو حدث مستحيل

ويكون احتمال الحدث B هو $P(B)=P(\varnothing)=0$

الحدث الأكيد: هو الحدث الذي لابد أن يتحقق

ورمزه Ω واحتماله الواحد أي أن $P(\Omega)=1$

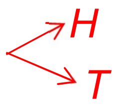
في تجربة رمي حجر النرد الحدث C ظهور عدد أصغر تماما من 7 هو حدث أكيد

$$P(C)=P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)$$

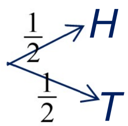
$$P(C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1=P(\Omega)$$

نعبر عن تجربة احتمالية بمخطط شجري نسميه (شجرة الامكانات)

الشكل المجاور يمثل شجرة الامكانات لتجربة رمي قطعة نقود ←



الشكل المجاور يمثل شجرة محملة بالاحتمالات ←



هام جدا:

(((على شجرة الامكانات احتمال حدث E هو مجموع احتمالات فروع الشجرة التي تؤدي الى الحدث E)))

مثال: في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة

1. اكتب النتائج الممكنة ثم عبر عن هذه التجربة بشجرة محملة بالاحتمالات الموافقة
2. احسب احتمال E الحصول على عدد زوجي
3. الحدث A الحصول على عدد أصغر تماما من 5
4. الحدث B الحصول على عدد n يحقق $2\le n\le 4$ احسب $P(B)$
5. الحدث C الحصول على عدد n يحقق $1\le n\le 6$ احسب $P(C)$

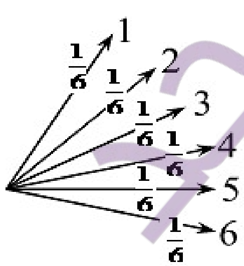
الحل: .1 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

.2 $P(E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

.3 $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

.4 $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

.5 $P(C)=\frac{6}{6}=1$



✎ **مثال:** **نرمي حجر نرد له ستة أوجه مرقمة**

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1- اكتب شجرة الإمكانات وزود فروعها بالاحتمالات

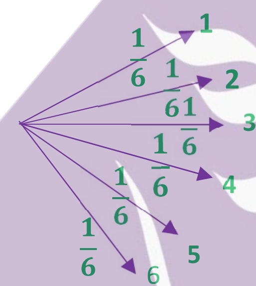
2- A حدث الحصول على عدد فردي احسب احتمال A

3- B حدث الحصول على عدد زوجي احسب احتمال B

4- C حدث الحصول على عدد أولي ما احتمال C

الحل:

-1



2- لحساب احتمال A هناك طريقتين:

1) اكتب مجموعة الإمكانات التي تضم الحدث A وهي:

الأعداد الفردية من 1 إلى 6

$A = \{1,2,3\}$

$P(A) = \frac{3}{6}$

$P(A) = \frac{1}{2}$

(2

$P(A) = P(1) + P(3) + P(5)$

$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

-3 B حدث الحصول على عدد زوجي

$B = \{2,4,6\}$

$P(B) = P(2) + P(4) + P(6)$

$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

-4 C حدث الحصول على عدد أولي

$C\{2,3,5\}$

$P(C) = P(2) + P(3) + P(5)$

$P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

13) التكرار النسبي والاحتمال:

في تجربة احتمالية مكررة عدداً من المرات يكون الاحتمال النسبي قريباً من التكرار النسبي للحدث.

فمثلاً عند رمي قطعة نقود 1000 مرة، سنحصل على شعار بعد قريب من 500.

تمرين (1): **يحوي كيس 10 كرات متماثلة، رقمت بالأرقام $\{4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$ ، نسحب من الكيس عشوائياً كرة ونقرأ رقمها.**

1- ارسم شجرة الإمكانات وزوّد فروعها باحتمالات النتائج بصيغة كسور عشرية.

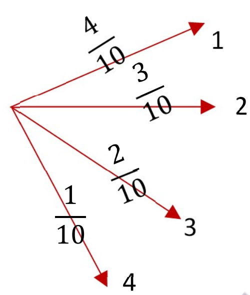
2- احسب احتمال الحدث A : سحب كرة رقمها على الأقل 2 ما احتمال A

3- B حدث الحصول على كرة رقمها أكبر تماما من 3 احسب احتمال B

4- ما احتمال الحصول على كرة رقمها 5.

الحل:

-1



2- الحصول على كرة رقمها 2 على الأقل

$A: \{2,3,4\}$

$P(A) = P(2) + P(3) + P(4)$

$P(A) = 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.6$

-3 $B: \{4\}$

$P(B) = \{4\}$

$P(B) = P\{4\} = 0.1$

4- C حدث الحصول على كرة رقمها 5

$C: \{\phi\}$

حدث مستحيل $P(C) = 0$

تمرين (2) : صندوق يحوي 6 كرات ثلاثة حمراء R واثنتان صفراوان y وواحدة زرقاء B، نسحب من الصندوق عشوائياً كرة ونتأمل لونها:

1- ارسم شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات.

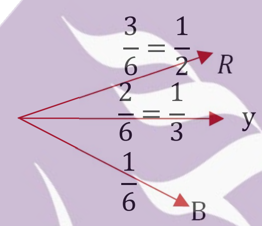
2- A حدث الحصول على كرة حمراء ما احتمال A

3- B حديث الحصول على كرة زرقاء ما احتمال B

4- C حدث الحصول على كرة سوداء ما احتمال C

الحل:

-1



-2 $P(A) = P(R) = \frac{1}{2}$

-3 $P(B) = P(B) = \frac{1}{6}$

-4 $P(C) = \phi = 0$

حدث مستحيل

طالبي العزيز

" كل شخص ناجح كان يمكن

أن يكون فاشلاً

كما أن كل ناجحٍ تعرض للفشل

يوما ما لكن لم يعتبر نفسه فاشلاً،

لا يهم كم مرة أخطأت وأين أخطأت

الأهم كيف أنت الآن!

محبتي

تمرين (3) كيس يحوي 10 بطاقات

رُقِمت بالأرقام: $1,1,1,1,2,2,2,3,3,4$

1)اكتب النتائج الممكنة ثم عبر عن هذه التجربة بشجرة محملة بالاحتمالات المواتية

2)احسب احتمال E الحصول على بطاقة تحمل عدد زوجي

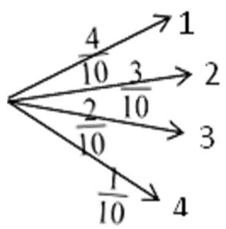
3)احسب احتمال الحدث A الحصول على بطاقة تحمل عدد أصغر تماما من 3

4)احسب احتمال الحدث B الحصول على بطاقة تحمل عدد n يحقق $2 < n < 4$

5)احسب احتمال H الحصول على بطاقة تحمل عدد فردي

الحل: 1) $\Omega = \{1,2,3,4\}$

الشجرة



(2

$$P(E) = P(2) + P(4)$$

$$P(E) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

(3

$$P(A) = P(2) + P(1)$$

$$P(A) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$$

(4

$$P(B) = P(3)$$

$$P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

(5

$$P(H) = P(1) + P(3)$$

$$P(H) = \frac{4}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ورقة عمل (15)

تمرين (1): مغلف يحوي 5 بطاقات متماثلة كتبت عليها الأرقام $\{2,2,3,3,5\}$ ، نسحب من المغلف عشوائياً بطاقة ونسجل رقمها، نعرف الأحداث الآتية:

A: حدث الحصول على رقم أكبر تماماً من 3.

B: حدث الحصول على رقم أصغر تماماً 3

C: حدث الحصول على عدد أولي.

1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها بالنتائج.

2) احسب $P(C), P(B), P(A)$

....

تمرين (2): صندوق فيه 6 بطاقات متماثلة كتبت عليها الأرقام $\{2,2,3,3,3,4\}$ ، نسحب من الصندوق بطاقة ونسجل رقمها:

1- ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها بالاحتمالات

2- A حدث الحصول على رقم زوجي احسب $P(A)$

3- B حدث الحصول على رقم فردي احسب $P(B)$

....

أحداث متنافية وأحداث متعاكسة

الحدثان المتنافيان: هما حدثان لا يشتركان بأي نتيجة أي (يستحيل تحققهما معا)

نقول عن حدثين A , B أنهما متنافيان إذا لم يتحققا في آن معاً. ولمعرفة أن حدثين A , B متنافيان:

1- نكتب مجموعة A

2- نكتب مجموعة B

3- إذا كان $A \cap B$ يساوي $\emptyset$ فالحدثات متنافيان.

تمرين (1):

في تجربة الدولاب المرفق ندور الدولاب ليستقر

A "ظهور العدد 1"،

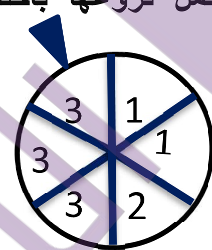
B "ظهور عدد زوجي"

1) هل الحدثان A , B متنافيان ولماذا؟

2) احسب احتمال الحدث B ظهور عدد زوجي

وارسم شجرة الإمكانات وحمل فروعها باحتمالات الأحداث المواتية.

الحل:



(1

$A = \{1\}$

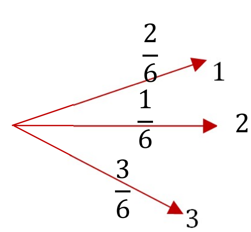
$B = \{2\}$

$A \cap B = \emptyset$

فالحدثان A , B متنافيان لأنه يستحيل تحققهما في آن واحد. لايشتركان بأي نتيجة

(2 احتمال الحدث B

$P(B) = \frac{1}{6}$



تمرين (2): نتأمل حجر نرد متوازن كتب على كل من أوجه الستة أحد الأرقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ليكن A حدث الحصول على عدد زوجي، وليكن B حدث الحصول على عدد أولي، نلقي حجر النرد مرة واحدة ونقرأ الرقم على الوجه العلوي:

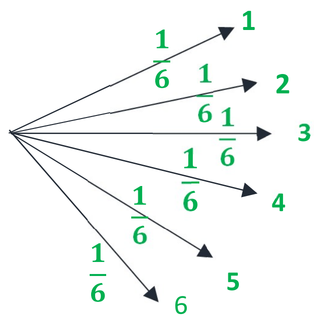
1) ارسم شجرة الإمكانات وزود فروعها بالاحتمالات الموافقة.

2) احسب احتمال الحدث A واحتمال الحدث B

3) هل A , B متنافيان علل إجابتك.

الحل:

-1



$P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = P(2) + P(3) + P(5)$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3 −

$A: \{2,4,6\}$

$B: \{2,3,5\}$

$A \cap B = \{2\}$

وبالتالي الحدثان غير متنافيان لانهما يشتركان بالنتيجة 2

الحدثان المتعاكسان:

هما حدثان لايشتركان بأي نتيجة فهما (متنافيان)ومجموع احتماليهما (1)

(مجموع احتمالي حدثين متعاكسين هو الواحد)

مجموع احتمالي حدثين متعاكسين يساوي 1

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

تمرين (1): نرمي حجر نرد متجانس مرة واحدة حيث أن أوجهه مرقمة $\{6,5,4,3,2,1\}$ لنعرف الأحداث.

A حدث الحصول على عدد زوجي

B حدث الحصول على عدد فردي

C حدث ظهور عدد أكبر تماماً من 4

1) عيّن حدثين متنافيين من الأحداث السابقة.

2) عيّن حدثين متعاكسين من الأحداث السابقة.

3) احسب احتمال كل من A ، B ، C

4) عين الحدث $\overline{C}$ المعاكس للحدث C، ثم أوجد $P(\overline{C})$

الحل:

$A:\{2,4,6\}$

$B:\{1,3,5\}$

$C:\{5,6\}$

1) $A \cap B = \emptyset$

الحدثان A ، B متنافيان لأنهما لا يشتركان بأي نتيجة.

2) الحدثان A ، B لا يشتركان بأي نتيجة فهما متنافيان

$P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ فهما متعاكسان. أو

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega \,, A \cap B = \phi$

3) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

4) $C: n > 4$

$\overline{C} = \{1,2,3,4\}$ ، $\overline{C}: n \le 4$

$P = (\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

تمرين (2): لدينا مغلف يحوي على ستة بطاقات مرقمة كما يلي $\{3,3,2,2,1,1\}$ ولنعرف الأحداث:

A: حدث سحب بطاقة ذات عدد أولي.

B: حدث سحب بطاقة تحمل الرقم (1)

C: حدث سحب بطاقة رقمها أكبر أو يساوي 2

1) ارسم شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات

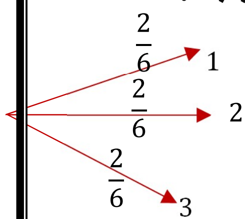
2) احسب احتمالات كل من الأحداث A ، B ، C

3) هل الحدثان A ، B متعاكسان علل إجابتك.

4) هل الحدثان A ، C متنافيان، علل إجابتك.

الحل:

(1



(2

$P(A) = P(2) + P(3) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(B) = P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(C) = P(2) + P(3) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(3

$B:\{1\}, \quad A:\{2,3\}$

$A \cap B = \phi$ و $A \cup B = \{1,2,3\} = \Omega$

الحدثان A ، B متعاكسان لأنهما

متنافيان(لا يشتركان بأي نتيجة ومجموع احتماليهما 1))

حيث $P(A) + P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

4) $A:\{2,3\}$ و $C:\{2,3\}$

$A \cap C = \{2,3\} \neq \emptyset$

الحدثان A ، C غير متنافيان

لأنهما يشتركان بالنتيجة 2 و 3.

تجارب مركبة وعشوائية:

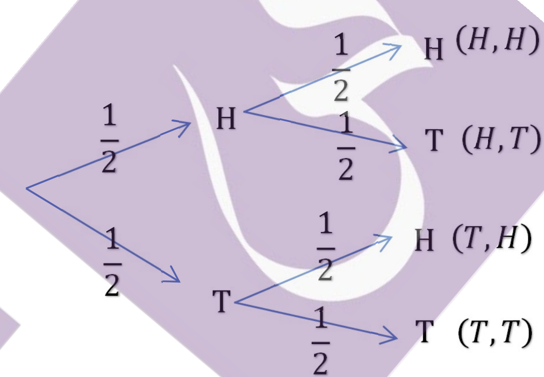
عند رمي قطعة نقود مرتين متتاليتين:

1- ارسم شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات للرمية الأولى والثانية

2- ما هي النتائج الممكنة في رمي قطعة النقود مرتين.

$(H,T)\ ,(H,H),(T,H),(T,T)$

3- ارسم شجرة الإمكانات لرمي قطعة النقود مرتين وحمل فروعها بالاحتمالات والنتائج.



أفكار:

1-على شجرة الإمكانات لتجربة عشوائية نسمي فرعين متتالين (مسار)

2- على شجرة الامكانات لتجربة مركبة:

احتمال حدث في نهاية المسار هو جداء الاحتمالات المحملة على المسار المؤدي للحدث

تمرين (1):

يحوي مغلف خمس بطاقات متماثلة ثلاثة منها زرقاء (B) واثنان خضراوان (N)، نسحب المغلف عشوائياً بطاقة ثم نعيدها إلى المغلف نسحب مرة ثانية ونتأمل لوني البطاقتين المسحوبتين.

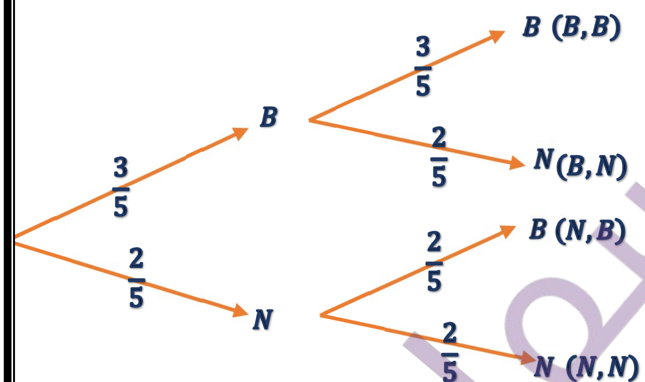
1- ارسم شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات.

2- ليكن الحدث A احتمال سحب كرتين زرقاوين احسب احتمال A

3- ليكن الحدث C احتمال سحب كرتين من لونين مختلفين احسب احتمال C

الحل:

-1



-2 $P(A)=P(B,B)=P(B)\times P(B)$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

-3 $\mathrm{P(C)=P(B,N)+P(N,B)}$

$$=P(B)\times P(N)+P(N)\times P(B)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$$

$$=\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{12}{25}$$

تمرين (2):

نلقي قطعة نقود مرتين متتاليتين ونسجل النتائج:

1- ارسم شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات.

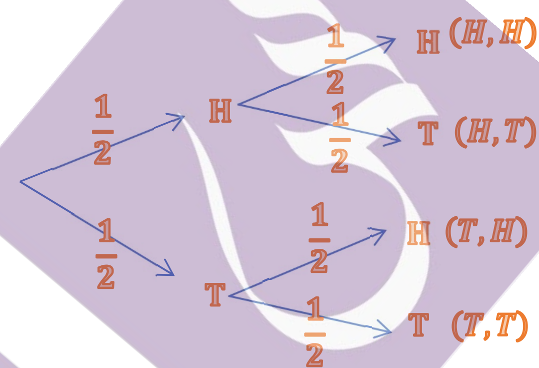
2- ما احتمال الحصول على وجهين متماثلين.

3- احسب احتمال الحدث المعاكس لحدث الحصول على وجهين متماثلين.

4- احسب احتمال الحصول على شعارين متتالين

الحل:

-1



2- ليكن الحدث C حدث الحصول على وجهين متماثلين

$$P(H,H) + P(T,T) = P(C)$$

$$= P(H) \times P(H) + P(T) \times P(T)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

3- ط (1): ليكن $\overline{C}$ الحدث المعاكس للحصول على وجهين متماثلين.

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ط(2): الحصول على حدث معاكس لوجهين متماثلين هو الحصول على وجهين مختلفين أي:

$$P(T,H) + P(H,T)$$

$$= P(T) \times P(H) + P(H) \times P(T)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

-4 $P(T,T) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

الاحصاء

المتوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عدد المفردات}}$ رمزه $\overline{x}$

المنوال: هو المفردة الأكثر تكراراً في البيان

* يمكن أن يكون المنوال أكثر من مفردة.

* إذا لم تكرر أي مفردة يكون لا يوجد المنوال

المدى: هو الفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة

تمرين: ليكن لدينا البيان الإحصائي الآتي:

$$\{1, 1, 3, 2, 5, 5, 5, 2\}$$

1- أوجد المتوسط الحسابي

2- أوجد المنوال

3- أوجد المدى

الحل:

(1 $\overline{x} = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عدد المفردات}}$

$$\frac{2 \times 1 + 3 + 2 \times 2 + 5 \times 3}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

2) المنوال هو 5 لأنها المفردة الأكثر تكراراً.

3) المدى: 5-1=4

***الوسيط M هو العدد الأوسط للبيان الاحصائي المرتب**

1- نرتب المفردات تصاعدياً.

2- نوجد n عدد المفردات ونميز حالتين:

a) n فردي

*** الوسيط هو مفردة واحدة.**

*** نوجد رتبة الوسيط بالعلاقة**

$$\frac{n+1}{2}$$

b) n زوجي فالوسيط هو المتوسط الحسابي للمفردتين

*** الوسيط هو مفردتين**

*** نحدد رتبتي الوسيط**

$$\frac{n}{2} \text{ و } \frac{n}{2} + 1$$

تمرين (1):

ليكن لدينا البيان الإحصائي الآتي:

$\{2, 5, 4, 3, 2, 1, 1\}$

حدد الوسيط M للبيان الإحصائي

1) نرتب تصاعدياً

1,1,2,2,3,4,5

2) $n = 7$ فردي

الوسيط $M = 2$

تمرين (2): ليكن لدينا البيان الإحصائي

$\{1, 1, 1, 4, 2, 3\}$

1- نرتب تصاعدياً

1,1,1,2,3,4

2- $n = 6$ زوجي

الوسيط هو المتوسط الحسابي للمفردة الثالثة والرابعة.

$1,1,\boxed{1,2},3,4$

$$M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

تمرين (3): ليكن البيان الإحصائي

$7, 17, 5, 13, 12, 59, 5, 16, 4$

1- أوجد منوال ومدى العينة

2- أوجد وسيط العينة

الحل:

1- نرتب تصاعدياً 4,5,5,7,12,13,16,17,59

المنوال هو 5

المدى $\text{المدى} = 59 - 4 = 55$

2- $n = 9$ فردي

رتبة الوسيط

$$\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$$

المفردة الخامسة $M = 12$

الربيعات

الربيع الأول Q_1: هو وسيط المفردات التي تسبق الوسيط في البيان الإحصائي المرتب

الربيع الثالث Q_3: هو وسيط المفردات التي تلي الوسيط في البيان الإحصائي المرتب

لإيجاد ربيعات عينة إحصائية نتبع ما يلي:

1- نرتب الأحداث (المفردات) تصاعدياً.

2- نوجد الوسيط M ويكون هو الربيع الثاني Q_2

3- نأخذ المفردات التي تستحق الوسيط ونوجد وسيطها نحصل على الربيع الأول Q_1

4- نأخذ المفردات التي تلي الوسيط ونوجد وسيطها نحصل على الربيع الثالث Q_3

5- الربيعات Q_1 ، Q_2 ، Q_3 تقسم البيان الإحصائي إلى أربعة أقسام متساوية.

تمرين (1): لتكن العينة الإحصائية

$\{19,15,5,6,10,7,12,11,20\}$

أوجد الربيعات Q_1 ، Q_2 ، Q_3

الحل: نرتب العينة الإحصائية تصاعدياً

$$5,6 \overset{Q_1}{,} 7,10,\overset{Q_2}{11},12,15 \overset{Q_3}{,} 19,20$$

$n = 9$ فردي

رتبة الوسيط

$$\frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$Q_2 = M = 11$

الأعداد التي تسبق Q_2 هي: $\{5,6,7,10\}$

نوجد وسيطها

$$Q_1 = \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

$$Q_3 = \frac{15+19}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

بعض الأسئلة الداعمة التي ترد كـ اختر الإجابة الصحيحة:

1) في بيان إحصائي لدينا 6 مفردات متوسطها الحسابي 22 فإن مجموعها:

A	122	B	$\boxed{132}$	C	142

$$x = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عددها}}$$

$$22 = \frac{\text{مجموع المفردات}}{6} \Longrightarrow$$

$$\text{مجموع المفردات} = 6 \times 22 = 132$$

2) وسيط العينة $\{3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14\}$ هو:

A	12	B	5	C	$\boxed{9}$

$n = 9$ فردي

$$\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

الوسيط هو المفردة الخامسة $\boxed{M = 9}$

3) وسيط العينة $\{4, 7, 9, 11, 15, 18\}$ هو:

A	$\boxed{10}$	B	11	C	9

$n = 6$ زوجي

$$\frac{n}{2} = 3 \,, \frac{n}{2} + 1 = 4$$

المفردة الثالثة والرابعة

$$M = \frac{9+11}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

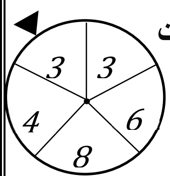
4) تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط احتمال أحداث نتائجها 18% فإن احتمال النتيجة الأولى:

A	50%	B	$\boxed{82\%}$	C	18%

$$100\% - 18\% = 82\%$$

بعض التمارين الداعمة للوحدة السادسة (الاحتمالات)

تمرين (1): في الشكل المجاور قرص متجانس مقسم إلى خمسة أقسام متساوية ومرقمة بالأرقام $\{8, 6, 4, 3, 3\}$، ندور هذا القرص ونقرأ الرقم الذي يستقر عنده السهم:



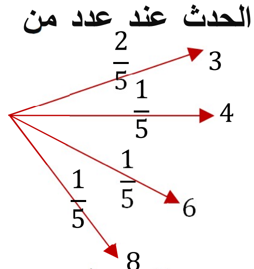
1- ارسم شجرة الإمكانات مزوداً بالاحتمالات

2- نفرض الحدث A أن يستقر القرص على عدد زوجي احسب $P(A)$ ثم $P(\overline{A})$

3- نفرض الحدث C أن يستقر الحدث عند عدد من قواسم العدد 12 احسب $P(C)$

الحل:

-1



-2 $P(A) = P(4) + P(6) + P(8)$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

-3 $P(C) = P(3) + P(4) + P(6)$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

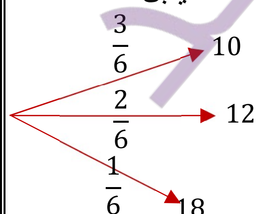
تمرين (3): مغلف يحوي 6 بطاقات مرقمة كما يلي:

$\{10,10,10,12,12,18\}$ نسحب من المغلف عشوائياً بطاقة واحدة، **والمطلوب**

1) ارسم شجرة الامكانات وزود فروعها بالاحتمالات.

2) احسب احتمال سحب بطاقة رقمه عدداً يقبل القسمة على 3

الحل: 1)



(2

3) C حدث الحصول على بطاقة تحمل عدداً يقبل القسمة على 3 فإن:

$$P(C) = P(12) + P(18)$$

$$P(C) = P(12) + P(18) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

تمرين (2):

يحوي كيس 7 كرات متماثلة رقمت بالأرقام الآتية:

$\{1,1,2,4,5,5,5\}$ نسحب عشوائياً كرة واحدة ونقرأ رقمها والمطلوب:

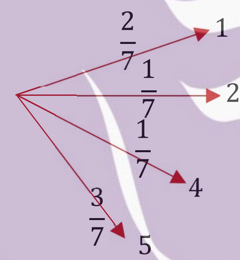
1) ارسم شجرة الإمكانات وفروعها بالاحتمالات

2) إذا كان الحدث A حدث سحب كرة تحمل رقماً أصغر تماماً من 4 احسب $P(A)$

3) عين وسيط العينة $\{1,1,2,4,5,5,5\}$

الحل:

-1



-2 $P(A) = P(2) + P(1)$

$$P(A) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

-3 $n = 7$ فردي

رتبة الوسيط

$$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

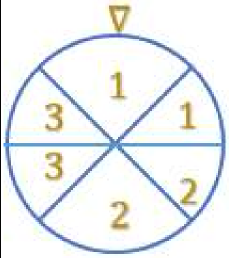
الوسيط هو المفردة الرابعة $\boxed{M = 4}$

لا تجعل العالم يغير ابتسامتك

اجعل ابتسامتك تغير العالم

ورقة عمل احتمالات (16)

تمرين (1):



في الشكل المجاور دولاب متجانس مقسم إلى ستة أقسام متساوية كتب عليها $\{1,1,2,2,3,3\}$ ندور هذا الدولاب ونقرأ الرقم الذي يستقر عنده والمطلوب:

1) ارسم المخطط الشجري للتجربة وزود فروعها بالاحتمالات المناسبة

2) إذا كان A حدث ظهور رقم أصغر تماماً من 3 احسب $P(A)$

3) عين $\overline{A}$ الحدث المعاكس للحدث A واحسب $P(\overline{A})$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تحوي جرة كرات حمراء R وكرات خضراء G وأخرى بيضاء W نعلم أن $P(R) = \frac{3}{8}$, $P(G) = \frac{1}{4}$

احسب $P(W)$

....

....

....

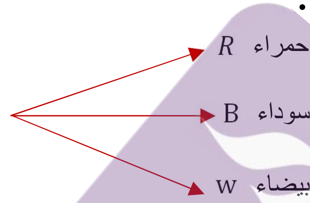
....

....

تمرين (2):

المخطط الشجري الآتي يعبر عن تجربة سحب كرة واحدة فقط من صندوق يحوي 8 كرات متماثلة منها 3 كرات سوداء و3 كرات حمراء وكرتان بيضاوان:

1) انقل التمثيل الشجري المرافق إلى ورقة إجابتك وزود فروعه بالاحتمالات الموافقة.



2) إذا كان R حدث سحب كرة احسب $P(R)$

3) إذا كان C حدث سحب كرة حمراء أو سوداء احسب $P(C)$

تمرين (3):

صندوق يحوي 5 كرات 3 حمراء (R) 2 صفراء (y)

نسحب عشوائياً من الصندوق كرة ثم نعيدها لنسحب مرة ثانية ونتأمل لوني الكرتين المسحوبتين ولنعرف الأحداث الآتية:

A حدث الحصول على كرتين حمراوين، B حدث الحصول على كرتين من اللون ذاته، والمطلوب:

1) ارسم شجرة الإمكانات وحمل فروعها بالاحتمالات الاحداث المواتية.

2) احسب $P(B), P(A)$

3) عين $\overline{B}$ الحدث المعاكس لـ B واحسب $P(\overline{B})$

4) لتكن العينة $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$ احسب المنوال والمدى والوسيط والربيع الثالث.

انتهت الوحدة السادسة

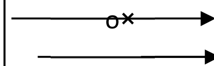
الرياضيات

(كتاب الهندسة)

للصف الثالث الإعدادي

أساسيات هندسية

موضوعة إقليدس: من نقطة لا تنتمي إلى مستقيم يمكن إنشاء موازٍ وحيد لذلك المستقيم



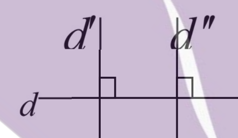
*من نقطة لا تنتمي إلى مستقيم يمكن إنشاء عمود وحيد على ذلك المستقيم

*المستقيمان المتوازيان لا يشتركان بأية نقطة

*المستقيمان المتقاطعان يشتركان بنقطة واحدة

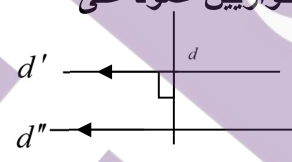
*المستقيمان المنطبقان يشتركان بجميع نقاطهما

-المستقيم القاطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر العمودان على مستقيم واحد متوازيان



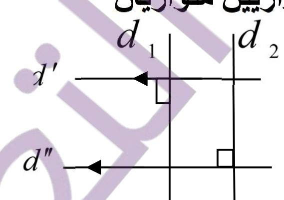
$$\left.\begin{cases} d' \perp d \\ d'' \perp d \end{cases}\right\} \Rightarrow d' // d''$$

-العمود على أحد مستقيمين متوازيين عمود على الآخر



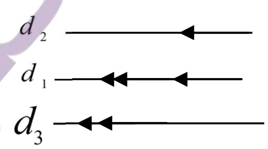
$$\left.\begin{cases} d \perp d' \\ d'' // d' \end{cases}\right\} \Rightarrow d \perp d''$$

-العمودان على مستقيمين متوازيين متوازيان



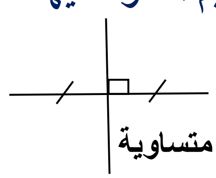
$$\left.\begin{cases} d_1 \perp d' \\ d_2 \perp d'' \\ d'' // d' \end{cases}\right\} \Rightarrow d_1 // d_2$$

-المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان



$$\left.\begin{cases} d_2 // d_1 \\ d_3 // d_1 \end{cases}\right\} \Rightarrow d_2 // d_3$$

محور قطعة مستقيمة: هو المستقيم العمودعليها والمار من منتصفها

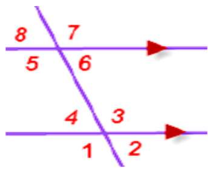


خاصة محور قطعة مستقيمة:

1-كل نقطة من محور قطعة مستقيمة متساوية البعد عن طرفيها.

2-كل نقطة متساوية البعد عن طرفي قطعة مستقيمة تكون واقعة على محور تلك القطعة المستقيمة.

المستقيمات المتوازية والقواطع:



1. إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين كانت زاويتا كل قطاعين متبادلين داخلاً متساويتين مثل:4 و6

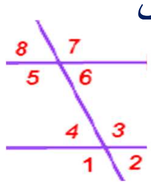
2. إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين كانت زاويتا كل قطاعين متبادلين خارجاً متساويتين مثل:1 و7

3. إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين كانت زاويتا كل قطاعين متناظرين متساويتين مثل:1 و5

4. إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين كانت زاويتا كل قطاعين داخليين متكاملين مثل:4 و5

5. إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين كانت زاويتا كل قطاعين خارجيين متكاملين مثل:1 و8

المستقيمات المتوازية والقواطع العكس (لإثبات التوازي)



1. إذا قطع مستقيم مستقيمين كانت زاويتا قطاعين متبادلين داخلاً متساويتين مثل 4 و6
كان المستقيمين متوازيين

2. إذا قطع مستقيم مستقيمين كانت زاويتا قطاعين متبادلين خارجا متساويتين مثل1 و7
كان المستقيمين متوازيين

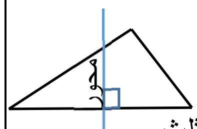
3. إذا قطع مستقيم مستقيمين كانت زاويتا قطاعين متناظرين متساويتين مثل 4 و8
كان المستقيمين متوازيين

4. إذا قطع مستقيم مستقيمين كانت زاويتا قطاعين داخليين متكاملين مثل3 و6
كان المستقيمين متوازيين

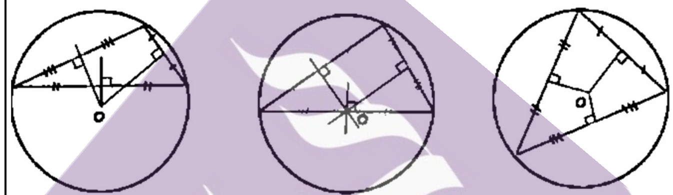
5. إذا قطع مستقيم مستقيمين كانت زاويتا قطاعين خارجيين متكاملين مثل 2 و7
كان المستقيمين متوازيين

الخطوط الأساسية في المثلث

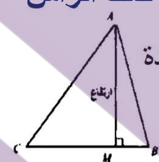
أولاً: محور المثلث: هو المستقيم العمودي على ضلع المثلث في منتصفه



محاور المثلث تتلاقى في نقطة واحدة
في المثلث الحاد الزوايا تقع داخل المثلث
في المثلث المنفرج الزاوية تقع خارج المثلث
في المثلث القائم الزاوية تقع في منتصف الوتر
نقطة تلاقي محاورالمثلث هي مركز الدائرة المارة بروؤسه

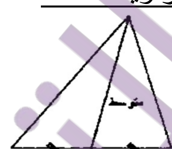


ثانياً: المستقيم الارتفاع: هو المستقيم المار من أحد رؤوس المثلث وعمود على الضلع المقابلة لذلك الرأس



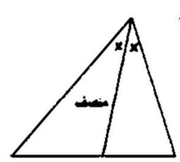
الارتفاعات في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة
في المثلث الحاد الزوايا تقع داخل المثلث
في المثلث المنفرج الزاوية تقع خارج المثلث
في المثلث القائم الزاوية تقع على رأس الزاوية القائمة

ثالثاً: المستقيم المتوسط:



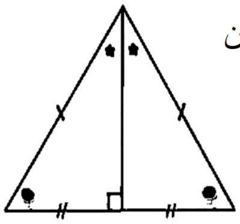
هو المستقيم المار بأحد رؤوس المثلث و بمنتصف الضلع المقابلة لذلك الرأس
نقطة تلاقي المتوسطات تقع داخل المثلث
الحاد الزوايا والمنفرج الزاوية والقائم الزاوية
هام جداً:((متوسطات المثلث تتلاقى في نقطة تسمى (مركز ثقل المثلث)
هذه النقطة تقسم كل متوسط الى جزأين طول الجزء الصغير يساوي ثلث طول المتوسط))

رابعاً: المستقيم المنصف: هو المستقيم المار من أحد رؤوس المثلث وينصف زاوية الرأس



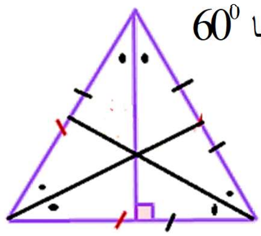
منصفات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة
إن نقطة تلاقي المنصفات تقع داخل المثلث الحاد الزوايا
والمنفرج الزاوية والقائم الزاوية
نقطة تلاقي المنصفات هي مركز الدائرة الماسة لأضلاع المثلث داخلا

المثلث المتساوي الساقين :



هو مثلث تساوى فيه طولا ضلعين
زاويتا القاعدة متساويتين
منصف زاوية الرأس
هو متوسط وارتفاع
ومحور للقاعدة

المثلث المتساوي الأضلاع: هو مثلث تساوت أضلاعه



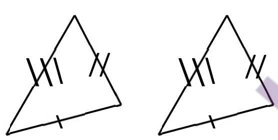
زواياه متساوية وقياس كل منها 60^0
منصفات زواياه هي
متوسطات وارتفاعات
ومحاور لأضلاعه
طول ارتفاعه $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

ومساحته: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ حيث a طول ضلعه.

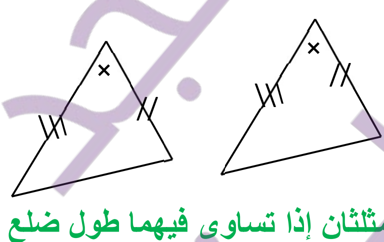
المثلثان الطبوقان: هما مثلثان تساوت أطوال أضلاعهما وتساوت قياسات زواياهما

حالات تطابق المثلثات

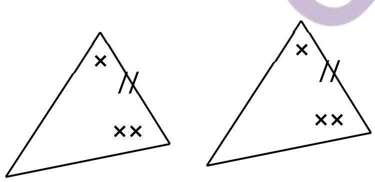
أولاً: يتطابق مثلثان إذا تساوى فيهما أطوال أضلاع المثلث الأول مع أطوال أضلاع المثلث الآخر



ثانياً: يتطابق مثلثان إذا تساوى فيهما طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما من المثلث الأول مع طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما من المثلث الآخر

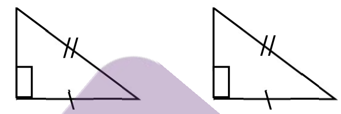


ثالثاً: يتطابق مثلثان إذا تساوى فيهما طول ضلع وقياس زاويتين تجاورانه من المثلث الأول مع طول ضلع وقياس زاويتين تجاورانه من المثلث الآخر



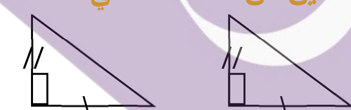
حالات تطابق المثلثات القائمة

أولاً: يتطابق المثلثان القائمان إذا تساوى فيهما طول الوتر وقياس زاوية حاد من المثلث الأول مع طول الوتر وقياس زاوية حادة من المثلث الثاني



ثانياً: يتطابق المثلثان القائمان إذا تساوى فيهما طول الوتر وطول ضلع قائمة من المثلث الأول مع طول الوتر وطول ضلع قائمة من المثلث الثاني

ثالثاً: يتطابق المثلثان القائمان إذا تساوى فيهما طولا الضلعين القائمتين من المثلث الأول مع طولا الضلعين القائمتين من المثلث الثاني



المتراجحات في المثلث:

*مجموع قياسات زوايا أي مثلث 180^o

*إذا كان في مثلث مجموع قياسي زاويتين يساوي قياس الزاوية الثالثة كان المثلث قائم

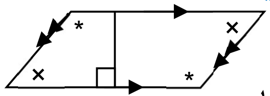
*قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين عدا المجاورة

*قياس الزاوية الخارجية في مثلث أكبر من أي زاوية داخلية عدا المجاورة

*إذا تساوت زاويتان من مثلث مع زاويتان من مثلث آخر كانت الزاوية الثالثة من الأول تساوي الثالثة للآخر

الأشكال الرباعية:

متوازي الأضلاع **:هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين**



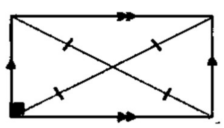
خواصه:

1- كل ضلعين متقابلين فيه متساويين
2- كل ضلعين متقابلين فيه متسايرين
3- كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتين
4- كل زاويتين متتاليتين فيه متكاملتين مجموعهما =180
5- قطراه متناصفان
6- نقطة تقاطع قطريه مركز تناظر له

مساحة متوازي الاضلاع = القاعدة ×الارتفاع
محيطه= (مجموع ضلعين متجاورين)× 2

المستطيل: **هو متوازي الأضلاع فيه زاوية قائمة**

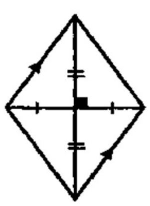
خواصه: له خواص متوازي الأضلاع ويضاف لها



1- زواياه قائمة
2- قطراه متساويا الطول
3- نقطة تقاطع قطريه مركز لدائرة تمر برؤوسه

مساحة المستطيل = الطول ×العرض
محيط المستطيل =(الطول + العرض)× 2

المعين: **هو متوازي لأضلاع تساوى فيه طولا ضلعين متجاورين**

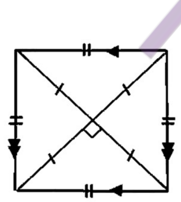


خواصه: له خواص متوازي الأضلاع ويضاف لها

1- أضلاعه متساوية الطول
2- قطراه متعامدان
3- قطر المعين ينصف الزاويتان المار من رأسيهما

مساحة المعين = نصف جداء القطرين
مساحة المعين = القاعدة ×الارتفاع
محيط المعين = طول الضلع× 4

المربع: **هو مستطيل تساوى بعداه هو معين فيه زاوية قائمة**

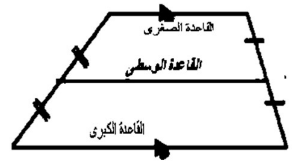


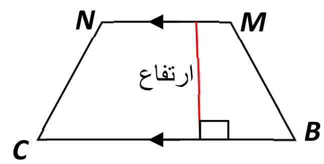
خواصه: له خواص المستطيل والمعين فيكون قطراه متناصفان ومتساويان ومتعامدان

مساحة المربع = مربع طول ضلعه
محيط المربع = طول الضلع× 4

شبه المنحرف:

هو شكل رباعي فيه ضلعين متقابلين متوازيين

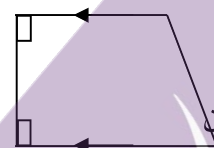




في شبه المنحرف
الزاويتان اللتان رأساهما طرفا ضلع مائلة متكاملتان
مثلاً الزاوية M تكمل الزاوية B

شبه المنحرف القائم

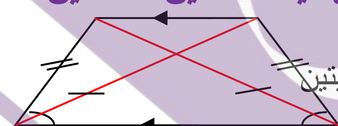
هو شبه منحرف فيه زاوية قائمة



في شبه المنحرف القائم تكون
إحدى المائلتين عمودية على القاعدتين

شبه المنحرف المتساوي الساقين:

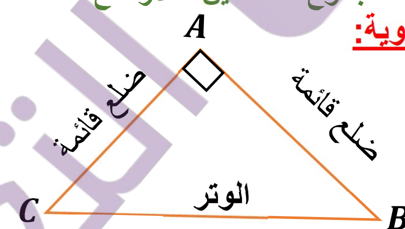
هو شبه منحرف تساوى فيه الضلعين المائلتين



1- زاويتا كل قاعدة متساويتين
2- قطراه متساويا الطول

مساحة شبه المنحرف
= نصف مجموع القاعدتين ×الارتفاع

المثلث القائم الزاوية:



ABC مثلث قائم في A نسمي الضلع المقابل للزاوية القائمة وتراً وهو BC وهو أطول الاضلاع
نسمي الضلعين $[AB],[AC]$ بالضلعين القائمتين
الزاويتين $\hat{C}$ و $\hat{B}$ متتامتان (مجموعهما 90)

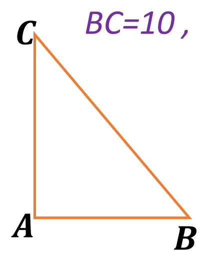
مبرهنة فيثاغورث:

((في المثلث القائم مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين القائمتين))

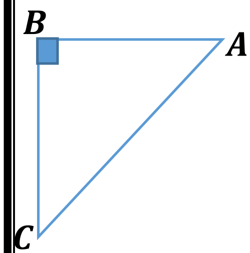
$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

((تستخدم هذه المبرهنة لحساب طول الضلع المجهول بدلالة الضلعين المعلومتين))

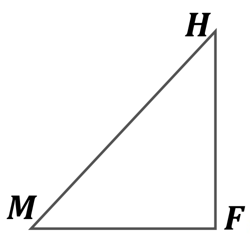
تمرين(1): ABC مثلث قائم في $\hat{A}$ فيه $BC=10$, $BA=6$, احسب طول AC



تمرين(2): ABC مثلث قائم في $\hat{B}$ فيه $BC=3$, $BA=4$, احسب طول AC



تمرين(3): MFH مثلث قائم في $\hat{F}$ فيه $MH=15$, $HF=9$, احسب طول MF



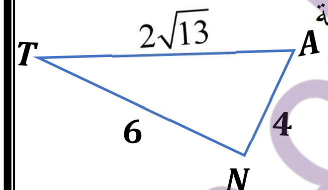
مبرهنة العكس:

((إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث يساوي مجموع مربعي الضلعين الباقيتين كان هذا المثلث قائماً وتره تلك الضلع الأطول)).

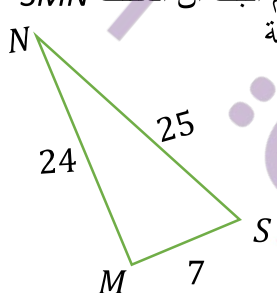
بمعنى: ABC مثلث علمت أطوال أضلاعه
وكان أطول أضلاعه BC
وكان $BC^2 = AC^2 + AB^2$
عندئذٍ يكون المثلث ABC قائم ووتره BC
فهو قائم في A

((تستخدم هذه المبرهنة لإثبات أن المثلث قائم))

مثال1: تأمل الشكل المرافق ثم أثبت أن المثلث TAN قائم وحدد وتره وزاويته القائمة



مثال2: تأمل الشكل المرافق ثم أثبت أن المثلث SMN قائم وحدد وتره وزاويته القائمة



----

1 الوحدة الأولى-هندسة

التناسب هو مساواة بين نسبتين $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

نسمي a,d طرفي التناسب و c,b وسطي التناسب

خواص التناسب

1. إذا قلبنا النسبتين نحصل على تناسب جديد أي $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

في التناسب $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$ بقلب النسبتين نحصل على التناسب $\frac{4}{3}=\frac{20}{15}$

2. إذا بادلنا بين طرفي التناسب نحصل على تناسب جديد أي $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

في التناسب $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ بتبديل موقعي الطرفين نحصل على التناسب $\frac{12}{4}=\frac{9}{3}$

3. إذا بادلنا بين وسطي التناسب نحصل على تناسب جديد أي $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

في التناسب $\frac{5}{3}=\frac{50}{30}$ بتبديل موقعي الوسطين نحصل على التناسب $\frac{5}{50}=\frac{3}{30}$

4. إذا ثبتنا المقامين وأضفنا كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

إذا كان $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$ نجد $\frac{5+7}{7}=\frac{15+21}{21}$

5. إذا ثبتنا المقامين وطرحنا كل مقام من البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

إذا كان $\frac{5}{4}=\frac{20}{16}$ نجد $\frac{5-4}{4}=\frac{20-16}{16}$

6. إذا ثبتنا البسطين وأضفنا كلّ بسط إلى المقام الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$

إذا كان $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$ نجد $\frac{5}{7+5}=\frac{15}{21+21}$

7. إذا ثبتنا البسطين وطرحنا من كل مقام البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

إذا كان $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$ نجد $\frac{2}{5-2}=\frac{8}{20-8}$

8. في كل تناسب جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين

إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإن $a\times d=b\times c$

إذا كان $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ فإن $3\times10=6\times5$

9. خاصة مجموع النسب المتساوية

إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

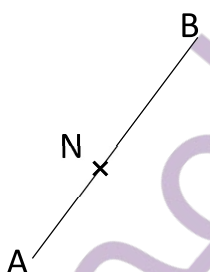
في التناسب $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ فإن: $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2+4}{3+6}=\frac{6}{9}$

10. يمكن بتربيع التناسب نحصل على تناسب جديد

إذا ربعنا التناسب $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ فإن : $\frac{4}{9}=\frac{16}{36}$

مثال في الشكل المجاور $\frac{AN}{NB}=\frac{2}{3}$

احسب طول كل من AN,NB علماً ان $AB=100$



الحل: لدينا $\frac{AN}{NB}=\frac{2}{3}$

وحسب خواص التناسب

نجد $\frac{AN+NB}{NB}=\frac{2+3}{3}$

ومنه $\frac{100}{NB}=\frac{5}{3}$

ومنه $NB=60$

$AN=100-60=40$

طالبي العزيز ستجتاز كل الصعاب عندما تصمم على النجاح ... المستقبل أمامك تأكد أنك قادر على ذلك بإذن الله

لنتعلم حل التمارين عن خواص التناسب

تمرين (1):

جد عددين موجبين مجموعهما 27 ونسبتهما $\frac{1}{2}$

الحل: لاحظ من خلال نص التمرين أن المطلوب إيجاد عددين عُلم مجموعهما لذلك :

نفرض العدد الكبير x

العدد الصغير y

* مجموع العددين هو 27 أي $\boxed{x+y=27}$

* نسبتهما $\frac{1}{2}$ لاحظ النسبة هي نسبة $\frac{\text{صغير}}{\text{كبير}}$ لأن $1<2$

ومنه $\boxed{\frac{y}{x}=\frac{1}{2}} \ldots *$

من * تطبيق الخاصية (4) وهي نثبت المقام أو جمعها إلى البسط

$$\frac{y+x}{x}=\frac{1+2}{2}$$

لاحظ من نص التمرين $x+y=27$ نعوض:

$$\frac{27}{x}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{27\times 2}{3}=\boxed{x=18}$$

نعوض في * لنحصل على y

$$\frac{y}{18}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{18\times 1}{2}\Rightarrow \boxed{y=9}$$

" العدد الكبير هو 18 والعدد الصغير 9 "

تمرين (3):

جد عددين موجبين مجموعهما 48 ونسبتهما $\frac{1}{3}$

نفرض العدد الكبير x والعدد الصغير y

$$x+y=48$$

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{3}\ldots *$$

$$\frac{y}{x+y}=\frac{1}{3+1}$$

$$\frac{y}{48}=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\frac{48\times 1}{4}\Rightarrow \boxed{y=12}$$

نعوض في *

$$\frac{12}{x}=\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{x=36}$$

" العدد الكبير 36 والعدد الصغير 12

تمرين (2):

جد عددين موجبين مجموعهما 21 ونسبتهما $\frac{4}{3}$

نفرض العدد الكبير x والعدد الصغير y

$$\boxed{x+y=21}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{4}{3}\ldots \quad *$$

لاحظ أن النسبة هي نسبة $\frac{\text{كبير}}{\text{صغير}}$ تثبيت البسوط وجمعها إلى المقامات

$$\frac{x}{x+y}=\frac{4}{3+4}$$

$$\frac{x}{21}=\frac{4}{7}\Rightarrow x=\frac{21\times 4}{7}=12$$

$$\Rightarrow \boxed{x=12}$$

نعوض في *

$$\frac{12}{y}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y=\frac{12\times 3}{4}\Rightarrow \boxed{y=9}$$

العدد الكبير 12 والعدد الصغير 9

تمرين (4) :

جد عددين موجبين فرقهما 28 ونسبتهما $\frac{12}{5}$

نفرض العدد الكبير x

العدد الصغير y

$$x-y=\ 28$$

$$\frac{x}{y}=\frac{12}{5}\ldots *$$

تذكر: الطرح ليس عملية تبديلية حافظ على الترتيب

نثبت المقامات ونطرحها من البسوط

$$\frac{x-y}{y}=\frac{12-5}{5}$$

$$\frac{28}{y}=\frac{7}{5}\Rightarrow y=\frac{28\times 5}{7}\Rightarrow \boxed{y=20}$$

نعوض في *

$$\frac{x}{20}=\frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow x=\frac{20\times 1}{5}\Rightarrow \boxed{x=48}$$

" العدد الكبير 48 والعدد الصغير 20 "

تمرين (5):

ABC مثلث قائم في $\hat{A}$ فيه $\frac{\hat{B}}{\hat{C}}=\frac{2}{3}$

أوجد قياس الزاويتين $\hat{B}$ و $\hat{C}$

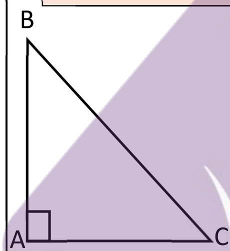
تذكر:

1- مجموع قياسات زوايا المثلث 180^0.

2- في المثلث القائم مجموع الزاويتين الحادتين 90^0

ونسمي هاتان الزاويتان زاويتان متتامتان

الحل :



$\hat{B}+\hat{C}=90^0$

لأن المثلث قائم في $\hat{A}$

$\frac{\hat{B}}{\hat{C}}=\frac{2}{3}\dots$ *

$$\frac{\hat{B}+\hat{C}}{\hat{C}}=\frac{2+3}{3}\Rightarrow\frac{90}{\hat{C}}=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow\hat{C}=\frac{90\times3}{5}\Rightarrow\boxed{\hat{C}=54^\circ}$$

نعوض في *

$$\frac{\hat{B}}{54^0}=\frac{2}{3}\Rightarrow\hat{B}=\frac{54^0\times2}{3}$$

$$\Rightarrow\boxed{\hat{B}=36^\circ}$$

ومنه $\hat{C}=54^\circ,\hat{B}=36^\circ$

تمرين (6):

$A\hat{B}C$ مثلث فيه $\hat{C}=110^\circ$, $\frac{\hat{B}}{\hat{A}}=\frac{2}{5}$

الحل: نعلم أن مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

ومنه $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

$$\Rightarrow\hat{A}+\hat{B}=180^\circ-110^\circ=70^\circ$$

$$\frac{\hat{B}}{\hat{A}}=\frac{2}{5}\dots\quad(*)$$

$$\frac{\hat{B}+\hat{A}}{\hat{A}}=\frac{2+5}{5}$$

$$\frac{70}{\hat{A}}=\frac{7}{5}\Rightarrow\hat{A}=\frac{70\times5}{7}=\Rightarrow\boxed{\hat{A}=50^\circ}$$

$$\frac{\hat{B}}{50^0}=\frac{2}{5}\Rightarrow\hat{B}=\frac{50^0\times2}{5}\Rightarrow\boxed{\hat{B}=20^\circ}$$

ومنه $\hat{A}=50^\circ,\hat{B}=20^\circ$

ورقة عمل (1)

س(1): جد الرابع المتناسب في كل من الحالات الآتية:

① $\frac{x}{3}=\frac{5}{12}$

....

....

....

② $\frac{y}{0.2}=\frac{0.04}{0.08}$

....

....

....

③ $\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{8}}{4}$

....

....

....

④ $\frac{5}{x}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

....

....

....

س(2): حل التمارين الآتية:

تمرين (1): ABC مثلث فيه $A=55^\circ$, $\frac{\hat{B}}{\hat{C}}=\frac{2}{3}$

جد قياس $\hat{C},\hat{B}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

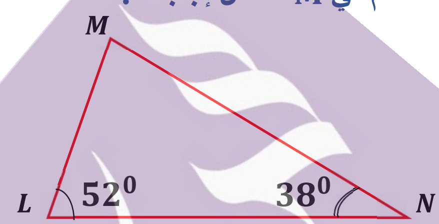
أولاً: حالات لإثبات أن المثلث قائم الزاوية :

الحالة الأولى:

إذا كان مجموع قياس زاويتين حادتين في مثلث 90^0 فالمثلث قائم في الزاوية الثالثة .

⊙ إذا كان ABC مثلث $\hat{B} + \hat{C} = 90°$ فالمثلث قائم في $\hat{A}$

مثال: MLN مثلث فيه $\hat{L} = 52^0 , \hat{N} = 38^0$,
هل المثلث قائم في $\hat{M}$ ؟ علل إجابتك .



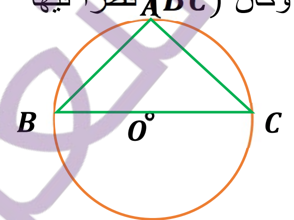
الحل:

المثلث $M\hat{L}N$ فيه $\hat{L} + \hat{N} = 52^0 + 38^0 = 90^0$
فالمثلث قائم في $\hat{M}$ لأن مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$

الحالة الثانية:

إذا كان أحد أضلاع مثلث قطر في دائرة تمر برؤوسه كان المثلث قائم في الزاوية المقابلة لتلك الضلع.

⊙ إذا كان ABC مثلث مرسوم في دائرة **"أي رؤوسه تقع على محيط دائرة واحدة"** وكان (BC) قطراً فيها فالمثلث قائم في $\hat{A}$.

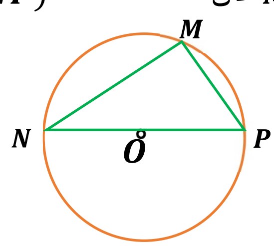


مثال:

في الشكل المجاور $M\hat{N}P$ مثلث مرسوم في دائرة l مركزها O، أثبت أن $M\hat{N}P$ قائم في $\hat{M}$

الحل:

المثلث MNP قائم في $\hat{M}$ لأن أحد أضلاعه (NP) قطر في الدائرة l

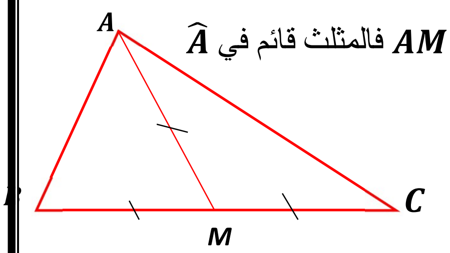


الحالة الثالثة:

في مثلث: إذا كان طول المتوسط المتعلق بضلع يساوي نصف طول تلك الضلع فالمثلث قائم ووتره تلك الضلع

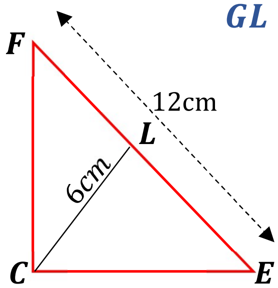
تذكر: المتوسط هو المستقيم النازل من رأس المثلث ويقسم الضلع المقابل للرأس إلى قسمين متساويين.

ABC مثلث فيه AM متوسط
إذا تحقق أن :
$AM = MC = MB$ فالمثلث قائم في $\hat{A}$



مثال:

في الشكل المجاور GEF مثلث فيه GL متوسط
$GL = 6\ cm$ و $FE = 12\ cm$
أثبت أن المثلث قائم في $\hat{G}$



الحل:

بما أن $FE = 12$ و GL متوسط
$\Longrightarrow [GL] = [FL] = [LE] = 6\ cm$
فالمثلث $G\hat{E}F$ قائم في $\hat{G}$ حسب مبرهنة عكس المتوسط

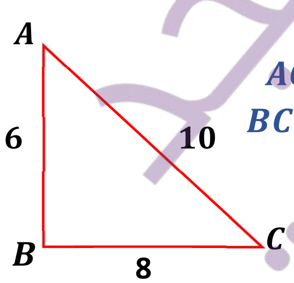
الحالة الرابعة:

مبرهنة عكس فيثاغورث :

إذا كان مربع طول ضلع في مثلث يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فالمثلث قائم ووتره تلك ضلع.

مثال (1):

ABC مثلث فيه $AC = 10\ cm$
و $AB = 6\ cm$ و $BC = 8\ cm$



الحل:

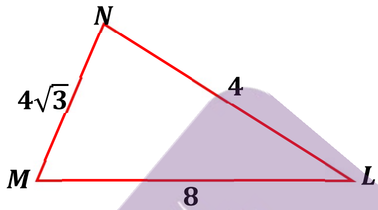
أطول ضلع هو $AC = 10$
نأخذ مربع AC
$(AC)^2 = (10)^2 = 100$
مجموع مربعي الضلعين الباقيتين
$(AB)^2 + (BC)^2 = (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100$
حسب عكس فيثاغورث فالمثلث قائم في $\hat{B}$
"الزاوية B المقابلة لأطول ضلع AC "

مثال (2): $\overset{\Delta}{MNL}$ مثلث فيه $\mathbf{ML = 8\ cm}$

$NL = 4\ cm\ , MN = 4\sqrt{3}\ cm$

أثبت أن المثلث MNL قائم للزاوية في $\widehat{N}$

الحل:



$(ML)^2 = (8)^2 = 64$

$(NM)^2 + (NL)^2$

$= \left(4\sqrt{3}\right)^2 + (4)^2 = 16 \times 3 + 16$

$= 48 + 16 = 64$

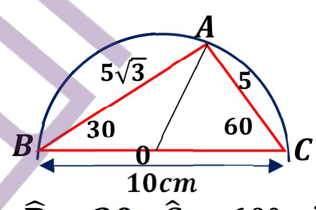
$\Longrightarrow (ML)^2 = (NM)^2 + (NL)^2$

حسب عكس فيثاغورث المثلث قائم في N

تمرين:

ℓ دائرة مركزها O ونصف قطرها R ، ABC مثلث مرسوم فيها و BC قطر كما هو مبين بالشكل.

أثبت بأربعة طرق مختلفة أن المثلث قائم في $\widehat{A}$



الحل:

① المثلث $\overset{\Delta}{\mathbf{ABC}}$ فيه $\widehat{C} = 60°\ , \mathbf{\widehat{B} = 30}$

$\mathbf{\widehat{B} + \widehat{C} = 30^0 + 60^0 = 90^0}$ فالمثلث قائم في $\mathbf{\widehat{A}}$

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث $\mathbf{180^0}$.

② $\overset{\Delta}{\mathbf{ABC}}$ مرسوم في دائرة قطرها **BC** فالمثلث قائم في $\mathbf{\widehat{A}}$ لأن أحد أضلاعه قطراً في الدائرة $\boldsymbol{\ell}$

③ **[AO]** متوسط لأن

$\mathbf{[AO] = [CO] = [BO] = R = 5\ cm}$ فالمثلث قائم الزاوية في $\mathbf{\widehat{A}}$ بحسب مبرهنة عكس المتوسط.

④

$\mathbf{(BC)^2 = (10)^2 = 100}$

$\boldsymbol{(AB)^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75}$

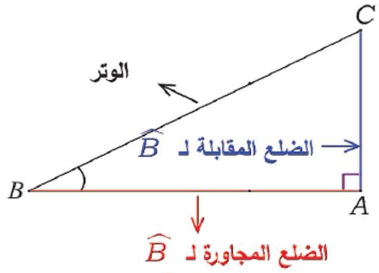
$\mathbf{(AC)^2 = (5)^2 = 25}$

ومنه $\mathbf{(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 100}$

حسب عكس فيثاغورث فالمثلث قائم في $\boldsymbol{\widehat{A}}$.

الدرس الثاني
النسب المثلثية للزاوية الحادة في المثلث القائم

الوتر: هو الضلع المقابلة للزاوية القائمة وهو أطول أضلاع المثلث القائم.



إذا كانت $\boldsymbol{\widehat{B}}$ زاوية حادة في مثلث قائم $\overset{\Delta}{\mathbf{ABC}}$ فإن:

$$\sin \widehat{B} = \frac{\text{طول الضلع المقابلة لـ}\widehat{B}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\sin \widehat{B} = \frac{CA}{CB}$$

(مقابلة زاوية لا تحويها)

لاحظ مقابل $\boldsymbol{\widehat{B}}$ هو $\boldsymbol{CA}$ لا يحوي $\boldsymbol{B}$

$$\mathbf{\cos \widehat{B}} = \frac{\text{طول الضلع القائمة المجاورة لـ}\widehat{B}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{CB}$$

(مجاورة زاوية يحويها مع الزاوية القائمة)

لاحظ مجاورة $\widehat{B}$ هو AB أي الزاوية $\mathbf{\widehat{B}}$ مع الزاوية القائمة $\mathbf{\widehat{A}}$.

$$\mathbf{\tan \widehat{B}} = \frac{\text{طول الضلع المقابلة ل }\widehat{B}}{\text{طول الضلع القائمة المجاورة ل }\widehat{B}}$$

$$\mathbf{\tan \widehat{B} = \frac{CA}{AB}}$$

ملاحظات هامة :

① النسبتين المثلثيتين $\sin \widehat{\theta}$ و $\cos \widehat{\theta}$ هي أعداد محصورة بين الصفر والواحد:

$0 < \sin \widehat{\theta} < 1$

$0 < \cos \widehat{\theta} < 1$

② $\tan \widehat{\theta} > 0$

③ النسب المثلثية لأي زاوية حادة هي أعداد موجبة تماماً لأنها نسب أبعاد.

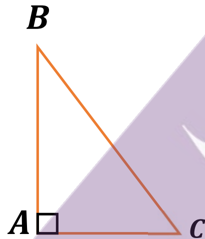
④ النسب المثلثية لأي زاوية حادة ليس لها واحدة

مثال (2): $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قائم في $\hat{A}$

$AC = 8\ cm$ و $AB = 6\ cm$

1) احسب طول الوتر BC وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه، واحسب طول نصف قطرها

2) احسب $\sin \hat{C}$ و $\cos \hat{C}$.



الحل:

لحساب طول BC نطبق مبرهنة فيثاغورث:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$(BC^2) = (6)^2 + (8)^2$

$(BC^2) = 36 + 64 = 100$

$(BC) = 10$ بالجذر

تذكر: مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث القائم منتصف الوتر.

$$\boldsymbol{R} = \frac{\text{الوتر}}{\mathbf{2}}$$

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5\ cm$$

مركز الدائرة منتصف BC

②

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

دوماً اكتب النسب بأبسط صورة

طلب إضافي: احسب محيط ومساحة المثلث ABC

تذكر :

محيط المثلث = مجموع أطول أضلاعه .

مساحة المثلث القائم = $\frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{\mathbf{2}}$

$P = AB + AC + BC$

$P = 6 + 8 + 10 = 24\ cm$

$$S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 24\ cm^2$$

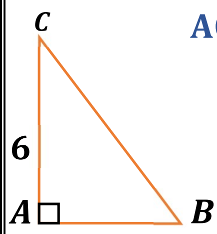
بماذا تفيد معرفة النسب المثلثية ؟

تفيد معرفة النسب المثلثية في حساب أطوال أضلاع في مثلث قائم أو أجزاء منها :

① إذا كانت النسبة المعلومة هي (sin) تفيد في حساب طول الضلع المقابلة للزاوية $\hat{\theta}$ أو لحساب الوتر

مثال: ليكن $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قائم في $\hat{A}$ ، $\sin \hat{B} = \frac{3}{5}$

احسب طول BC إذا علمت أن $AC = 6$



الحل:

النسبة المعلومة هي $\sin \hat{B}$

والطول المعلومة هي المقابل لـ $\hat{B}$

يمكننا حساب طول الوتر كما يلي :

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{المقابلة}}{\text{الوتر}} = \frac{CA}{CB} = \frac{3}{5} \Longrightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{CB}$$

ومنه:

$$CB = \frac{5 \times 6}{3} = 10$$

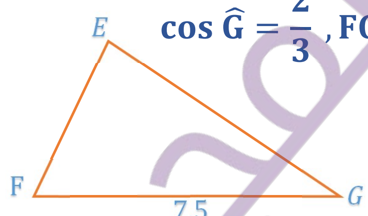
② إذا كانت النسبة المعلومة هي (cos) تفيد في حساب طول الضلع المجاور وطول الوتر.

مثال: EFG مثلث قائم في $\hat{E}$

$$\cos \hat{G} = \frac{2}{3}\ , FG = 7.5$$

احسب طول EG .

الحل:



$$\cos \hat{G} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{EG}{FG}$$

$$\cos \hat{G} = \frac{EG}{FG}$$

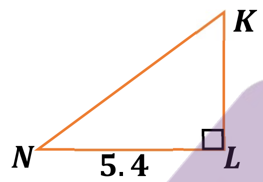
$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{EG}}{\mathbf{7.5}}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{EG} = \frac{\mathbf{2 \times 7.5}}{\mathbf{3}} = \mathbf{5}$$

③ إذا كانت النسبة المعلومة هي (tan) يمكننا حساب طول الضلع المقابل وطول الضلع المجاور.

مثال: احسب طول KL اذا كان KLN مثلث قائم في $\hat{L}$

$\tan\hat{N} = \frac{1}{3} \quad , LN = 5.4$



الحل:

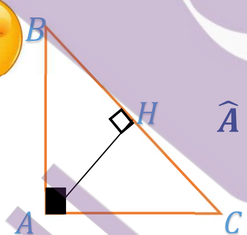
$$\tan\hat{N} = \frac{\text{المقابلة}}{\text{المجاور}} = \frac{KL}{NL}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{KL}{5.4}$$

$$\Longrightarrow KL = \frac{5.4 \times 1}{3} = 1.8$$

سنتعلم كيفية نحسب طول ضلع بإيجاد نسبة مثلثية من مثلثين قائمين :

تمرين حلووووو:



$\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قائم الزاوية في $\hat{A}$

$AB = 6$ و $AC = 8$

❶ احسب طول BC .

❷ احسب $\sin\hat{C}$ من المثلث ABC

❸ احسب $\sin\hat{C}$ من المثلث ACH

❹ استنتج أن : $\frac{AH}{8} = \frac{6}{10}$ ثم احسب طول AH

الحل: 1) من المثلث القائم $\overset{\Delta}{ABC}$ وحسب فيثاغورث

$$(BC^2) = (AB)^2 + (AC)^2$$
$$(BC)^2 = 36 + 64 = 100$$
$$\boxed{BC = 10}$$

2) من المثلث القائم $\overset{\Delta}{ABC}$ القائم في $\hat{A}$:

$$\sin\hat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} \ldots (1)$$

3) من المثلث القائم $\overset{\Delta}{AHC}$ القائم في $\hat{H}$:

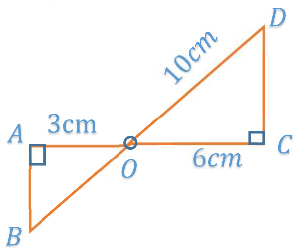
$$\sin\hat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{8} \ldots (2)$$

4) من(1) و (2)نجد: $\frac{AH}{8} = \frac{6}{10}$

$$\Longrightarrow AH = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{48}{10} = 4.8$$

تمرين عسل:

المستقيمان (DB) و (AC) متقاطعان في O كما هو مبين في الشكل:



❶ أثبت أن $\widehat{DOC} = \widehat{AOB}$.

❷ احسب طول DC .

❸ احسب $\cos\widehat{DOC}$.

❹ استنتج أن $OB = 5$

الحل:

1) $\widehat{DOC} = \widehat{AOB}$

زاويتان متقابلتان بالرأس لأنه لهما رأس مشترك O وضلعا إحداهما امتداد لضلعي الأخرى.

2) من المثلث القائم $\overset{\Delta}{OCD}$ حسب فيثاغورث

$$(OD)^2 = (OC)^2 + (CD)^2$$
$$(CD)^2 = (OD)^2 - (OC)^2$$
$$= 100 - 36 = 64$$
$$CD = 8$$

3)

$$\cos D\hat{O}C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{OC}{OD} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos D\hat{O}C = \frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5}$$

4)

$$\cos A\hat{O}B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{OB}$$

بما أن $D\hat{O}C = A\hat{O}B$

$$\Longrightarrow \mathbf{cos} D\hat{O}C = \cos A\hat{O}B$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{OB}$$

$$\Longrightarrow OB = \frac{3 \times 5}{3} = 5$$

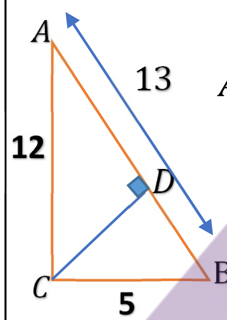
$$\Longrightarrow \boxed{OB = 5}$$

ورقة عمل (2):

تمرين (1):

في الشكل المجاور ABC مثلث فيه

$AC = 12 \ ,BC = 5 \ ,AB = 13$



1) أثبت أن ABC قائم الزاوية في $\hat{C}$

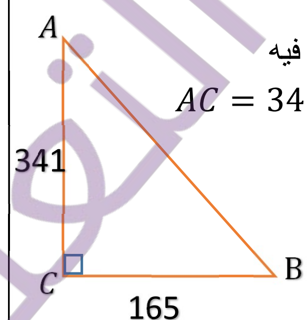
2) احسب $sin\hat{B}$ من المثلث ABC

واحسب CD

تمرين (2):

في الشكل المجاور ABC مثلث فيه

$AC = 341 \ ,BC = 165$



1) اوجد $GCD(341,165)$

2) احسب $tan\hat{B}$

وضعه بأبسط صورة

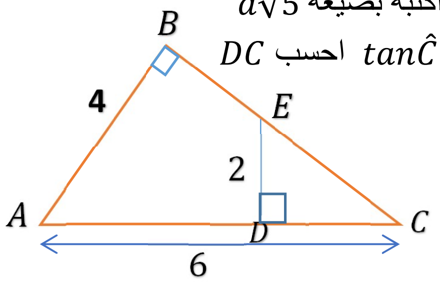
تمرين (3):

في الشكل المجاور ABC مثلث قائم في B

فيه $ED = 2 , AC = 6 , AB = 4$

1) احسب BC واكتبه بصيغة $a\sqrt{5}$

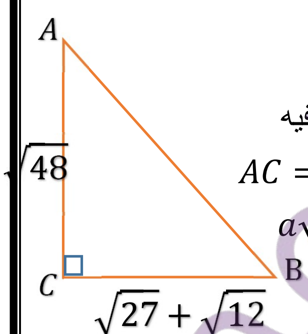
2) بالاستفادة من $tan\hat{C}$ احسب DC



تمرين (4):

في الشكل المجاور ABC مثلث فيه

$AC = \sqrt{48}, BC = \sqrt{27} + \sqrt{12}$



1) اكتب BC و AC بالصيغة $a\sqrt{b}$

2) احسب $tan\hat{B}$

وضعه بأبسط صورة

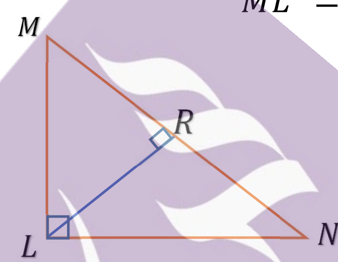
تمرين (3):

في الشكل المجاور MNL مثلث قائم في L

$LR \perp MN$

1) عبر عن $sin\widehat{N}$ و $cos\widehat{M}$ من المثلث القائم $\overset{\Delta}{MLN}$ ثم استنتج أن $cos\widehat{M} = sin\widehat{N}$

2) عبر عن $cos\widehat{M}$ من المثلث MLR ، ثم استنتج أن $ML^2 = MN \times MR$



....

....

....

....

الدرس الثالث
علاقتان مهمتان في النسب المثلثية

أفكار:

① **إذا كانت $\widehat{\theta}$ زاوية حادة في مثلث قائم فإن:**

$$\sin^2\widehat{\theta} + \cos^2\widehat{\theta} = 1 \ldots \quad (1)$$

تُفيد هذه المطابقة في حساب $\cos\widehat{\theta}$ وذلك إذا عُلم $\sin\widehat{\theta}$ والعكس صحيح.

من العلاقة (1)

$$\sin^2\widehat{\theta} = 1 - \cos^2\widehat{\theta}$$

$$\cos^2\widehat{\theta} = 1 - \sin^2\widehat{\theta}$$

مثال1: $\overset{\Delta}{ABC}$ **مثلث قائم في** $\widehat{A}$

إذا علمت أن $\sin\widehat{B} = \frac{3}{5}$، **احسب** $\cos\widehat{B}$.

الحل : لاحظ في المثال عُلم $\sin\widehat{B}$ والمطلوب $\cos\widehat{B}$

نستفيد من المطابقة $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B$$

$$\cos^2 B = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos^2\widehat{B} = \frac{1}{\underset{(25)}{1}} - \frac{9}{\underset{(1)}{25}} = \frac{16}{25}$$

وبالجذر نجد $\cos\widehat{B} = \frac{4}{5}$

مثال2: إذا كانت θ زاوية حادة وكان: $cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

احسب $sin(\theta)$

الحل: نعلم أن $Sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$Sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$Sin^2\theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$Sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4}$$

$$Sin^2\theta = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

ومنه $Sin\theta = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

2) إذا كانت $\hat{\theta}$ زاوية حادة في مثلث قائم فإن:

$$\tan\hat{\theta} = \frac{\sin\hat{\theta}}{\cos\hat{\theta}}$$

مثال: إذا علمت أن $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قائم في $\hat{A}$ فيه $\tan\hat{C} = \frac{5}{12}$ احسب $\sin\hat{C}$ و $\cos\hat{C}$

الحل:

② استخدام خواص التناسب:

$$\tan\hat{C} = \frac{\sin\hat{C}}{\cos\hat{C}} = \frac{5}{12} \quad ... \quad *$$

بتربيع طرفي العلاقة *

$$\frac{\sin^2\hat{C}}{\cos^2\hat{C}} = \frac{25}{144}$$

نثبت البسوط ونجمعها إلى المقامات

$$\frac{\sin^2\hat{C}}{\cos^2\hat{C} + \sin^2\hat{C}} = \frac{25}{144 + 25}$$

$$\frac{\sin^2\hat{C}}{1} = \frac{25}{169}$$

ومنه

$$\sin^2\hat{C} = \frac{1 \times 25}{169}$$

بالجذر

$$\sin\hat{C} = \frac{5}{13}$$

نعوض في *

$$\frac{\frac{5}{13}}{\cos\hat{C}} = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{\frac{5}{13} \times 12}{5} = \frac{5}{13} \times \frac{12}{5} = \frac{12}{13}$$

③ $\sin\hat{\theta} = \cos(90 - \hat{\theta})$

في المثلث القائم إذا كانت $\hat{\theta}$ زاوية حادة فإن $\sin\hat{\theta}$ يساوي cos المتممة لها .

مثال : MLN مثلث قائم في $\hat{M}$, $\sin\hat{N} = \frac{3}{5}$

احسب $\cos\hat{L}$.

الحل : $\hat{L}$ و $\hat{N}$ زاويتان حادتان متتامتان في مثلث قائم MNL ومنه

$$\sin\hat{N} = \cos\hat{L} = \frac{3}{5}$$

الدرس الرابع
نسب زوايا شهيرة

جدول النسب المثلثية للزوايا الشهيرة :

θ	30	45	60
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

تُفيد النسب المثلثية في حساب أطوال أضلاع في مثلث قائم كما يلي :

$\sin\hat{\theta}$:
- ❶ تُستخدم لحساب المقابل .
- ❷ تُستخدم لحساب الوتر .

$\cos\hat{\theta}$:
- ❶ تُستخدم لحساب المجاور .
- ❷ تُستخدم لحساب الوتر .

$\tan\hat{\theta}$:
- ❶ تُستخدم لحساب المقابل .
- ❷ تُستخدم لحساب المجاور .

أفكار :

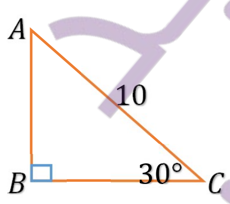
(1): في المثلث القائم طول الضلع القائمة المقابلة للزاوية **30** يساوي نصف طول الوتر.

(2): في المثلث القائم إذا كانت إحدى زواياه **45** فالمثلث قائم ومتساوي الساقين.

مثال: $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قائم في $\hat{B}$

$\hat{C} = 30$ و $AC = 10$

احسب طول AB وBC



الحل:

$$[AB] = \frac{1}{2}[AC] = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{10} \Rightarrow BC = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

س(1) في كل مما يلي هناك إجابة صحيحة واحدة حددها

① مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم في $\hat{A}$ طول وتره $BC = 10cm$ فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوي:

A	$\boxed{5cm}$	B	10cm	c	20cm

التوضيح:

$$R = \frac{\text{الوتر}}{2} = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5\ cm$$

② إذا كانت $\hat{\theta}$ زاوية حادة في مثلث قائم $\sin\hat{\theta} = \frac{1}{2}$ فإن $\cos\hat{\theta}$ يساوي :

A	$\frac{1}{2}$	B	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	c	$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

التوضيح: عندما يرد سؤال بهذا الشكل ننظر إلى النسبة المعطاة , إذا كانت نسبة لزاوية شهيرة فإننا نوجد **sin** أو **cos** من الجدول الذي حفظناه.

نلاحظ هنا أن $\sin\hat{\theta} = \frac{1}{2}$ وهي نسبة للزاوية الشهيرة $30°$ وبالتالي : $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

③ إذا كانت $\hat{B}$ زاوية حادة في مثلث قائم وكان $\cos\hat{B} = \frac{2}{3}$ فإن $\sin\hat{B}$ هو :

A	$\frac{3}{2}$	B	$\boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}}$	c	$\frac{5}{9}$

التوضيح: إذا لم تكن النسبة المعطاة لزاوية شهيرة عندئذ نطبق العلاقة : $\sin^2\hat{\theta} + \cos^2\hat{\theta} = 1$ ومنه :

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$\sin\hat{\theta} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ بالجذر

④ إذا كانت $\hat{\theta}$ زاوية حادة في مثلث قائم وكان: $\cos 40 = \sin\hat{\theta}$ فإن قياس الزاوية $\hat{\theta}$ هو :

A	$70°$	B	$60°$	c	$\boxed{50°}$

التوضيح:

$$\sin 90° = \cos(90° - \theta)$$

المتم للزاوية $40°$ هو $\boxed{90° - 40° = 50°}$

⑤ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 2cm فإن طول الارتفاع فيه :

A	$\boxed{\sqrt{3}}$	B	$\frac{\sqrt{12}}{3}$	C	$1.5\sqrt{3}$

التوضيح:

تذكر: طول الارتفاع في المثلث المتساوي الأضلاع

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

⑥ قيمة المقدار $\sin^2 35 + \sin^2 55$ يساوي :

A	$\boxed{1}$	B	0	c	2

التوضيح: عندما يرد سؤال

$\begin{cases} \sin^2 \text{ مع } \sin^2 \\ \cos^2 \text{ مع } \cos^2 \end{cases}$ إذا كان مجموع الزاويتين يساوي $90°$ فالجواب هو **1**

$$35 + 55 = 90°$$

التمرين (1):

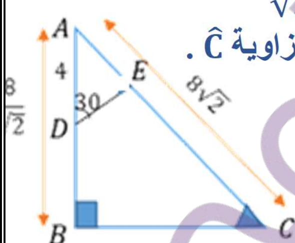
في الشكل المجاور $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قائم في $\hat{B}$ فيه

$AC = 8\sqrt{2}\ cm\ , AD = 4\ cm$

$AB = \frac{8}{\sqrt{2}}\ , A\hat{D}E = 30^0$

1) جد $\sin\hat{C}$ واستنتج قياس الزاوية $\hat{C}$.

2) ما نوع المثلث ADE بالنسبة لزواياه؟



الحل:

1) من المثلث القائم $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\sin\hat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{8}{\sqrt{2}}}{8\sqrt{2}}$$

$\sin\hat{C} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ **ومنه نجد** $\hat{C} = 30°$

2) **المثلث** $\overset{\Delta}{ADE}$ فيه $\hat{A} = 60$ و $\hat{D} = 30^0$

ولأن مجموع زوايا المثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ يساوي $\mathbf{180^0}$ فإن:

$\hat{A} = 180 - (30 + 90) = 60^0\ \hat{E}$
$= 180 - (30 + 60) = 90^0$

فالمثلث قائم الزاوية في E

التمرين (2): تأمل الشكل المجاور لدينا ℓ دائرة مركزها O و AD قطراً $AD = 10$ و$EC = 3$ و$AB = 6$

❶ ما نوع المثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ ؟ علل إجابتك

ثم احسب طول BD

❷ احسب طول CD وED

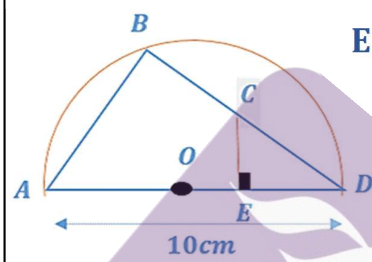
وAE

❸ عين مركز الدائرة

المارة برؤوس المثلث

ECD ثم احسب طول

نصف قطرها .



الحل: لمثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ قائم الزاوية في $\hat{B}$ لأن أحد أضلاعه وهو AD قطر في الدائرة ℓ .

$$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$$

$$100 = 36 + (BD)^2$$

$$\Longrightarrow (BD)^2 = 100 - 36 = 64$$

$BD = 8$ cm بالجذر

2) لحساب CD نأخذ $\sin \hat{D}$ من مثلثين قائمين

$$\sin \hat{D} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{EC}{CD} = \frac{3}{CD} \dots (1)$$

$$\sin \hat{D} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AD} = \frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5} \dots (2$$

$$\frac{3}{CD} = \frac{3}{5} \Longrightarrow CD = 5cm$$

لحساب ED نطبق فيثاغورث في المثلث ECD :

$$(CD)^2 = (CE)^2 + (ED)^2$$

$$25 = 9 + (ED)^2$$

$$(ED)^2 = 25 - 9 = 16$$

$ED = 4$ cm بالجذر

$$AE = AD - ED = 10 - 4 = 6\text{cm}$$

3) مركز الدائرة المارة برؤوسه هو منتصف الوتر CD:

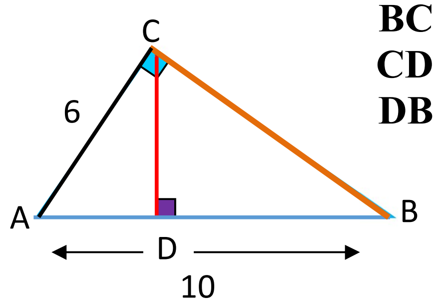
$$R = \frac{CD}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ cm}$$

في الشكل المجاور

1) أحسب BC

2) أحسب CD

3) أحسب DB



الحل:1-حساب BC : حسب مبرهنة فيثاغورث

نجد $BA^2 = AC^2 + BC^2$

ومنه $10^2 = 6^2 + BC^2$

$$100 = 36 + BC^2$$

$$BC^2 = 100 - 36 = 64$$

$$BC = \sqrt{64} = 8$$

2- حساب CD ((ارتفاع المثلث القائم الزاوية))

في المثلث القائم ABC لدينا

$$\sin \mathbf{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \dots\dots\dots\dots(1)$$

وفي المثلث القائم ADC لدينا

$$\sin \mathbf{A} = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{6} \dots\dots\dots\dots(2)$$

من (1) و(2) نجد: $\frac{CD}{6} = \frac{4}{5}$

ومنه نجد $CD = \frac{4 \times 6}{5} = \frac{24}{5}$

3- حساب DB((أحد جزأي الوتر المعينين بالارتفاع))

***يمكن حساب BD بحسب فيثاغورث في المثلث القائم CDB

أو بالشكل التالي: في المثلث القائم ABC لدينا

$$\cos \hat{B} = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \dots\dots\dots\dots(1)$$

وفي المثلث القائم BDC لدينا

$$\cos \hat{B} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{8} \dots\dots\dots\dots(2)$$

من (1) و(2) نجد: $\frac{BD}{8} = \frac{4}{5}$

ومنه $BD = \frac{4 \times 8}{5} = \frac{32}{5}$

مسألة جميلة جداً وأفكارها غنية:

تأمل الشكل المجاور **ABC** مثلث قائم في $\hat{B}$

$AB = 4\ cm$ و $BC = 4\sqrt{3}\ cm$

و $AM = 3\ cm$ ، **M** نقطة من **AC** المثلث $\overset{\Delta}{AMN}$ فيه

$AN = 2\sqrt{3}\ cm$ و $MN = \sqrt{3}\ cm$

❶ احسب طول **AC** ثم احسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه .

❷ احسب $\cos B\hat{A}C$ و $\sin B\hat{C}A$ ثم استنتج قياسات زوايا المثلث **ABC** .

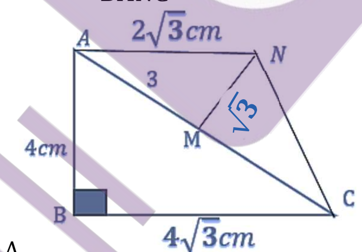
❸ أثبت أن المثلث $\overset{\Delta}{AMN}$ قائم في $\hat{M}$.

❹ احسب $\cos M\hat{A}N$ و $\sin M\hat{N}A$ واستنتج قياسات زوايا المثلث **AMN** .

❺ استنتج أن : $NC = 2\sqrt{7}\ cm$.

❻ ما نوع الرباعي **BANC** ؟ علل إجابتك.

❼ استنتج أن : $S_{BANC} = 12\sqrt{3}\ cm^2$



الحل:

1) حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = 16 + 48 = 64$$

$AC = \sqrt{64} = 8$ بالجذر

ومركز الدائرة المارة برؤوسه منتصف الوتر

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4\ cm$$

2) **لدينا** $\cos B\hat{A}C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$\sin B\hat{C}A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

ومنه

$$\hat{B} = 90^0\ , \hat{C} = 30^0\ \ , \hat{A} = 60^0$$

3) حسب عكس مبرهنة فيثاغورث في المثلث **AMN**

$$(AN)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$$

$$(AM)^2 + MN^2 = 12$$

$$\Longrightarrow (AN)^2 = (AM)^2 + (MN)^2 = 12$$

فالمثلث قائم في $\hat{\mathbf{M}}$

(4

$$\cos M\hat{A}N = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AM}{AN} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\cos M\hat{A}N = \frac{3 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \widehat{MNA} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AM}{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه : $\hat{N} = 60^0$ و $\hat{A} = 30^0$ و $\hat{M} = 90^0$

5) المثلث $\overset{\Delta}{MNC}$ قائم الزاوية في $\hat{\mathbf{M}}$ حسب فيثاغورث

$$(NC)^2 = (MN)^2 + (MC)^2$$

$$(NC)^2 = 3 + 25 = 28$$

$NC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ بالجذر

(6

$$N\hat{A}C = 30^0\ , B\hat{A}C = 60^0$$

$$N\hat{A}B = 30^0 + 60^0 = 90^0$$

ومنه

$$\left.\begin{array}{l} AN \perp AB \\ BC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow NA \parallel BC$$

العمودان على مستقيم واحد متوازيان

والرباعي $ANCB$ شبه منحرف قائم لأن إحدى زواياه قائمة .

(7

$$S_{BANC} = S_{ABC} + S_{ANC}$$

$$S_{BANC} = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\ cm^2$$

وهو المطلوب.

انتهت الوحدة الأولى

كن أنتَ الملفت
الذي لا يلتفِتْ

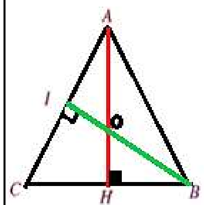
مسألة جميلة جداً وأفكارها عسلية:

① AH و BI ارتفاعان في مثلث ABC متساوي الأضلاع، طول ضلعه 1.

1. ① ما قياس الزاوية $\widehat{ABH}$؟ احسب طول AH

② استنتج مساحة المثلّث ABC.

2. ما قياس الزاوية $\widehat{OBH}$؟ احسب طول OH.



الحل:

1. ① حساب قياس الزاوية $A\widehat{B}H$

لدينا المثلث ABC متساوي الاضلاع

فقياس كل زاوية فيه 60° ومنه $A\widehat{B}H=60^\circ$

حساب طول AH:

طريقة(1) : AH ارتفاع في مثلث متساوي الاضلاع

فإن $AH=\frac{a\times\sqrt{3}}{2}$ ومنه

$$AH=\frac{1\times\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

طريقة(2):لدينا AH ارتفاع في مثلث متساوي الاضلاع ABC فهو متوسط ومنه $HC=HB=\frac{1}{2}$

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم ABH :

$$AB^2=AH^2+HB^2$$

ومنه $1^2=AH^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

ومنه $1=AH^2+\frac{1}{4}$

ومنه $AH^2=1-\frac{1}{4}$

ومنه $AH^2=\frac{3}{4}$ ومنه $AH=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

طريقة(3): في المثلث القائم AHB لدينا

$A\widehat{B}H=60^\circ$

ومنه $\sin A\widehat{H}B=\frac{AH}{AB}$

ومنه $AH=AB\times\sin A\widehat{B}H$

ومنه $AH=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $AH=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

حساب مساحة المثلث ABC:

طريقة(1) : ABC مثلث متساوي الاضلاع

$$S_{ABC}=\frac{a^2\times\sqrt{3}}{4}=\frac{1^2\times\sqrt{3}}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

طريقة(2): مساحة المثلث ABC:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times CB\times AH$$

ومنه : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $S_{ABC}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

طريقة(3): المثلث ABH قائم

مساحة المثلث ABH هي نصف جداء الضلعين القائمين

$$S_{ABH}=\frac{1}{2}\times AH\times HB$$

ومنه $S_{ABH}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$ ومنه $S_{ABH}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

مساحة المثلث ABC = مجموع مساحتي ABH و ACH

ومنه

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

طريقة(4): مساحة المثلث ABC:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times CB\times AH$ لكن

$$AH=AB\times\sin A\widehat{B}H$$

بحسب الطريقة (3) من الطلب الاول نجد

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times CB\times AB\times\sin A\widehat{B}H$$

ومنه $S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $S_{ABC}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

2. حساب قياس الزاوية $O\widehat{B}H$

لدينا AH ارتفاع في مثلث متساوي الاضلاع ABC

فهو منصف ومنه $O\widehat{B}H=30^\circ$

حساب طول OH

طريقة(1):النقطة O مركز ثقل المثلث ABC

فإن $OH=\frac{1}{3}AH$ ومنه $OH=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

فيكون $OH=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

طريقة(2): في المثلث القائم OHB نجد

$$\tan O\widehat{B}H=\frac{OH}{HB}$$

ومنه $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{OH}{\frac{1}{2}}$

ومنه $OH=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

ورقة عمل (3)

تمرين (1): ABC مثلث قائم في B فيه $\sin\hat{A}=\frac{2}{3}$،

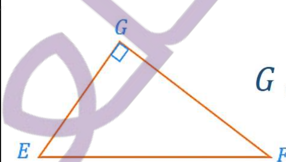
والمطلوب: احسب $\tan\hat{A}\ ,\ \cos\hat{A}$

تمرين (2): GEF مثلث قائم في G

فيه قياس الزاوية $E=60$

وليكن $EF=10$

احسب طول كل من $FG,\ EG$



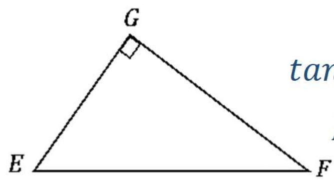
تمرين (3):

$\overset{\Delta}{FGE}$ مثلث قائم في G

$EG=2\sqrt{5}$ و $\tan\hat{F}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

1) احسب طول GF ثم EF

2) احسب $\cos E\ ,\ \sin E$



تمرين (4):

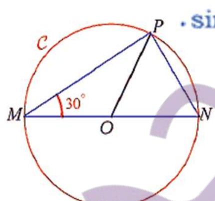
في الشكل المرافق الدائرة C التي طول قطرها $[MN]$ يساوي 12.

و P نقطة منها تحقق $\widehat{PMN}=30^\circ$.

① ما نوع المثلث MPN ؟ استنتج قياس الزاوية $\widehat{PNM}$

② ما نوع المثلث OPN؟

③ احسب الطول PN. ثم استنتج $\sin 30^\circ$.



أولاً: مبرهنة النسب الثلاث المتساوية:

نص المبرهنة النسب الثلاث المتساوية

❶ (d_1) و (d_2) مستقيمان متقاطعان في **A**.

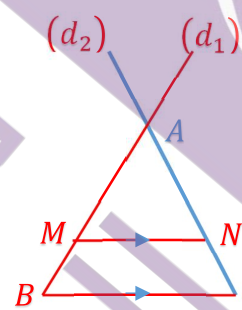
❷ **M , B** نقطتان من d_1 مختلفتان عن **A**.

❸ **C , N** نقطتان من d_2 مختلفتان عن **A**.

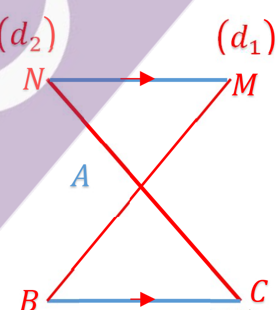
❹ إذا تحقق : **BC//MN**

❺ يمكننا كتابة النسب:

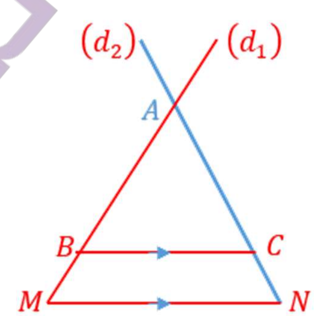
$$\left.\begin{matrix} AMN \\ ABC \end{matrix}\right\} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



الشكل (2)



الشكل (1)



الشكل (3)

تُفيد مبرهنة النسب الثلاث
في حساب أطوال الأضلاع في مثلث
أو أجزاء منها

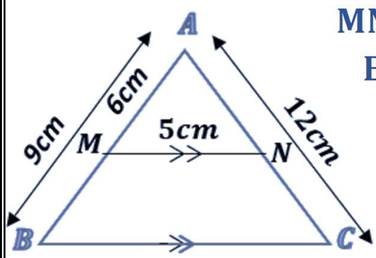
فكرة : توازي ⟸ تناسب

مثال : تأمل الشكل المجاور $(MN) \backslash\backslash (BC)$

AC = و AM = 6 cm و AB = 9 cm

MN = 5 cm و 12 cm

احسب طول : **AN** و **BC**



الحل:

$(MN) \parallel (BC)$

توازي ⟸ تناسب

حسب مبرهنة النسب الثلاث المتساوية

$$\left.\begin{matrix} AMN \\ ABC \end{matrix}\right\} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

نعوض

$$\underset{①}{\frac{6}{9}} = \underset{②}{\frac{AN}{12}} = \underset{③}{\frac{5}{BC}}$$

من النسبتين 1 و 2 نجد:

$$AN = \frac{12 \times 6}{9} = 8 \text{ cm}$$

من النسبتين 1 و 3 نجد:

$$BC = \frac{5 \times 9}{6} = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ cm}$$

مثال:

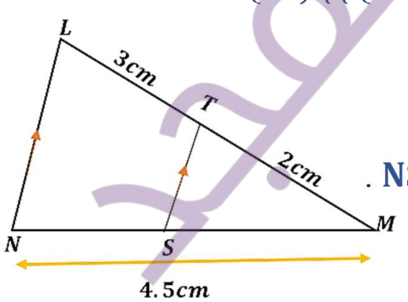
الشكل المجاور فيه $(ST) \backslash\backslash (LN)$

TM = 2 cm

NL = 3 cm

MN = 4.5 cm

احسب طول **SM** و **NS** .



الحل:

$(Ts) \backslash\backslash (LN)$

توازي = تناسب: حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\left.\begin{matrix} MTS \\ MLN \end{matrix}\right\} \frac{MT}{ML} = \frac{MS}{MN} = \frac{TS}{LN}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{MS}{4.5}$$

$$MS = \frac{2 \times 4.5}{5} = \frac{9 \times 2}{5 \times 2} = \frac{18}{10} = 1.8 \text{ cm}$$

$NS = MN - MS = 4.5 - 1.8 = 2.7\ cm$

مثال1:

في الشكل المجاور دائرة قطرها AN تمر من M

$AM = 0.6\ cm$ وليكن المثلث ABC فيه

$AC = 0.5$ و$AB = 0.3$ و$AB = 0.3$

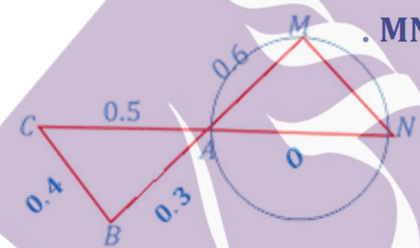
والمطلوب:

❶ أثبت أن المثلثين ABC وAMN قائمين

❷ برهن أن $(MN) \backslash\backslash (CB)$

❸ احسب طول AN .

❹ احسب طول MN .



الحل:

$$\left.\begin{matrix} MN \perp MB \\ BC \perp MB \end{matrix}\right\} \Longrightarrow MN \backslash\backslash BC$$

لأن العمودان على مستقيم واحد متوازيان .

2) توازي ⟸ تناسب **$MN \backslash\backslash BC$**

حسب مبرهنة النسب الثلاث المتساوية

$$\left.\begin{matrix} ABC \\ AMN \end{matrix}\right\} \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

$$\frac{0.3}{0.6} = \frac{0.5}{AN}$$

$$AN = \frac{0.6 \times 0.5}{0.3} = 1\ cm$$

3) حساب **MN** نطبق فيثاغورث على المثلث القائم **AMN**

$$(AN)^2 = (AM)^2 + (MN)^2$$

$$(MN)^2 = (AN)^2 - (AM)^2$$

$$(MN)^2 = 1 - 0.36 = 0.64$$

$MN = \sqrt{0.64} = 0.8$ بالجذر

مثال2 : في الشكل المجاور ABC مثلث قائم في $\hat{B}$

$PQ \perp BA$ و $AP = 8\ cm$ و$AC = 20\ cm$

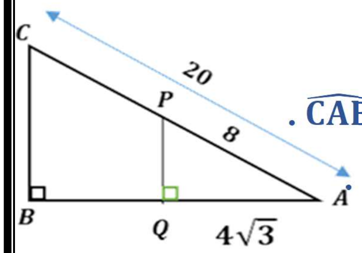
$QA = 4\sqrt{3}\ cm$ والمطلوب :

❶ برهن أن $CB \backslash\backslash PQ$.

❷ احسب طول AB .

❸ استنتج قياس الزاوية $\widehat{CAB}$.

❹ احسب طول PQ وCB



الحل:

❶ فرضاً **$PQ \perp BA$** و **$CB \perp BA$**

ومنه : **$CB \backslash\backslash PQ$** العمودان على مستقيم واحد متوازيان

❷ توازي ⟸ تناسب $CB \backslash\backslash PQ$ حسب النسب الثلاث

$$\left.\begin{matrix} APQ \\ ACB \end{matrix}\right\} \frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{PQ}{CB}$$

$$\frac{8}{60} = \frac{4\sqrt{3}}{AB}$$

$$AB = \frac{4\sqrt{3} \times 20}{8} = 10\sqrt{3}$$

❸

$$\cos C\hat{A}B = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه: $C\hat{A}B = 30°$

❹ **PQ** ضلع مقابلة للزاوية **$30°$** في المثلث القائم **APQ**

ومنه $PQ = \frac{1}{2}\ PA$

$$PQ = \frac{1}{2} \times 8 = 4\ cm$$

طول الضلع المقابل للزاوية **30^0** في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر.

CB ضلع مقابلة للزاوية **30^0** في المثلث القائم **ABC**

ومنه : $BC = \frac{1}{2} AC$

$$BC = \frac{1}{2} \times 20 = 10\ cm$$

طول الضلع المقابل للزاوية **30^0** تساوي نصف طول الوتر .

مثال3 : : ABC مثلث قائم في $\hat{A}$ طولا ضلعيه هما

$AC = 3\ cm$ و$AB = 4\ cm$

❶ احسب طول الوتر CB .

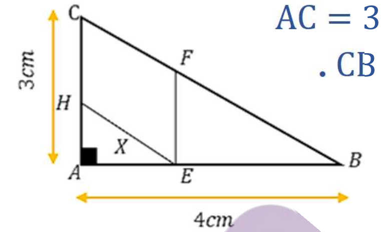
❷ E نقطة من AB

و AC\\EF

و EH \\CB

نرمز لطول AE بالرمز x . ما طبيعة الرباعي EFGH

احسب بدلالة x أطوال أضلاع هذا الرباعي .



الحل: ❶ من المثلث القائم $A\hat{B}C$ حسب فيثاغورث

$$(CB)^2 = (AC)^2 + (AB)^2$$

$$(CB)^2 = 9 + 16 = 25$$

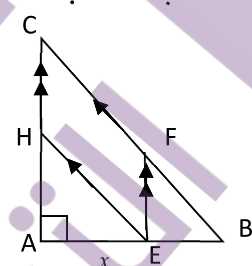
$$\Longrightarrow \quad CB = \sqrt{25} = 5cm$$

❷ EFCH متوازي الأضلاع

لأن فيه ....

بما أن HE//CB فحسب مبرهنة النسب الثلاث:

$$\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$



نعوض $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

ومنه $HE = \frac{5x}{4} = CF$

وكذلك نجد $AH = \frac{3x}{4}$

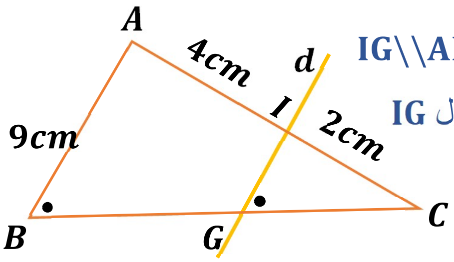
فيكون $CH = 3 - \frac{3x}{4} = EF$

مثال4: في الشكل المجاور $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث فيه (d) يقطع AC في I و يقطع CB في G و $I\hat{G}C = A\hat{B}C$

المطلوب

❶ أثبت أن IG\\AB

❷ احسب طول IG



الحل :

❶ المستقيمان (d) و (AB) قطعهما القاطع (BC)

$A\hat{B}C = I\hat{G}C$ وهما متناظرتان

ومنه المستقيمان IG\\AB

❷ حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\left.\begin{matrix} CTG \\ CAB \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{CI}{CA} = \frac{CG}{CB} = \frac{IG}{AB}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{IG}{9}$$

$$\Longrightarrow \text{IG} = \frac{2 \times 9}{6} = \frac{18}{6} = 3\text{cm}$$

مثال5: في الشكل المجاور

$AO = 5\ cm$

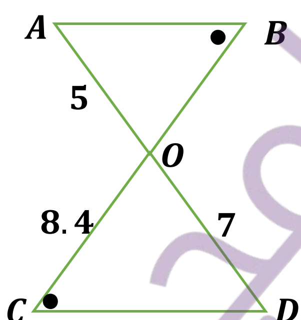
$OD = 7\ cm$

$OC = 8.4\ cm$

والمطلوب: $\widehat{OBA} = \widehat{OCD}$

❶ أثبت أن $AB\backslash\backslash CD$.

❷ احسب طول OB .



الحل :

❶ (CD)و(AB) مستقيمان قطعهما القاطع (BC)

$C\hat{B}A = B\hat{C}D$ وهما في وضع التبادل الداخلي

ومنه: $AB\backslash\backslash CD$

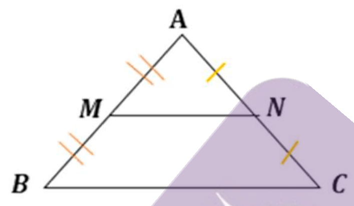
❷ توازي ⟸ تناسب

حسب مبرهنة النسب الثلاث AB \\CD

$$\left.\begin{matrix} OAB \\ ODC \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\frac{5}{7}=\frac{OB}{8.4} \Longrightarrow OB=\frac{5\times 8.4}{7}=6\text{ cm}$$

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالثة وطولها يساوي نصف طولها.



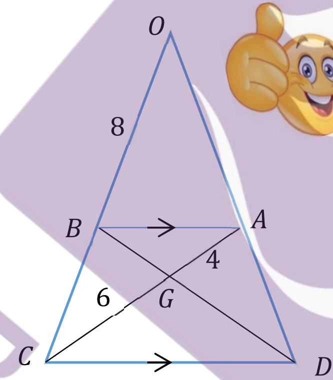
N منتصف الضلع AC

M منتصف الضلع AB

$\Longrightarrow MN \parallel BC$

$MN=\frac{1}{2}BC$

تمرين حلو امتحاني :



ABCD شبه منحرف

قاعدتاه [AB]و[DC]

ضلعاه المائلان

متقاطعان في O

وقطراه متقاطعان في G

نعلم أن $OB=8$ و $GC=6$ و $GA=4$ والمطلوب

❶ اكتب النسب الثلاث للمثلثين $\overset{\Delta}{OAB}\,,\overset{\Delta}{OCD}$

❷ اكتب النسب الثلاث للمثلثين $\overset{\Delta}{GAB}\,,\overset{\Delta}{GCD}$

❸ وازن بين النسبتين $\frac{GA}{GC}=\frac{OB}{OC}$.

❹ احسب طول BC .

الحل: ❶ توازي ⟸ تناسب

CD\\AB وبالتالي حسب النسب الثلاث العلاقة1:

$$\left.\begin{matrix}OAB\\ODC\end{matrix}\right\}\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}=\boxed{\frac{AB}{DC}}\dots(1)$$

❷ **BA\\CD** حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\left.\begin{matrix}BGD\\DGC\end{matrix}\right\}\frac{BG}{DG}=\boxed{\frac{BA}{DC}}=\frac{GA}{GC}\dots(2)$$

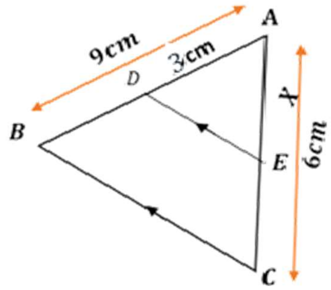
❸ $$\frac{OB}{OC}=\frac{GA}{GC}=\boxed{\frac{BA}{DC}}\Rightarrow\frac{OB}{OC}=\frac{GA}{GC}$$

❹ نعوض $\frac{8}{OC}=\frac{4}{6}\qquad OC=\frac{6\times8}{4}=12\text{ cm}$

$$BC=OC-OB=12-8=4\text{ cm}$$

ورقة عمل (4)

تمرين (1) : تأمل الشكل المجاور و أوجد قيمة x



الحل:

....

....

....

....

....

....

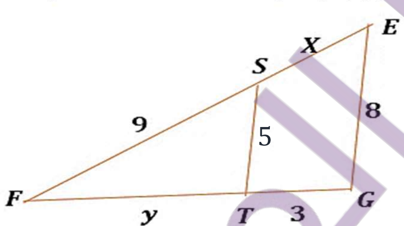
....

....

....

تمرين (2) :

الشكل المجاور (EG)\\(TS) ، أو جد قيمة x و y



الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

عكس مبرهنة النسب الثلاث

نص المبرهنة:

❶ (d_1) و (d_2) مستقيمان متقاطعان في **A** .

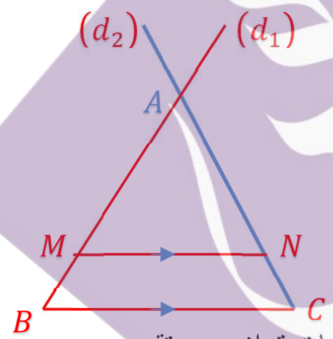
❷ **M** و **B** نقطتان مختلفتان عن **A** من d_1.

❸ **N** و **C** نقطتان مختلفتان عن **A** من d_2.

❹ النقاط **A , M , B** منسجمة في الترتيب مع النقاط **A , N , C**

❺ عندئذ إذا $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$

❻ كان **MN\\BC**



تناسب ⟸ توازي

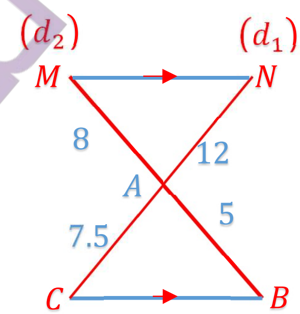
* تفيد هذه المبرهنة في إثبات توازي مستقيمين.

* يكفي نسبتين فقط لإثبات توازي.

* تفيد هذه المبرهنة في إثبات مستقيمين متقاطعين.

تمرين (1) :

تأمل الشكل المجاور ثم أثبت أن CB\\MN



الحل :

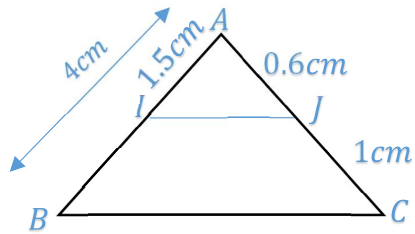
المستقيمان **(CN)** و **(MB)** متقاطعان في **A** والنقاط **N , A , C** منسجمة على الترتيب مع النقاط **M , A , B** كما أن :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{12 \times 10}{7.5 \times 10} = \frac{120 \div 15}{75 \div 15} = \frac{8}{5}$$

المستقيمان **(BC)** و **(MN)** متوازيان حسب مبرهنة عكس النسب الثلاث.

تمرين (2) : هل المستقيمان (IJ) و(BC) متوازيان أم متقاطعان , اشرح رأيك؟



الحل : **(AB)** و**(AC)** متقاطعان في **A**

والنقاط **A , I , B** منسجمة على الترتيب مع النقاط **A , J , C** كما أن :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{1.5 \times 10}{4 \times 10} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{0.6}{1.6} = \frac{6 \div 2}{16 \div 2} = \frac{3}{8}$$

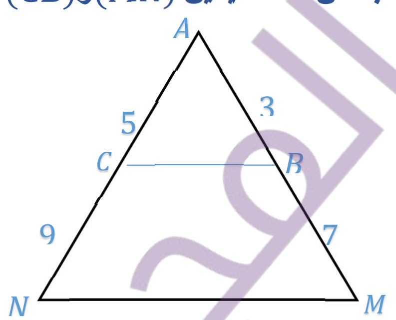
ومنه

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{3}{8}$$

فإن : **BC\\IJ** حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث .

تمرين (3) :

في الشكل المجاور أثبت أن المستقيمين (MN)و(CB) غير متوازيين.



الحل:

(AM) و **(AN)** متقاطعان في **A**

والنقاط **A , B , M** منسجمة على الترتيب مع النقاط **A , C , N**

$$\frac{AB}{AM} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AC}{AN} = \frac{5}{14}$$

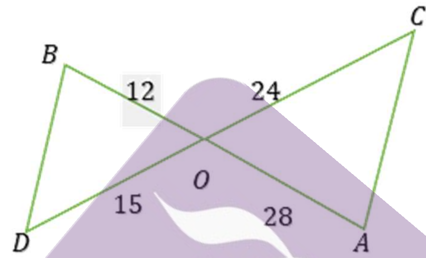
ومنه

$$\frac{AB}{AM} \neq \frac{AC}{AN}$$

والمستقيمان (CB) , (MN) غير متوازيان حسب مبرهنة عكس النسب الثلاث.

تمرين (4):

بفرض (AB) و(CD) متقاطعان في O .
هل المستقيمان (AC) و(BD) متوازيان أم متقاطعان؟ اشرح رأيك .



الحل : النقاط D , O , C منسجمة على الترتيب مع النقاط B , O , A

$$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OA}}=\frac{12\div 4}{28\div 4}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OC}}=\frac{15\div 3}{24\div 3}=\frac{5}{8}$$

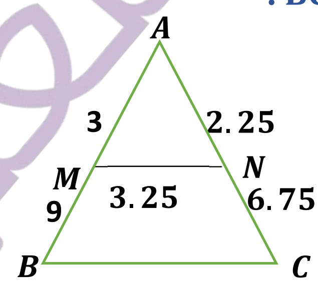
$$\Longrightarrow \frac{BO}{OA}\neq\frac{DO}{OC}$$

والمستقيمان (AC) و (BD) متقاطعان حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث.

تمرين (5) : في الشكل المجاور لدينا $\mathbf{NC = 6.75}$ و $\mathbf{MB = 9}$ و $\mathbf{AN = 2.25}$ و $\mathbf{AM = 3}$ والمطلوب :

❶ برهن أن MN يوازي BC .

❷ احسب طول BC



الحل :

❶ (AC) و(BA) متقاطعان في A والنقاط C , N , A منسجمة على الترتيب مع النقاط B , M , A كما أن :

$$\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}}=\frac{\mathbf{3}\ \div\mathbf{3}}{\mathbf{12}\div\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$\frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AC}}=\frac{\mathbf{2.25}}{\mathbf{9}}=\frac{\mathbf{225}\div\mathbf{225}}{\mathbf{900}\div\mathbf{225}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

ومنه : $\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AB}}=\frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AC}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

MN// BC حسب عكس مبرهنة النسب الثلاث .

فكرة : يمكنك التأكد من تساوي نسبتين من خلال استخدام خاصية الجداء التقاطعي فمثلاً في المثال السابق :

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{2.25}}{\mathbf{9}}\Longrightarrow \mathbf{1\times 9 = 2.25\times 4}$$

محققة $\mathbf{9 = 9}$

❷ تناسب ⟸ توازي

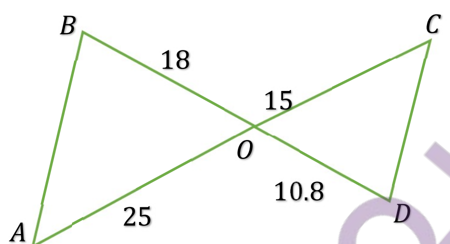
MN\\BC حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\left.\begin{matrix}AMN\\ ABC\end{matrix}\right\}\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Longrightarrow\frac{3.25}{\mathrm{BC}}=\frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow\ \mathrm{BC}=4\times 3.25=13$$

ورقة عمل (5)

تمرين (1): في الشكل المجاور أثبت أن $AB\parallel CD$



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

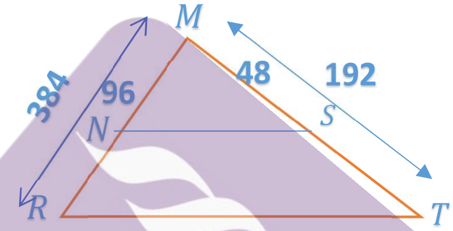
....

تمرين (2): تأمل الشكل المجاور وأجب:

① جد $GCD(48,192)$ واختزل الكسر $\frac{48}{192}$

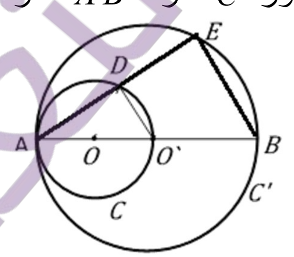
② جد $GCD(384,96)$ واختزل الكسر $\frac{96}{384}$

③ أثبت أن $NS \parallel RT$



تمرين (3): في الشكل المجاور C' دائرة AB قطر فيها C دائرة قطرها $O'A$ ، $DO = 3cm$

والمطلوب: أثبتْ أنّ $O'E \parallel OD$، واحسب EB.



تمرين (4):

في الشكل المجاور $AB = \sqrt{3}$

$$AD = \frac{\sqrt{48} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

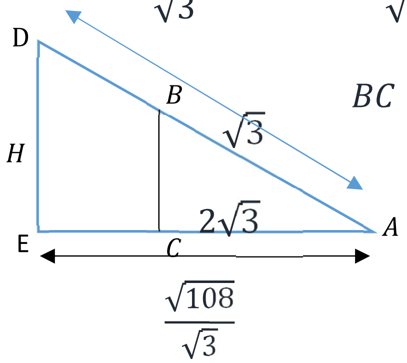
$$AC = 2\sqrt{3}\,, AE = \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$$

① أثبت أن ناتج المقدارين

$$AD = \frac{\sqrt{48} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,, AE = \frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$$

هو عدد صحيح

② أثبت أن $BC \parallel DE$



الدرس الثالث: التشابه

إثبات تشابه مثلثين : الحالة الأولى :

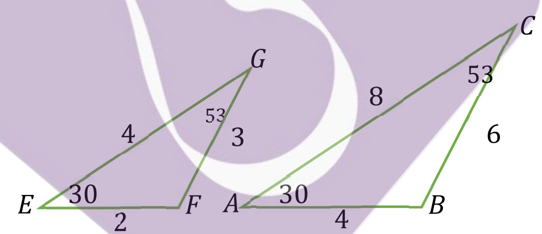
من تعريف التشابه: يتشابه مثلثان إذا تناسبت أطوال أضلاع المثلث الأول مع مقابلاتها من المثلث الثاني

* نقوم بحساب نسبة كل ضلعين متقابلين

$\frac{\text{قصير}}{\text{قصير}} = \square$ ، $\frac{\text{طويل}}{\text{طويل}} = \square$ ، $\frac{\text{وسط}}{\text{وسط}} = \square$ ،

إذا تساوت النسب الثلاث السابقة تكون الأضلاع المتقابلة متناسبة ويكون المثلثين متشابهان حسب تعريف التشابه

مثال : تأمل الشكل المجاور وبين فيما إذا كان المثلثين ABC و EFG متشابهان أم لا ؟ علل إجابتك



الحل : لبرهان تشابه المثلثين $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{EFG}$ نأخذ النسب

$$\frac{\text{طويل } ABC}{\text{طويل } EFG} = \frac{AC}{EC} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{\text{أوسط } ABC}{\text{أوسط } EFG} = \frac{CB}{FG} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{\text{صغير } ABC}{\text{صغير } EFG} = \frac{AB}{EF} = \frac{4}{2} = 2$$

لاحظ أن النسب متساوية

$$\frac{AC}{EC} = \frac{CB}{FG} = \frac{AB}{EF} = 2$$

ومنه المثلثان $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{EFG}$ متشابهان لتناسب أطوال أضلاع المثلث الأول مع مقابلاتها من المثلث الثاني.

* نرمز للعدد 2 ب K ويُدعى ثابت التناسب أو نسميه نسبة التشابه .

* يمكننا القول أن المثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ تكبير للمثلث $\overset{\Delta}{EFG}$ والمثلث $\overset{\Delta}{EFG}$ تصغير للمثلث $\overset{\Delta}{ABC}$.

خواص :

❶ نسمي K نسبة التشابه

❷ $K > 0$ نسبة التشابه دوماً أكبر من الصفر لأنها نسبة أبعاد.

❸ إذا كان $K < 1$ نقول أن النسبة تصغير .

❹ إذا كان $K > 1$ نقول أن النسبة تكبير .

❺ إذا كان $K = 1$ نقول أن النسبة تطابق .

❻ التشابه يحافظ على قياس الزوايا .

❼ نسبة التشابه ليس لها واحدة قياس.

فكرة : إذا طُلب إثبات أن شكل هندسي تصغير لشكل آخر نأخذ النسبة: $K = \frac{\text{الطول الصغير}}{\text{الطول الكبير}}$

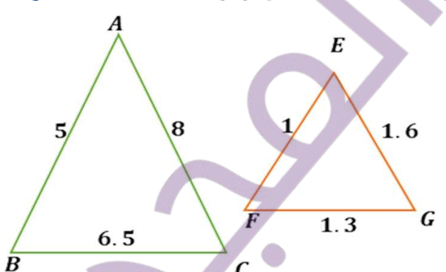
ويكون $K < 1$ وندعوه معامل تصغير .

إذا طُلب إثبات أن شكل هندسي تكبير لشكل آخر نأخذ النسبة: $K = \frac{\text{الطول الكبير}}{\text{الطول الصغير}}$ **ويكون $K > 1$ وندعوه معامل تكبير.**

مثال : ABC و EFG مثلثان فيهما

$AB = 5$ و $AC = 8$ و $BC = 6.5$

$EF = 1$ و $EG = 1.6$ و $FG = 1.3$ المطلوب : برهن أن ABC و EFG متشابهان وأوجد نسبة التصغير



الحل : المطلوب إثبات التشابه و إيجاد نسبة التصغير

$$\frac{EG}{AC} = \frac{1.6 \times 10}{8 \times 10} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{FG}{BC} = \frac{1.3 \times 10}{6.5 \times 10} = \frac{13 \div 13}{65 \div 13} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{1}{5}$$

ومنه $\frac{EG}{AC} = \frac{FG}{BC} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{5}$

$K = \frac{1}{5}$ وهي نسبة تصغير لأن $K < 1$.

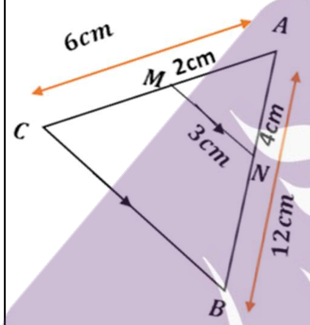
الحالة الثانية:

توازي $\xleftarrow{\text{حسب مبرهنة النسب}}$ تناسب $\xleftarrow{\text{حسب تعريف التشابه}}$ تشابه

يكفي نسبة واحدة لإثبات التشابه.

تمرين1: تأمل الشكل المجاور لدينا MN\\CB

المطلوب:



1- اثبت أن المثلث AMN تصغير للمثلث ABC

2- احسب طول BC

الحل :

❶ كونه يوجد توازي نأخذ حالة :

توازي ⟸ تناسب ⟸تشابه

المثلثان $\overset{\Delta}{AMN}$ و$\overset{\Delta}{ACB}$ فيهما $MN // CB$

حسب مبرهنة النسب الثلاث

ومنه :

$$\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AB}=\frac{MN}{CB}=K=\frac{1}{3}$$

فالمثلثان متشابهان لتناسب أطوال أضلاعهما

$$\frac{AM}{AC}=\frac{2\div 2}{6\div 2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{AN}{AB}=\frac{4\ \div 4}{12\div 4}=\frac{1}{3}$$

وتكون نسبة التصغير $K=\frac{1}{3}<1$

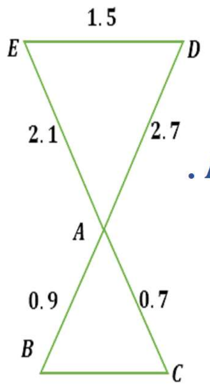
❷

$$\frac{MN}{BC}=K=\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{BC}=\frac{1}{3}\Longrightarrow$$

$$BC=9\text{cm}$$

تمرين2: تأمل الشكل المجاور والمطلوب



❶ برهن أن ED\\BC

❷ احسب طول BC .

❸ أثبت تشابه المثلثين ABC وAED .

الحل :

❶ (BD) و(Ec) متقاطعان في A والنقاط E , A , C

منسجمة على الترتيب مع النقاط D , A, B

$$\frac{AC}{AE}=\frac{0.7\times \mathbf{10}}{2.1\times \mathbf{10}}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{0.9\times \mathbf{10}}{2.7\times \mathbf{10}}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}=\frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow (BC)\parallel(ED)$$

حسب مبرهنة عكس النسب الثلاث.

❷ توازي= تناسب

بما أن $ED//BC$ حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\left.\begin{matrix}A\ B\ C\\ A\ D\ E\end{matrix}\right\}\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}=\frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{BC}{1.5}=\frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow\ BC=\frac{1.5}{3}=0.5$$

❸ توازي = تناسب = تشابه

ED\\BC فحسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}=\frac{1}{3}$$

وبالتالي المثلثان متشابهان لتناسب أطوال أضلاعهما

أفكار هامة في درس التشابه :

❶ عندما يرد في نص المسألة أن مثلث مصغر أو مكبر عن الآخر فالمثلثين متشابهين من الفرض .

❷ نسبة طولي ضلعين متقابلين في أي مضلعين متشابهين تساوي نسبة التشابه

$$\frac{L}{\grave{L}} = K$$

❸ نسبة محيطي أي شكلين هندسيين متشابهين تساوي نسبة التشابه

$$\frac{P}{\grave{P}} = K$$

((أي تُضرب الأطوال والمحيطات بنسبة التشابه وذلك إذا عُلم أحدهما ولم تسمح معطيات المسألة بحساب الآخر))

$$P = K \times \grave{P}$$

❹نسبة مساحتي أي شكلين هندسيين متشابهين تساوي مربع نسبة التشابه

$$\frac{S}{\grave{S}} = K^2$$

((أي تُضرب المساحات ب K^2 عندما تعلم مساحة ولا يمكن لمعطيات المسألة حساب مساحة الآخر))

$$S = K^2 \times \grave{S}$$

5- نسبة حجمي مجسمين متشابهين تساوي مكعب نسبة التشابه

$$\frac{v}{\grave{v}} = K^3$$

((أي تُضرب الحجوم بمكعب نسبة التشابه K^3 عندما يعطى أحد الحجمين ولا يمكن لمعطيات المسألة حساب حجم الآخر))

$$v = K^3 \times \grave{v}$$

7- كافة المضلعات المنتظمة متشابهة

المضلع المنتظم هو المضلع الذي تساوت أطوال أضلاعه وزواياه.

8- نسبة التكبير لشكلين متشابهين هي مقلوب نسبة التصغير و العكس صحيح

مثال (1) :

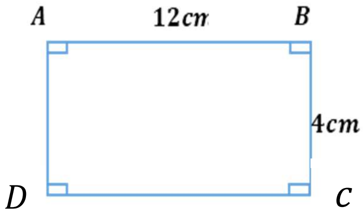
ABCD مستطيل أبعاده كما هو موضح في الشكل

صمم نموذج مصغر عنه بنسبة $\frac{1}{3}$

احسب أبعاد المستطيل المصغر A'B',B'C'

احسب محيط المستطيل المصغر P'

احسب مساحة المستطيل المصغر S'



الحل : لحساب أطوال الاضلاع نضرب بنسبة التشابه

(نلاحظ نسبة $\frac{\text{صغير}}{\text{كبير}}$ نسبة تصغير) أي $\frac{A'B'}{AB} = K$

$$\Rightarrow A'B' = K.AB = \frac{1}{3} \times 12 = 4cm$$

$$\frac{B'C'}{BC} = K \Rightarrow B'C' = K.BC$$

$$\Rightarrow B`C` = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}\,cm$$

2- نحسب محيط المستطيل ABCD

$$P_{ABCD} = 2 \times (\text{الطول} + \text{العرض})$$

$$P_{ABCD} = 2 \times (AB + BC) = 2(12 + 4)$$

$$P_{ABCD} = 2 \times 16 = 32cm$$

$$\frac{P_{A'B'C'D'}}{P_{ABCD}} = K \left(\frac{\text{محيط صغير}}{\text{محيط كبير}} \right)$$

لاحظ نسبة ... لأن النسبة تصغير

$$\frac{P'}{32} = \frac{1}{3} \Rightarrow P' = \frac{32}{3}\,cm$$

3- نحسب مساحة المستطيل ABCD

$$S_{ABCD} = \text{الطول} \times \text{العرض} = AB \times BC$$

$$S_{ABCD} = 12 \times 4 = 48cm^2$$

$$\frac{S`}{S} = k^2$$

$$\frac{S'}{48} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$S' = \frac{1}{9} \times 48 = \frac{48}{9}\,cm^2$$

مثال (2): لدى بائع مرطبات عبوات مثلجات بسعتين مختلفتين تسع العبوة الصغيرة $4L$ أما الكبيرة فهي تكبير للعبوة الصغيرة بنسبة $K=2$ احسب سعة العبوة الكبيرة

" تضرب الحجوم بK^3 "

النسبة تكبير أي $\frac{\text{حجم كبير}}{\text{حجم صغير}}$

$$\frac{v}{\acute{v}} = K^3 \Rightarrow \frac{v}{4} = 2^3$$

$$\Rightarrow \frac{v}{4} = \frac{8}{1} \Rightarrow v = 32cm$$

مثال (3): اقترح مهندس معماري بناء صومعة حبوب بحجم $900m^3$ فصمم نموذج مصغر عنها بنسبة $\frac{1}{20}$ احسب حجم النموذج المصغر.

الحل:

$$\frac{\acute{v}}{v} = K^3 \Rightarrow \frac{\acute{v}}{900} = \left(\frac{1}{20}\right)^3$$

$$\acute{v} = \left(\frac{1}{8000}\right) \times 900$$

$$\Rightarrow v` = \frac{9}{80} m^3$$

أسئلة امتحانية ترد عن التشابه كصح أو خطأ:

في الشكل المرسوم جانباً لدينا $BKGF$ هو تصغير للمربع $ABCD$ بنسبة $\frac{1}{3}$

1- إذا كان $BK = 2$ فإن طول ضلع المربع الكبير هو 6

2- نسبة مساحة المربع الصغير إلى الكبير هي $\frac{1}{3}$

الحل :1- صح / لاحظ المعطى هو نسبة تصغير وبالتالي:

$$\frac{\text{طول صغير}}{\text{طول كبير}} = K \Rightarrow \frac{BK}{AD} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = 6$$

2- خطأ

$$\frac{S'}{S} = K^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

أسئلة امتحانية ترد عن التشابه كأختر الإجابة الصحيحة

1) أسطوانة بحجم $1000m^3$ صمم نموذج مصغر عنها حجمه $8m^3$ فإن نسبة التصغير تساوي:

A	B	C
$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{100}$

لاحظ المطلوب نسبة تصغير لحجم تذكر أن الحجوم تضرب ب K^3

$$\frac{\acute{v}}{v} = K^3 \Rightarrow \frac{8 \div 8}{1000 \div 8} = K^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{125} = K^3$$

نحن نريد K و ليس K^3 نجذر تكعيبياً العدد $\frac{1}{125}$

و عليه $K = \frac{1}{5}$ لأن $5^3 = 125$

2) المثلث EFD تصغير للمثلث ABC فنسبة التصغير K تكون:

A	B	c
$K = 1$	$K < 1$	$K > 1$

$$K < 1$$

أو يمكن أن ترد $0 < K < 1$

3) المثلث ABC تكبير للمثلث EFG فنسبة التكبير هي نفس حل المعادلة.

A	B	c
$2x+3=4$	$2x+3=5$	$2x+3=6$

نحل المعادلات لنحصل على نسبة $K > 1$ لأن النسبة تكبير

$$2x + 3 = 4 \Rightarrow 2x = 4 - 3 \Rightarrow 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

A ليست الإجابة الصحيحة لأن النسبة أصغر من 1

$$2x + 3 = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 3 \Rightarrow 2x = 2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

B) ليست الإجابة الصحيحة لأن هذه نسبة تطابق وليس تكبير

$$2x + 3 = 6 \Rightarrow 2x = 6 - 3 \Rightarrow 2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$k > 1$$

الجواب الصحيح هو C

4) مثلثان متشابهان مساحة الأول $25cm^2$ ومساحة الثاني $100cm^2$ فنسبة التكبير هي:

2	C	75	B	4	A

لاحظ المطلوب نسبة التكبير والمعطى مساحات أي K^2

$$\frac{100}{25} = K^2 \Rightarrow K^2 = 4 \Rightarrow k = 2$$

5) مكعب حجمه $27m^3$ صمم نموذج مكبر عنه حجمه $125m^3$ فإن معامل التكبير:

$\frac{125}{27}$	C	$\frac{5}{3}$	B	$\frac{3}{5}$	A

$$\frac{v}{v'} = K^3 \Rightarrow \frac{125}{27} = K^3 \Rightarrow K = \frac{5}{3}$$

تمارين داعمة للوحدة الثانية هندسة :

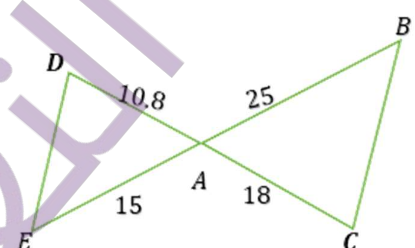
تمرين /1/ في الشكل المجاور

$AD = 10.8, AB = 25, AC = 18$

المطلوب :

1- أثبت أن ED\\CB

2-المثلث ABC تكبير للمثلث AED عين معامل التكبير



الحل :

1- تناسب ⟸ توازي

$(DC), (ED)$ متقاطعتان في A و النقاط C, D, A

منسجمة على الترتيب مع B, A, E

$$\frac{AC}{AD} = \frac{18 \times 10}{10.8 \times 10} = \frac{180 \div 36}{108 \div 36} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{25 \div 5}{15 \div 5} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} = \frac{5}{3}$$

فحسب عكس مبرهنة النسب الثلاث $ED\backslash\backslash CB$

-2 معامل التكبير $K = \frac{5}{3}$

تمرين /2/:

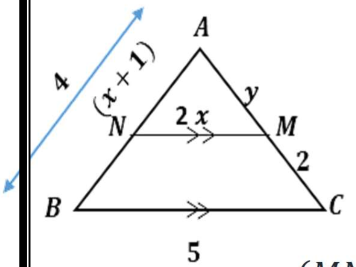
ABC مثلث فيه النقطة N من [AB] و M نقطة من [AC] إذا علمت أن $NM = 2x$, $[MN]\backslash\backslash[BC]$

$, AM = y , AB = 4 , AN = x + 1, BC = 5$

و المطلوب :

1- اكتب النسب الثلاث

2- احسب قيمة كل من x, y



الحل: (1):

توازي ⟸ تناسب $(MN \parallel BC)$

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\left.\begin{matrix} A\ N\ M \\ A\ B\ C \end{matrix}\right\} \frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{NM}{BC}$$

(2

$$\underset{①}{\frac{(x+1)}{4}} = \underset{②}{\frac{y}{(y+2)}} = \underset{③}{\frac{2x}{5}}$$

من ① و ②

$$\frac{(x+1)}{4} = \frac{2x}{5}$$

$$8x = 5(x+1)$$

$$\Rightarrow 8x = 5x + 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

من ② و ③

$$\frac{y}{(y+2)} = \frac{2x}{5} \Rightarrow \frac{y}{(y+2)} = \frac{\frac{10}{3}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{(y+2)} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$$

ومنه:

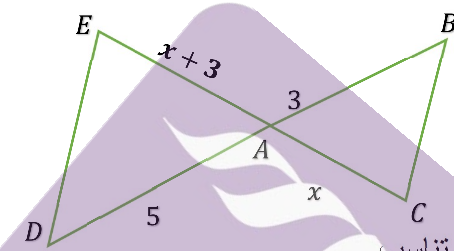
$$\frac{y}{(y+2)} = \frac{10}{15}$$

$$15y = 10(y+2) \Rightarrow 15y = 10y + 20$$

ومنه $y = 4$

تمرين /3/

في الشكل المرسوم جانباً [CB]\\[DE] و $AC = x$
و $AE = x + 3$ و $AB = 3$ و $AD = 5$ المطلوب:
احسب قيمة x
إذا كانت مساحة ADE تساوي 15 احسب مساحة ABC



الحل :

توازي ⟸ تناسب

$$(ED) \parallel (BC)$$

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\left.\begin{matrix} A\ B\ C \\ A\ D\ E \end{matrix}\right\} \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{X}{(X+3)}$$

$$\Longrightarrow 5x = 3(x+3)$$

$$5x = 3x + 9 \Longrightarrow 2x = 9$$

ومنه $\boxed{x = 4.5}$

-2 (لاحظ معطيات المسألة لا تكفي حساب مساحة المثلث ABC لذلك نلجأ إلى التشابه لحساب المساحة)

توازي ⟸ تناسب ⟸ تشابه

ED\\BC

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{5} = K$$

ومنه المثلثان متشابهان لتناسب أطوال أضلاعهما

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = K^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{15} = \frac{9}{25}$$

$$\Longrightarrow S_{ABC} = \frac{15 \times 9}{25} = \frac{27}{5} = 5.4$$ وحدة مربعة

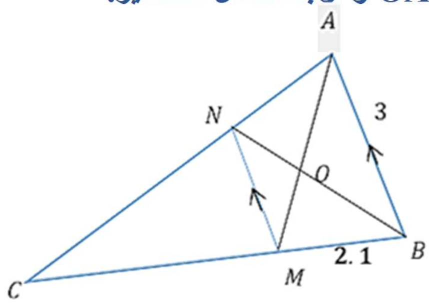
تمرين /4/:

(AN) و (BM) متقاطعان في C , AB//NM
$AB = 3, MB = 2.1, BC = 7$

والمطلوب:

1) احسب MN واستنتج نوع المثلث MNB

2) بفرض O نقطة تقاطع AM و NB أثبت أن $\overset{\Delta}{OMN}$ تصغير للمثلث OAB و أوجد معامل التصغير.



الحل: BI // JC

حسب مبرهنة النسب الثلاث

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CJ}{IB} = \frac{AJ}{AI}$$

وبالتعويض $\frac{AJ}{AI} = \frac{CJ}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

ومنه $CJ = \frac{\dots \times \dots}{\dots} = \dots$

ولدينا $CB = 7 - \dots\dots = \dots\dots$

نستنتج أن $CJ = CB$

فالمثلث CJB هو ....

ومنه نجد: $\hat{\dots\dots} = \hat{\dots\dots}$

حسب مبرهنة النسب الثلاث MN\\AB

$$\left.\begin{matrix} M\ O\ N \\ A\ O\ B \end{matrix}\right\} \frac{MO}{AO} = \frac{MN}{AB} = \frac{ON}{OB}$$

$$\frac{2.1 \times 10}{3 \times 10} = \frac{21 \div 3}{30 \div 3} = \frac{7}{10}$$

ومنه المثلثان متشابهان لتناسب أطوال أضلاعهما

والنسبة $K = \frac{7}{10} < 1$ تصغير

ومنه MON تصغير للمثلث OAB

حل المسألة التالية:

مسألة : في الشكل المجاور ABC مثلث قائم الزاوية في B فيه

$AB = 4, MB = 2\sqrt{3}, BD = 2,$

$CB = \sqrt{48}$

المطلوب:

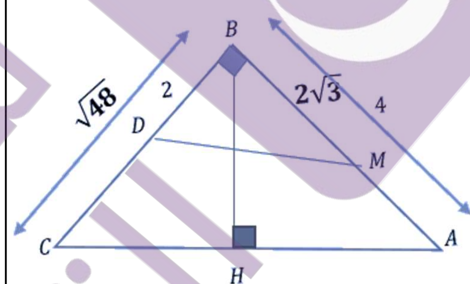
1-أثبت أن DM يقطع AC

2-احسب طول AC, DM

3- أثبت تشابه المثلثين ABC,DBM

4- احسب مساحة المثلث ABC

5- أثبت أن مساحة الرباعي AMDC تساوي $6\sqrt{3}cm^2$



الحل: (AB)(CB) متقاطعان في B

و النقاط A,M,N منسجمة على الترتيب مع C,D,B

$$\frac{BM}{BA} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{2}{\sqrt{48}} = \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{BM}{BA} \neq \frac{AD}{BC}$$

و المستقيمان (AC),(DM) متقاطعان

2-من المثلث ABC القائم في B حسب فيثاغورث

$$(\mathbf{AC})^2 = (\mathbf{AB})^2 + (\mathbf{CB})^2$$

$$(\mathbf{AC})^2 = \mathbf{16 + 48 = 64}$$

$$AC = \sqrt{\mathbf{64}} = \mathbf{8}$$

من المثلث القائم DBM القائم في B حسب فيثاغورث

$$(DM)^2 = (DB)^2 + (BM)^2$$

$$(DM)^2 = 4 + 12 = 16$$

$$AC = \sqrt{16} = 4$$

المثلثين BDM,ACB فيهما

$DB = 2 \quad BM = 2\sqrt{3} \quad DM = 4$

$AB = 4 \quad BC = \sqrt{48} \quad CA = 8$

$$\frac{DB}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BM}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DM}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DB}{AB} = \frac{BM}{BC} = \frac{DM}{AC} = \frac{1}{2}$$

و المثلثان متشابهان لتناسب أطوال أضلاعهما

$$\mathbf{S_{ABC}} = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{\mathbf{2}}$$

$$S_{ABC} = \frac{BA \times BC}{2} = \frac{4 \times 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

$$S_{AMDC} = S_{ABC} - S_{BDM}$$

$$S_{BDM} = \frac{BM \times BD}{2} = \frac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{AMDC} = 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$= 6\sqrt{3}$وحدة مربعة

ورقة عمل (6)

المسألة الأولى:

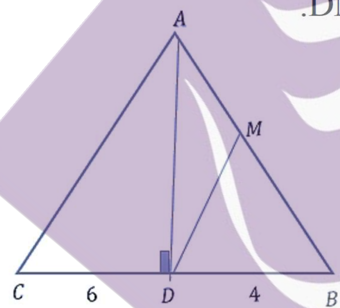
في الشكل المجاور ABC مثلث فيه $AD \perp BC$

$$BM = \frac{2}{5}AB, BD = 4, CD = 6$$

1- أثبت أن MD\\AC

2- أثبت أن DMB تصغير للمثلث ABC واستنتج معامل التصغير

3- نفرض محيط المثلث ABC يساوي 25cm احسب محيط DMB.



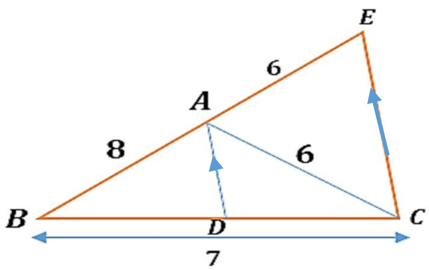
المسألة الثانية:

في الشكل المجاور ABC مثلث أطوال أضلاعه $BC = 7, AC = 6, AB = 8$ و D نقطة من BC نرسم من C مستقيماً يوازي AD و يقطع امتداد AB في النقطة E وكان $AE = 6$ والمطلوب :

1-المثلث BDA تصغير للمثلث BCE اكتب النسب الثلاثة و احسب طول BD ثم استنتج طول DC

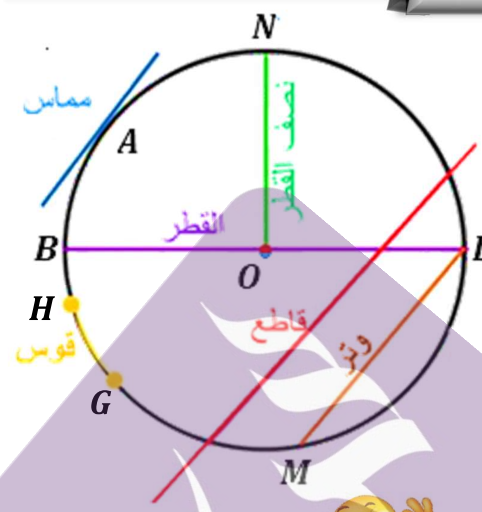
2-احسب كلاً من النسب $\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}$

3-أثبت أن $\widehat{DAC} = \widehat{ACE}$ و $\widehat{DAB} = \widehat{CEA}$ و استنتج AD منصف الزاوية $\widehat{BAC}$



انتهت الوحدة الثانية

الدائرة:



تعاريف هامة:

1- الدائرة: هي مجموعه من نقاط المستوي التي تبعد عن نقطة ثابتة بعداً ثابتاً تسمى هذه النقطة بمركز الدائرة يرمز لها ب C أو l

2- نصف القطر: بعد أي نقطة من المحيط عن مركز الدائرة يسمى نصف القطر R

(OA) هو نصف قطر الدائرة

3- الوتر: هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين من محيط الدائرة C

(MD) وتر في الدائرة C

4- القطر: هو وتر مار من المركز رمزه (d) حيث:

$$d = 2R$$

(BD) هو قطر في الدائرة.

5- القوس: هو جزء من محيط الدائرة محدد بنقطتين نقول GH قوس من الدائرة C

6- قياس قوس الدائرة يساوي $360°$

7- محيط الدائرة $\boxed{p = 2\pi r}$

8- مساحة الدائرة $\boxed{S = \pi r^2}$

9- ترميز الدائرة

$$C\,(O\,.\,R)$$

10-قطر الدائرة يقسمها الى قوسين طبوقين قياس كل منهما $180°$

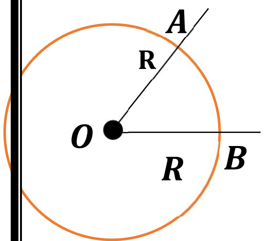
11- انصاف أقطار الدائرة طبوقة لذلك نحصل دوما على مثلثات متساوية الساقين رأس كل منها مركز الدائرة وضلعيها المتساويين نصفي قطري الدائرة

زوايا مركزية و محيطية

الزاوية المركزية:

أفكار:

1- تعريفها: هي زاوية رأسها مركز الدائرة وضلعاها أنصاف اقطار في الدائرة او تقطعا الدائرة.



الزاوية المركزية هي $A\hat{O}B$ تقابل القوس $\widehat{AB}$.

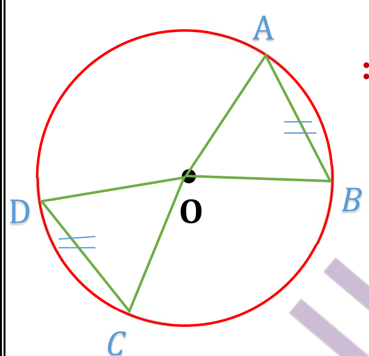
2- قياس الزاوية المركزية:

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المقابل لها

$$A\hat{O}B = \widehat{AB}$$

ويمكن ان نقول ان قياس القوس يساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له.

خواص الزاوية المركزية:



1- الزاويتان المركزيتان المتساويتان تحصران قوسان طبوقان

اذا كان $A\hat{O}B = D\hat{O}C$ فإن:

$$\widehat{AB} = \widehat{DC}$$

2- القوسان الطبوقان يقابلان زاويتان مركزيتان متساويتان

اذا كان $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ فإن:

$$A\hat{O}B = D\hat{O}C$$

3- القوسان الطبوقان في دائرة يقابلان وتران متساويان

اذا كان $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

$$[AB] = [CD]$$

4- الوتران المتساويان في دائرة يحصران قوسان طبوقان

اذا كان $[AB] = [CD]$

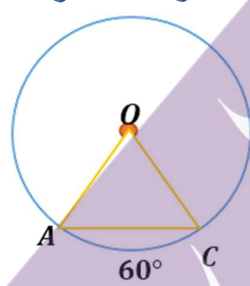
فإن: $\widehat{AB} + \widehat{CD}$

فكرة:

المثلث المتشكل من الزاوية المركزية هو مثلث متساوي الساقين الا اذا كانت احدى قياسات زواياه $60°$ فالمثلث متساوي الأضلاع.

تمرين /1/ :

في الشكل المجاور C دائرة مركزها O ونصف قطرها R حيث $\overset{\frown}{AC}=60^\circ$



1- ما نوع المثلث Aoc علل اجابتك

2- احسب قياس $A\hat{o}c$ المنعكسة.

الحل:

$A\hat{O}C = \widehat{CA} = 60°$: مركزية تحصر القوس $\widehat{CA}$

المثلث $A\hat{O}C$ متساوي الساقين لأن

$OC = OA = R$

وبما أن $A\hat{o}c = 60°$ فالمثلث متساوي الاضلاع

$A\hat{o}c = 360 - A\hat{o}c$ المنعكسة

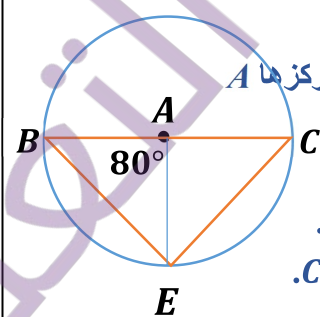
$= 360° - 60°$

$A\hat{o}c = 300°$ المنعكسة

تمرين /2/ :

في الشكل المجاور c دائرة مركزها A

$B\hat{A}E = 80°$



1- ما طبيعة المثلث BEC

2- احسب قياس القوس $\widehat{BE}$.

3- احسب قياس الزاوية $C\hat{A}E$.

4- استنتج قياس القوس $\widehat{EC}$.

الحل: 1- المثلث $\overset{\Delta}{BEC}$ قائم الزاوية في E لأن أحد اضلاعه BC قطر في الدائرة C.

2-لدينا $\widehat{BE} = B\hat{A}E = 80°$

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المقابل لها.

-3

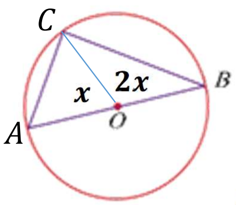
$C\hat{A}E = 180° - B\hat{A}E = 180 - 80 = 100°$

-4

$\widehat{CE} = C\hat{A}E = 100°$

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المقابل لها.

تمرين /3/:



C دائرة مركزها O نصف قطرها

بفرض أن x عدداً موجباً

$,C\hat{O}B = 2x, C\hat{O}A = x$

1- ما نوع المثلث ABC علل إجابتك.

2- احسب قياس القوس $\widehat{AC},\widehat{CB}$ بدلالة x.

3- اوجد قياس الزاوية $C\hat{o}B$. $A\hat{o}C$.

4- ما نوع المثلث AOC ؟ علل اجابتك.

الحل:

ABC مثلث قائم الزاوية لان أحد اضلاعه AB قطر في الدائرة C.

$\widehat{CB} = C\hat{O}B = 2x$

$\widehat{AC} = C\hat{O}A = x$

3- نعلم ان قياس نصف قوس الدائرة $180°$.

$\widehat{AC}+\widehat{CB}=180^\circ$ ومنه $x+2x=180^\circ$

ومنه $3x=180^\circ$ ومنه $x=60^\circ$

إذا: $C\hat{O}A=x=60^\circ$ **مركزية تساوي القوس المقابل لها**

$C\hat{O}B=x=60^\circ$

4- المثلث AOC فيه $OC=OA=R$

وفيه $C\hat{O}A=60^\circ$ فالمثلث متساوي الاضلاع.

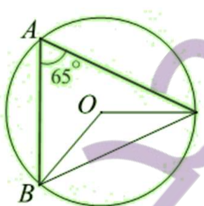
تمرين /4/ :

A و B و C ثلاث نقاط من دائرة مركزها O

نعلم أنَّ $B\hat{A}C=65°$ ، احسب قياس كلٍ من:

❶ $\widehat{BOC}$ ❷ $\widehat{OBC}$ ❸ $\widehat{OCB}$

الحل:



نعلم أن قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس

أي أن $B\hat{A}C=\frac{1}{2}B\hat{O}C$

$B\hat{O}C=2\times B\hat{A}C$

ومنه $B\hat{O}C=2\times 65$

$B\hat{O}C=130^0$

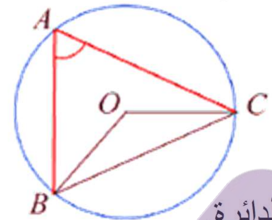
المثلث BOC متساوي الساقين في O

لأن $OB=OC=R$ فيه $B\hat{O}C=130^0$

فإن $O\hat{B}C=O\hat{C}B=\frac{180-130}{2}=25^0$

الزوايا المحيطية:

①**تعريفها:** هي زاوية رأسها في المحيط وضلعاها وتران في الدائرة.



$C\hat{A}B$ زاوية محيطية

ضلعاها AC , AB وتران في الدائرة.

② **قياس الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس القوس المقابل لها.**

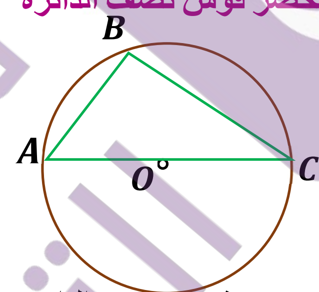
$C\hat{A}B = \frac{1}{2}\widehat{CB}$

③ **قياس الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنصف القوس.**

$C\hat{A}B = \frac{1}{2}\, C\hat{O}B$

$C\hat{O}B = \widehat{CB} = 2C\hat{A}B$

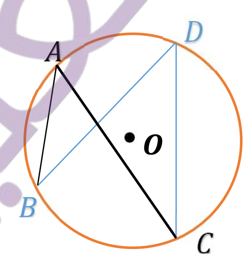
④ **الزاوية المحيطية التي تحصر قوس نصف الدائرة قائمة(هام جداً جداً)**



$A\hat{B}C = 90°$

زاوية محيطية قياسها لأنها تحصر قوس نصف الدائرة $\widehat{AC}$.

⑤ **الزوايا المحيطية التي تحصر القوس نفسه متساوية.**

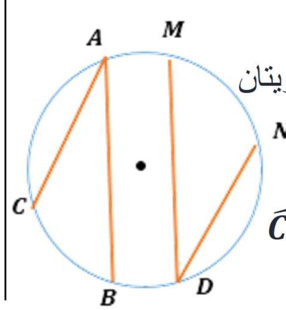


الزاوية $B\hat{D}C$ محيطية تحصر القوس BC

الزاوية $B\hat{A}C$ محيطية تحصر القوس BC

ومنه $B\hat{D}C = B\hat{A}C$

⑥ **الزوايا المحيطية المتساوية تحصر اقواس طبوقة والعكس صحيح.**



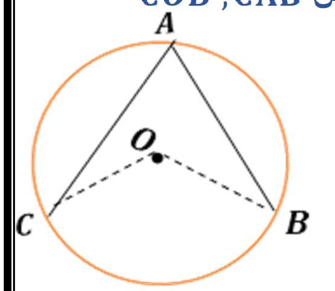
إذا كان $\widehat{CB} = \widehat{MN}$ كانت الزاويتان $M\hat{D}N, C\hat{A}B$ متساويتان

اذا كانت $C\hat{A}B = M\hat{D}N$ كان $\widehat{CB} = \widehat{MN}$

تمرين /1/:

في الشكل المجاور c دائرة مركزها O

و $\widehat{CB} = 100°$ احسب قياس $C\hat{A}B$, $C\hat{O}B$



100

$$C\hat{A}B = \frac{1}{2}C\hat{O}B = \frac{1}{2}\widehat{CB} = \frac{1}{2} \times 100 = 50°$$

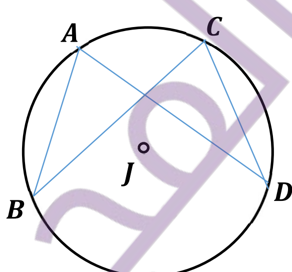
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

$\widehat{COB} = \widehat{CB} = 100°$ مركزية تقابل القوس $\widehat{CB}$

تمرين /2/:

D, C, B, A نقاط دائرة c نعلم أن $A\hat{B}C = 22°$ و $B\hat{A}D = 58°$. والوتران $[AD], [Bc]$ متقاطعان في J.

احسب قياس كل من $C\hat{J}D, C\hat{D}A, B\hat{C}D$



الحل:

$B\hat{C}D = B\hat{A}D = 58°$

محيطيتان تشتركان بنفس القوس $\widehat{BD}$

$C\hat{D}A = A\hat{B}C = 22°$

محيطيتان تشتركان بنفس القوس $\widehat{AC}$

$C\hat{J}D = 180° - (58° + 22°)$

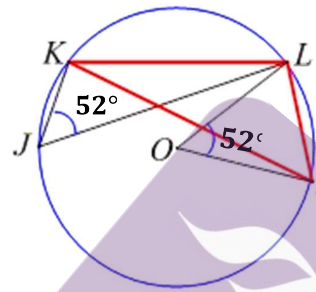
$C\hat{J}D = 180° - 80° = 100°$

لأن مجموع قياسات زوايا المثلث$180°$

تمرين /3/:

M , L , K , J نقاط من دائرة مركزها O

$K\hat{J}L = L\hat{O}M = 52°$ احسب قياسات زوايا المثلث LMK.



$L\hat{K}M = \frac{1}{2} L\hat{O}M = \frac{1}{2} \times 52° = 26°$

محيطية ومركزية تشتركان بنفس القوس $\overset{\frown}{LM}$

$K\hat{M}L = K\hat{J}L = 52°$

محيطيتان تشتركان بالقوس نفسه $\overset{\frown}{KL}$

$K\hat{L}M = 180° - (26° + 52°)$

$K\hat{L}M = 180° - (78°) = 102°$

لان مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$.

تمرين/4/ :

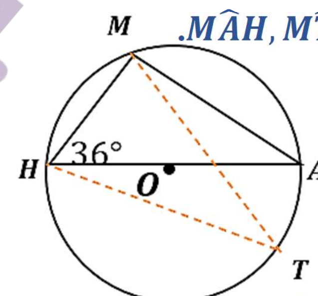
في الشكل المجاور C دائرة مركزها O

$M\hat{H}A = 36°$ و T نقطة من القوس $\overset{\frown}{AH}$

الذي لا يحوي M

1-احسب قياس كل من $M\hat{A}H, M\hat{T}H$.

الحل:



$H\hat{M}A = 90°$

محيطية تحصر قوس نصف الدائرة .

HMA مثلث قائم في M.

$H\hat{A}M = 180° - (90° + 36°) = 54°$

$M\hat{T}H = M\hat{A}H = 54°$

محيطيتان تشتركان بالقوس نفسه $\overset{\frown}{HM}$.

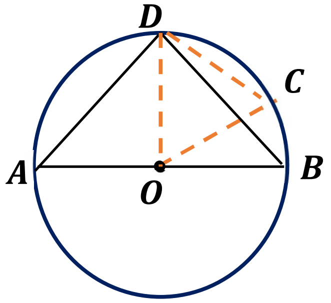
تمرين /5/:

D , C نقطتان من نصف دائرة مركزها O وقطرها AB

يحققان أن $C\hat{O}B = 30°$ و $B\hat{A}D = 45°$

1) ما طبيعة المثلث ADB؟ اشرح اجابتك.

2) ما طبيعة المثلث COD؟ علل اجابتك.



الحل:

المثلث $\overset{\Delta}{ADB}$ قائم الزاوية في D لأن أحد اضلاعه AB قطر في الدائرة وبما أن $B\hat{A}D = 45°$ فالمثلث قائم ومتساوي الساقين

$\overset{\frown}{BD} = 2\, B\hat{A}D = 2 \times 45° = 90°$

$\overset{\frown}{CB} = C\hat{O}B = 30°$

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المقابل لها.

$\overset{\frown}{DC} = 90° - 30° = 60°$

ومنه $D\hat{O}C = 60°$

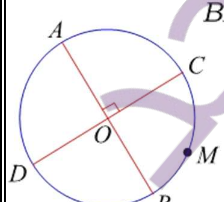
قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المقابل لها.

فالمثلث DOC متساوي الساقين احدى زواياه $60°$ فهو متساوي الأضلاع.

تمرين/6/: $[AB],[CD]$ قطران من دائرة مركزها O

M نقطة من القوس الصغرى $\overset{\frown}{BC}$ المطلوب حساب:

① $\overset{\frown}{AMB}$ ② $\overset{\frown}{AMC}$ ③ $\overset{\frown}{BMC}$



الحل: $A\hat{M}B = 90^0$

محيطية تحصر قوس نصف الدائرة

$A\hat{M}C = \frac{1}{2} A\hat{O}C = 45°$

محيطية ومركزية تشتركان بالقوس $\overset{\frown}{AC}$

$B\hat{M}C = \frac{1}{2} \overset{\frown}{CADB}$

$B\hat{M}C = \frac{1}{2} \times 270^0 = 135^0$

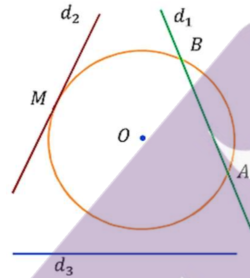
محيطية تحص القوس $\overset{\frown}{CADB}$

الأوضاع المختلفة لمستقيم ودائرة

d_1 قاطع للدائرة يشترك معها بنقطتين

d_2 مماس للدائرة يشترك معها بنقطة

d_3 خارج الدائرة لا يشترك معها بأي نقطة



تعريف المماس

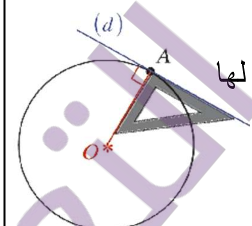
المماس (d) للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة A من الدائرة $\mathscr{C}$ هو المستقيم المرسوم من A والعمودي على المستقيم (OA).

نتائج هامة

1 المستقيم العمود على نصف قطر دائرة في نقطة منها يكون مماسا لها .

إذا كانت $N \in C(o,R)$

فإن المستقيم العمودي على ON في النقطة N يكون مماسا لها



تفيد في إثبات وجود مماس

2 المستقيم المماس عمود على نصف قطر دائرة في نقطة التماس.

إذا كان d مماسا للدائرة $C(O,R)$ في النقطة A

فإن $d \perp (OA)$ في النقطة A

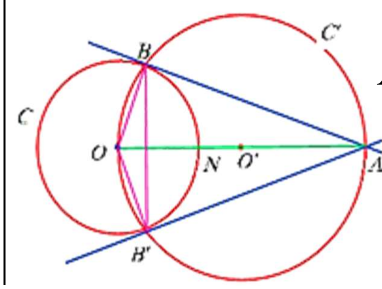
تفيد في إثبات وجود زاوية قائمة(مثلث قائم)

3 جزءا المماسين لدائرة من نقطةA متساويا الطول.

تفيد في إثبات (مثلث متساوي الساقين)

نستنتج ذلك من تطابق المثلثين AOB, AOB'

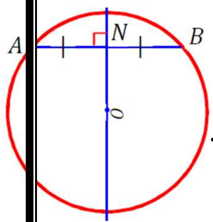
أن : $AB = AB'$



خاصتين هامتين

1) المستقيم المار من مركز الدائرة عمودي على وتر فيها ينصف تلك الوتر.

إذا كان $ON \perp AB$ فإن $NA = NB$



2) المستقيم المار من مركز الدائرة وينصف وتر فيها فإنه عمود عل تلك الوتر.

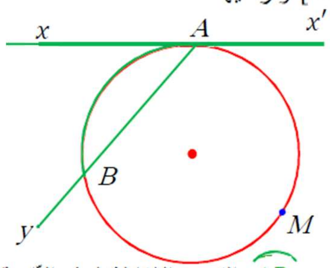
إذا كان AO مستقيم مار من O

و $NA = NB$ فإن $ON \perp AB$

الزاوية المماسية:

هي زاوية رأسها نقطة من الدائرة واحدى ضلعيها وتر والاخر مماس.

(xx') مماسٌ للدائرة في A، $[AB]$ وترٌ فيها.



الزّاوية $x\hat{A}y$ زاوية مماسّية والقوس $\widehat{AB}$ القوس المُقابلة لهذه الزّاوية

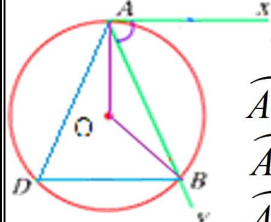
والزّاوية $x'\hat{A}y$ مماسّية و القوس $\widehat{AMB}$ القوس المُقابلة لهذه الزّاوية.

هام جداً: قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره (المقابل لها) أي $\widehat{BAX} = \frac{1}{2}\widehat{BA}$

1 قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في ذات القوس.

2 قياس الزاوية المماسية في دائرة يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في ذات القوس

في الشكل المجاور



$x\hat{A}B$ زاوية مماسيه تحصر $\widehat{AB}$

$A\hat{D}B$ زاوية محيطية تحصر $\widehat{AB}$

$A\hat{O}B$ زاوية مركزية تحصر $\widehat{AB}$

فإن $x\hat{A}B = A\hat{D}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B = \frac{1}{2}\widehat{AB}$

تمرين/1/:

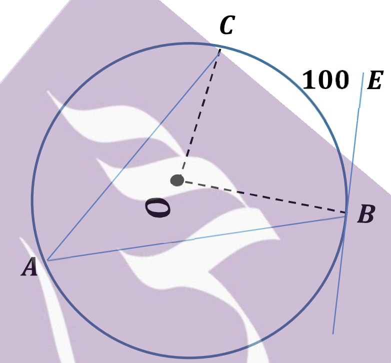
في الشكل المرسوم جانباً

C دائرة مركزها O و BE مماس للدائرة في B

$\widehat{CB} = 100°$ والمطلوب

1) احسب قياس $C\hat{B}E, C\hat{A}B, C\hat{O}B$

2) ما نوع المثلث OCB واحسب قياس $O\hat{B}C$, $O\hat{C}B$



(1

$C\hat{O}B = \widehat{CB} = 100°$

قياس الزاوية المركزية يساوي القوس المقابل لها.

$C\hat{A}B = \frac{1}{2}\widehat{CB}$

$C\hat{A}B = \frac{1}{2} \times 100 = 50°$

قياس الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

$C\hat{B}E = \frac{1}{2}C\hat{O}B = \frac{1}{2}\widehat{CB} = C\hat{A}B = 50°$

قياس الزاوية المماسية تساوي قياس المحيطية المشتركة معها بنفس القوس او نصف قياس المركزية المشتركة معها بنفس القوس او نصف قياس القوس المقابل لها.

OCB مثلث متساوي الساقين

$OC = OB = R$

$C\hat{O}B = 100°$

$$O\hat{C}B = O\hat{B}C = \frac{180° - 100°}{2} = \frac{80}{2} = 40°$$

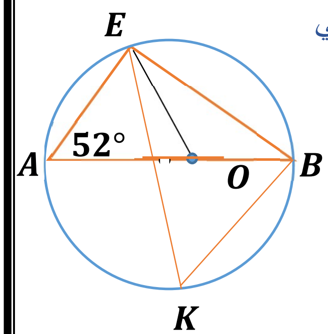
تمرين/2/:

في الشكل المجاور دائرة C مركزها O وقطرها $[AB] = 8$

وضع على الدائرة نقطة E تحقق أن $A\hat{E}B = 52°$

1) اثبت ان AEB قائم الزاوية.

2) وضع على القوس $\widehat{AB}$ التي لا تضم E نقطةKاحسب قياس كل من $B\hat{O}E$, $B\hat{K}E$



الحل:

1) المثلث AEB قائم الزاوية في E لأن أحد اضلاعه AB قطر في الدائرة

$E\hat{O}B = 2E\hat{A}B = 2 \times 52 = 104°$

محيطية ومركزية تشتركان بالقوس نفسه $\widehat{EB}$

$E\hat{K}B = E\hat{A}B = 52°$

محيطيتان تشتركان بالقوس نفسه $\widehat{EB}$

تمرين /3/:

$[BC]$ قطر في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها A. E نقطة من هذه الدائرة تُحقّق $\widehat{BAE} = 120°$. DE,CM مماسان

احسب قياسات الزوايا الآتية: $\widehat{CAE}$ ، $\widehat{ECB}$ ، $\widehat{CBE}$.

احسب قياس الزاوية المماسية $\widehat{CED}$ وقياس $\widehat{BCM}$.

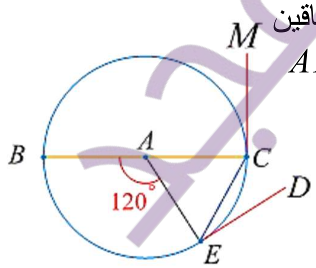
الحل: (1) لدينا $C\hat{A}E = 180 - 120 = 60$

المثلث ACE متساوي الساقين في A لأن $AE = AC = R$

فيه $C\hat{A}E = 60^0$

فهو متساوي الأضلاع

ومنه $E\hat{C}B = 60^0$



$C\hat{B}E = \frac{1}{2} C\hat{A}E = 30^0$

محيطية ومركزية تشتركان بالقوس $\widehat{CE}$ ذاته

(2) $C\hat{E}D = \frac{1}{2} C\hat{A}E = 30^0$

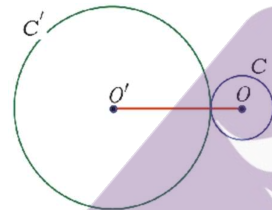
مماسيه ومركزية تشتركان بالقوس $\widehat{CE}$ ذاته

$M\hat{C}B = 90^0$ لأن المماس عمود على نصف القطر في نقطة التماس

الوضع النسبي لدائرتين

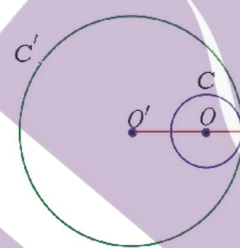
1 متماستين خارجا

هما دائرتان تشتركان بنقطة
وحيدة تسمى نقطة التماس
نلاحظ أن: $OO' = R + R'$
فالبعد بين مركزيهما
يساوي مجموع نصفي قطريهما



2 متماستين داخلا

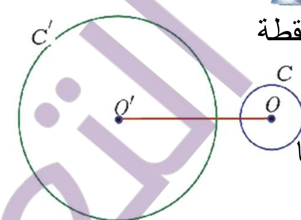
هما دائرتان تشتركان بنقطة
وحيدة تسمى نقطة التماس
نلاحظ أن: $OO' = R - R'$
فالبعد بين مركزيهما
يساوي فرق نصفي قطريهما



3 متباعدتين خارجا

هما دائرتان لا تشتركان بأية بنقطة
نلاحظ أن: $OO' > R + R'$

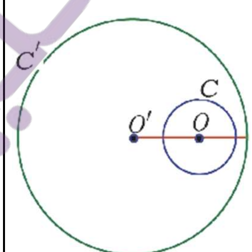
فالبعد بين مركزيهما أكبر تماما
من مجموع نصفي قطريهما



4 متباعدتين داخلا

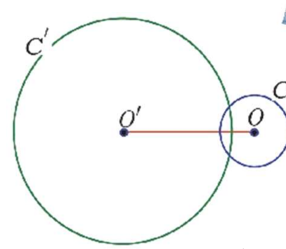
هما دائرتان لا تشتركان بأية بنقطة
نلاحظ أن: $OO' < R - R'$

فالبعد بين مركزيهما أصغر تماما
من فرق نصفي قطريهما



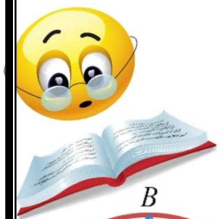
5 متقاطعتين

هما دائرتان تشتركان بنقطتين
نلاحظ أن:
$R + R' > OO' > R - R'$
فالبعد بين مركزيهما أكبر تماما
من فرق نصفي قطريهما
وأصغر من مجموع نصفي قطريهما

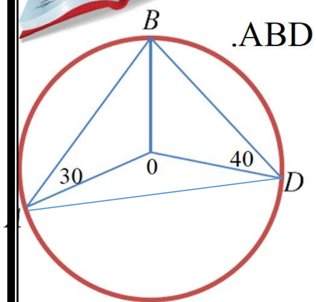


ورقة عمل (7)

تمرين (1):



في الشكل المجاور دائرة مركزها **O**
فيها $O\hat{A}B = 30$ ، $O\hat{D}B = 40$
1) احسب قياس $A\hat{O}D$.
2) احسب قياسات زوايا المثلث ABD.



الحل:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

تمرين (2):

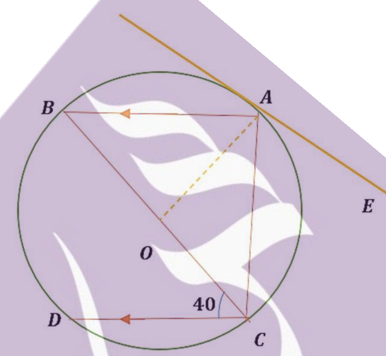
ℓ دائرة مركزها O وقطرها BC

والمستقيم Δ مماس للدائرة في A و E نقطة من Δ

و $CD \parallel BA$ و $\hat{BCD} = 40°$

1) أثبت ان المثلث BAC قائم الزاوية في $\hat{A}$

2) احسب قياس $\hat{EAC}$, $\hat{AOC}$.



الحل:

تمرين (3):

في الشكل المجاور النقاط A , B , C , D تقع على دائرة واحدة

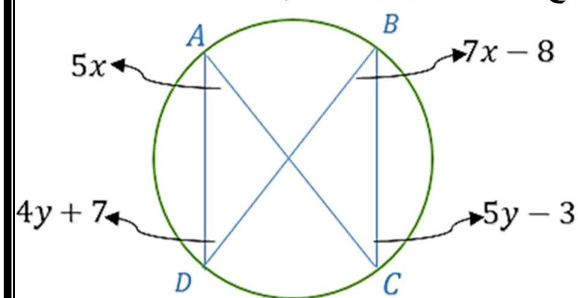
بفرض أن $\hat{A} = 5x$, $\hat{B} = 7x - 8$

$\hat{C} = 5y - 3$, $\hat{D} = 4y + 7$

أن $x, y > 0$ والمطلوب

1) عين قيمة كل من x , y

2) استنتج قياس الزاويتين $\hat{ACB}$, $\hat{DBC}$



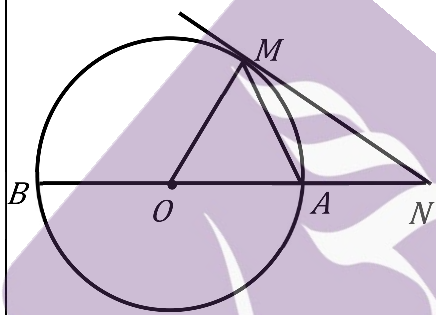
الحل:

تمرين (4):

في الشكل المجاور: MN مماس للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها $OA = 4$

1) أثبت أن $\widehat{AM} = 60^\circ$ ثم احسب قياسات زوايا المثلث OMN

2) أثبت أن A منتصف ON واحسب MN.



الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

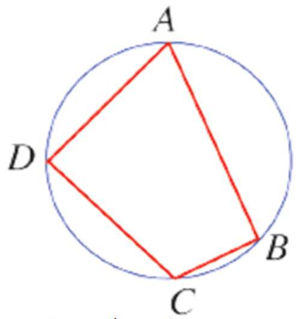
....

....

....

الدرس الثاني: الرباعي الدائري

تعريفه: هو رباعي تقع رؤوسه على دائرة واحدة



النقاط A , B , C, D تقع على دائرة واحدة وبالتالي الرباعي ABCD رباعي دائري.

* مجموع قياسات زوايا الرباعي الدائري 360°

* رؤوس الرباعي تبعد عن نقطة ثابتة بعداً ثابتاً تسمى هذه النقطة مركز الدائرة المارة برؤوس الرباعي.

س: هل تقع رؤوس المستطيل على دائرة واحدة؟ علل اجابتك.

نعم , لأن قطرا المستطيل متساويان ومتناصفان وتبعد رؤوسه عن نقطة المركز بعداً ثابتاً وبالتالي رؤوسه تقع على دائرة واحدة.

س: هل تقع رؤوس متوازي الاضلاع على دائرة واحدة؟ علل إجابتك.

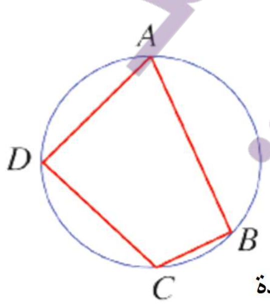
لا, قطرا متوازي الاضلاع متناصفان ولكن غير متساويان وبالتالي رؤوسه تبعد عن المركز بعداً غير ثابتاً وبالتالي لا تقع رؤوسه على دائرة واحدة.

((رؤوسه غير متساوية البعد عن مركزه))

خواص الرباعي الدائري:

في الرباعي الدائري:

1- كل زاويتين متقابلتين متكاملتين (مجموعهما 180°)



$ABCD$ رباعي دائري

لان رؤوسه تقع على دائرة واحدة

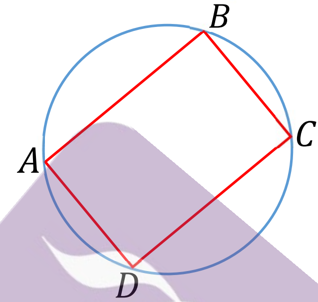
$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$

$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

تمرين:

في الشكل المجاور $ABCD$ رباعي دائري

$A\hat{B}C = 89°$ أوجد قياس $A\hat{D}C$



الحل:

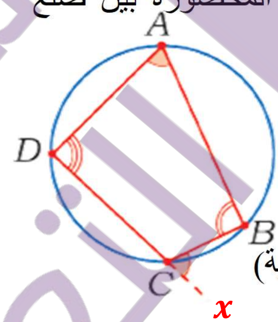
$ABCD$ رباعي دائري ومنه كل زاويتان متقابلتان متكاملتان

ومنه $\quad A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180°$

$A\hat{D}C = 180 - 89 = 91°$

2- قياس الزاوية الخارجية تساوي الزاوية المقابلة لمجاورتها.

الزاوية الخارجية: هي الزاوية المحصورة بين ضلع وامتداد ضلع أخرى.



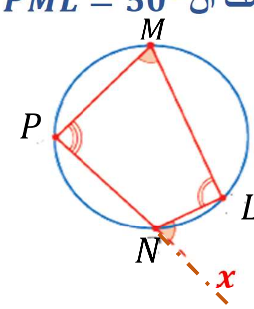
الرباعي $ABCD$ فيه

$B\hat{C}x = D\hat{A}B$ (زاوية خارجية)

تمرين:

في الشكل المجاور P, N, L, M أربعة نقاط تقع على دائرة واحدة والمطلوب:

جد قياس $L\hat{N}X$, $L\hat{N}P$ إذا علمت ان $P\hat{M}L = 50°$



الحل:

الرباعي $MLNP$

رباعي دائري لأن رؤوسه

تقع على دائرة واحدة

$L\hat{N}X = P\hat{M}L = 50°$

لأن قياس الزاوية الخارجية تساوي قياس الزاوية المقابلة لمجاورتها.

$P\hat{N}L + L\hat{N}X = 180°$

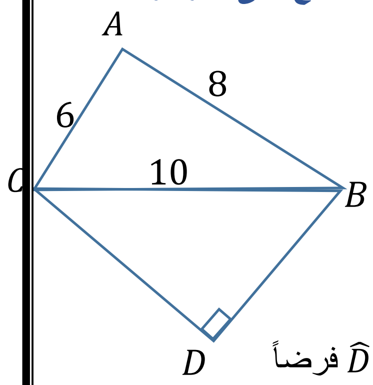
$P\hat{N}L = 180° - 50° = 130°$

كيف نثبت أن رباعي هو رباعي دائري:

1- إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي كان دائري.

تمرين: **في الشكل المجاور $\overset{\Delta}{CDB}$ مثلث قائم الزاوية في $\hat{D}$ و $AB = 8 , AC = 6 , CB = 10$**

أثبت ان النقاط D , C , B , A تقع على دائرة واحدة.



الحل:

$\hat{D} = 90°$ فرضاً

المثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ فيه $\quad (CB)^2 = (10)^2 = 100$

$(AB)^2 + (AC)^2 = 36 + 64 = 100$

ومنه

$(CB)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 100$

حسب عكس فيثاغورث المثلث قائم في A ومنه

$\hat{A} = 90°$

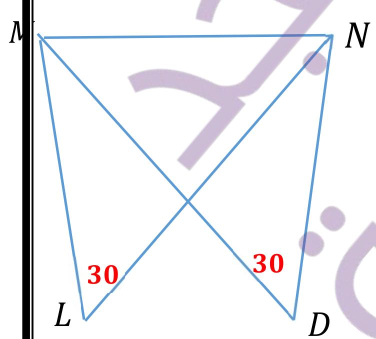
$\hat{A} + \hat{D} = 180°$

$\hat{A} , \hat{D}$ متقابلتان متكاملتان في الرباعي فالرباعي دائري.

2- إذا كانت D , C , B , A أربعة نقاط و كانت $B ,$ A بجهة واحدة بالنسبة للمستقيم DC وكانت $D\hat{B}C = D\hat{A}C$ كان الرباعي $ABCD$ دائري.

تمرين:

تأمل الشكل المجاور وأثبت ان الرباعي $MNDL$ رباعي دائري

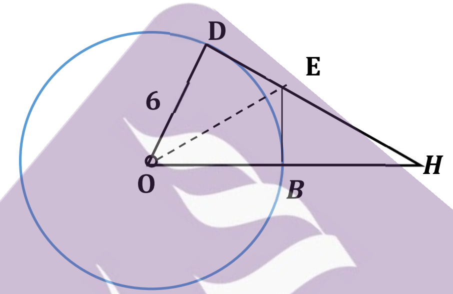


الرباعي $MNDL$ فيه الزاويتان L , D بجهة واحدة بالنسبة للمستقيم MN و $M\hat{D}N = M\hat{L}N = 30°$ فالرباعي رباعي دائري.

تمارين عن الرباعي الدائري:

تمرين الشكل المجاور فيه L دائرة مركزها O ونصف قطرها $OD = 6$

(EB) , (HD) مماسان للدائرة في B, D على الترتيب و $D\hat{O}B = 60°$ والمطلوب:



1- احسب DH.

2- اثبت ان النقاط D, E, B, O تقع على دائرة واحدة عين مركزها واحسب نصف قطرها.

الحل:

1- المثلث ODH قائم الزاوية في D لان نصف القطرعمودي على المماس في نقطة التماس من المثلث ODH.

$$\tan 60 = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{DH}{OD}$$

$$\sqrt{3} = \frac{DH}{6} \Longrightarrow DH = 6\sqrt{3}$$

2- الرباعي OBED فيه $\hat{D} = 90$

$B = 90°$ لان نصف القطر عمودي على المماس في نقطة التماس

$\hat{B}$, $\hat{D}$ متقابلتان في الرباعي

$$\hat{B} + \hat{D} = 180°$$

تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي فالرباعي دائري

مركز الدائرة هو منصف الوتر المشترك OE

من المثلث ODH.نجد $D\hat{H}O = 30$

ومنه $OH = 2\,DO = 12$

من المثلث القائم BEH فيه: $BH = 6$ لأن $OB = 6$

$$\tan 30° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{EB}{BH}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{EB}{6} \Longrightarrow EB = 2\sqrt{3}$$

من المثلث القائم EBD حسب فيثاغورث:

$$(OE)^2 = (OB)^2 + (EB)^2$$

$$(OE)^2 = 36 + 12 = 48$$

$$OE = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$R = \frac{OE}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

ورقة عمل (8)

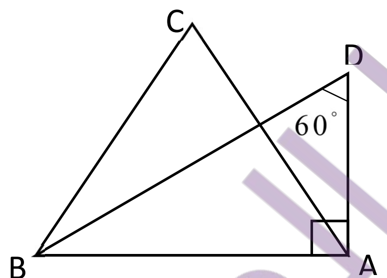
تمرين /1/:

في الشكل المرسوم جانبا: ABD مثلث قائم الزاوية في A وطول الوتر فيه $BD = 8$ وفيه قياس الزاوية $B\widehat{D}A = 60°$ والمثلث ABC متساوي الاضلاع و**المطلوب:**

1) أثبت أن BD منصف للزاوية $C\widehat{B}A$.

2) احسب $\cos\left(D\widehat{B}A\right)$ واستنتج طول BA.

3) أثبت أن النقط A, D, C, B تقع على دائرة واحدة.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

التمرين (2): في الشكل المرسوم جانبا C_1 دائرة مركزها O ونصف قطرها $AO = 3$

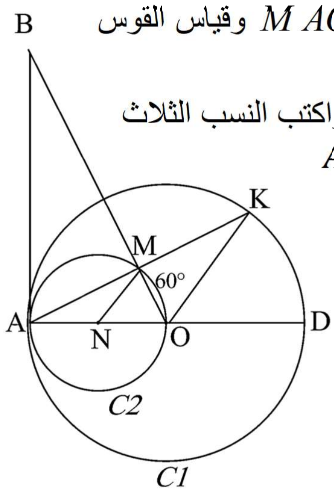
C_2 دائرة مركزها N و قطرا فيها , الدائرتان C_1 و C_2 متماستان داخلا في A

حيث $BA = 3\sqrt{3}$, $BO = 6$ و قياس القوس $\widehat{OM} = 60^\circ$ والمطلوب:

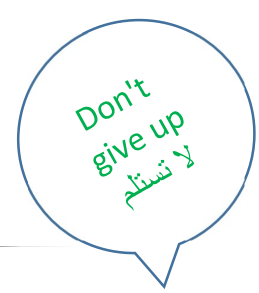
1) اثبت ان المثلث BAO قائم في A , مانوع المثلث AMO

2) احسب قياس الزاوية $M\hat{A}O$ وقياس القوس $\widehat{KD}$

3) اثبت ان $MN \parallel KO$ واكتب النسب الثلاث للمثلثين ANM , AOK



الحل:



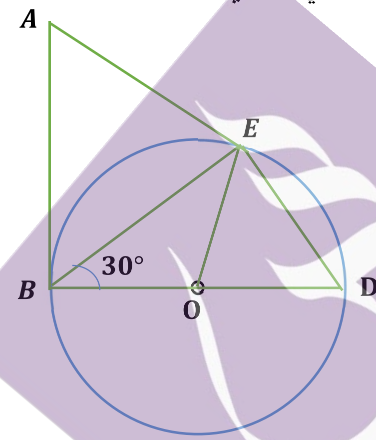
التمرين (3): في الشكل المجاور (AB) و (BE) مماسان للدائرة C في E,B على الترتيب.

BD قطر في الدائرة ومركزها O

$\widehat{EBD} = 30^o$, $BD = 12$ والمطلوب

1- أثبت ان ABE متساوي أضلاع واحسب طول ضلعه.

2- أثبت أن $ABOE$ رباعي دائري وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه.



الحل:

الدرس الثالث
المضلعات المنتظمة

المضلع المنتظم: هو مضلع أطوال أضلاعه متساوية وزواياه متساوية.

خواص

1- كل مضلع منتظم قابل للارتسام في دائرة يسمى مركز الدائرة المارة برؤوسه مركز المضلع المنتظم.

2- إذا كان $[AB]$ ضلعاً في مضلع منتظم مركزه O وعدد أضلاعه n فإن قياس الزاوية المركزية بين راسين متتاليين $A\hat{O}B = \frac{360}{n}$.

قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم

$$180 - A\hat{O}B$$

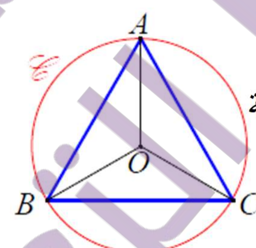
لايجاد عدد أضلاع مضلع منتظم

$$n = \frac{360}{A\hat{O}B}$$

3- عدد محاور مضلع منتظم يساوي عدد أضلاعه

مضلعات منتظمة:

1- المثلث المتساوي الأضلاع:



- هو مثلث أطوال أضلاعه متساوية وزواياه كل منها 60^o
- عدد محاور تناظره 3 محاور
- قياس الزاوية المركزية

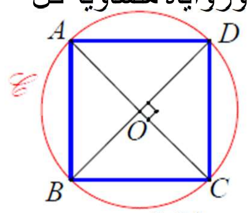
$$A\hat{O}B = \frac{360}{n} = \frac{360}{3} = 120^o$$

- محيطه $P = 3 \times a$

مساحته $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

2- المربع

- هو شكل رباعي أضلاعه متساوية وزواياه متساوية كل منها 90^o



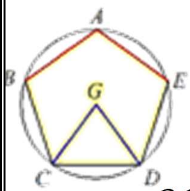
- عدد محاور تناظره 4 محاور
- قياس الزاوية المركزية

$$A\hat{O}B = \frac{360}{n} = \frac{360}{4} = 90^o$$

-محيطه $P = 4 \times a$

- مساحته $S = a^2$

3- المخمس المنتظم: مضلع خماسي



أضلاعه متساوية وزواياه متساوية

- عدد محاور تناظره 5 محاور
- قياس الزاوية المركزية

$$A\hat{O}B = \frac{360}{n} = \frac{360}{5} = 72^o$$

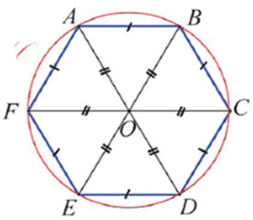
- قياس الزاوية الداخلية

$$180 - 72 = 108^o$$

-محيطه $P = 5 \times a$

- المثلثات المتشكلة بين المركز وأضلاعه هي مثلثات متساوية الساقين طبوقة.

4- المسدس المنتظم:



- هو مضلع سداسي أضلاعه متساوية وزواياه متساوية.

وطول ضلعه يساوي R

- عدد محاور تناظره 6 محاور.
- قياس الزاوية المركزية المتشكلة مع أحد أضلاعه.

$$A\hat{O}B = \frac{360}{n} = \frac{360}{6} = 60^o$$

- قياس الزاوية الداخلية

$$180 - 60 = 120^o$$

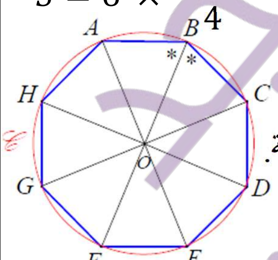
-محيطه $P = 6 \times a$

- المثلثات المتشكلة مع أضلاعه ومركزه هي مثلثات متساوية الأضلاع.
- مساحته

$S = 6 \times$ مساحة المثلث

$$S = 6 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

5- المثمن المنتظم



- هو مضلع ثماني أضلاعه متساوية وزواياه متساوية.
- عدد محاور تناظره 8 محاور.
- قياس الزاوية المركزية

$$A\hat{O}B = \frac{360^o}{n} = \frac{360}{8} = 45^o$$

- قياس الزاوية الداخلية $180 - 45 = 135^0$
- محيطه $P = 4 \times a$
- المثلثات المتشكلة بين أضلاعه ومركزه هي مثلثات متساوية الساقين.

تمرين (1):

في الشكل المجاور ABCD

مربع مرسوم في دائرة مركزها o ونصف قطرها 4

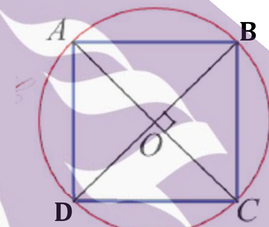
1- احسب طول AB

2- احسب محيط المربع ABCD

3- احسب مساحة المربع ABCD

4- أثبت أن مساحة الجزء المظلل تساوي

$$S' = 16\,(\pi - 2)$$



-1

المثلث $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث قائم في o لأن

$$A\hat{O}B = \frac{360^o}{4} = 90^o$$

وبما أن $OA = OB$ فالمثلث قائم ومتساوي الساقين

$$\sin O\overset{\Delta}{A}B = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{oB}{AB}$$

$$\sin 45^o = \frac{4}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{AB}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{4 \times 2}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

-2

$$P = 4 \times AB = 4 \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

-3

وحدة مربعة

$$S = (AB)^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$$

-4

$$S' = S_{\text{دائرة}} - S_{\text{مربع}}$$

$$S' = \pi r^2 - 32$$

$$S' = 16\pi - 32 = 16\,(\pi - 2)$$

وحدة مربعة.

تمرين (2): الدائرة $C(O,R)$ دائرة مركزها O

و قياس الزاوية $B\widehat{A}D = 50^\circ$ وأن MD و MB مماسان للدائرة متلاقيان في M . المطلوب:

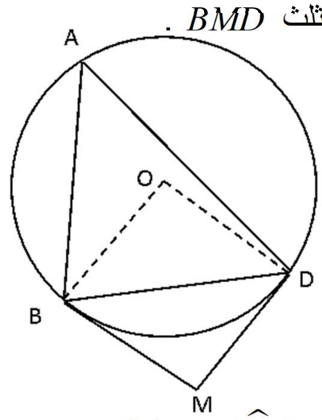
1) احسب قياس الزاوية $B\widehat{O}D$

2) أثبت أن $MDOB$ رباعي دائري

و احسب قياس $B\widehat{M}D$.

3) ليكن $MD = x + 3 , MB = 2x + 1 , BD = 6$

احسب x واستنتج محيط المثلث BMD .



الحل:

(1 $B\widehat{O}D = 2B\widehat{A}D = 100^\circ$ محيطية

ومركزية تحصران القوس $\overset{\frown}{BD}$

(2 MD مماس للدائرة في D فإن

$MD \perp DO$

MB مماس للدائرة في B فإن

$MB \perp DO$

إذا $O\widehat{D}M = 90^\circ$ و $O\widehat{B}M = 90^\circ$

وهما متقابلتان ومتكاملتان فالرباعي $MDOB$ دائري

فإن $B\widehat{M}D$ تكمل $B\widehat{O}D$ ومنه

$$B\widehat{M}D = 180^\circ - 100^\circ = \boxed{80^\circ}$$

(3 لدينا MD و MB مماسان للدائرة مرسومان من نقطة واحدة فهما متساويا الطول

ومنه $x + 3 = 2x + 1$

ومنه $x = 2$

إذاً:
$$MD = 2 + 3 = \boxed{5}$$
$$MB = 2(2) + 1 = \boxed{5}$$

فيكون محيط المثلث BMD هو

$$p_{BMD} = 5 + 5 + 6 = \boxed{16}\ cm$$

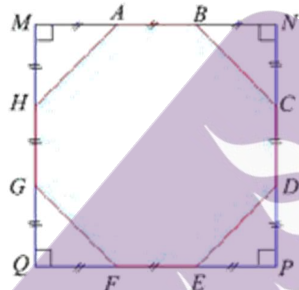
تمرين(3):

MNPQ مربع وABCDEFGH مثمن مشار إليه في الشكل المرافق:

1- هل هذا المثمن منتظم ولماذا؟

2- A هي مساحة المربع MNPQ و A' مساحة المثمن اشرح لماذا؟

$$A' = \frac{7}{9}\,A$$



1- المثلث $\widehat{BMC}$ قائم الزاوية في N

$BN = NC$ فالمثلث قائم ومتساوي الساقين

$BN = AB$

$BN < BC$ لأن طول الوتر أكبر من طول الضلع القائمة

وبالتالي $BC \neq AB$

فالمثمن مثمن غير منتظم لأن أضلاعه غير متساوية

1- نفرض أن $BN = \varkappa$

وبالتالي طول ضلع المربع

$MN = 3\,\varkappa$

$A = (3\varkappa)^2 = 9\varkappa^2$

مساحة المثمن A' = مساحة المربع – 4 × مساحة المثلث القائم في $\widehat{NB}$

$$A' = 9\varkappa^2 - 4\left(\frac{BN \times NC}{2}\right)$$

$$A' = 9\varkappa^2 - 4\left(\frac{\varkappa.\varkappa}{2}\right) = 9\varkappa^2 - 2\varkappa^2 = 7\varkappa^2$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{7\varkappa^2}{9\varkappa^2}$$

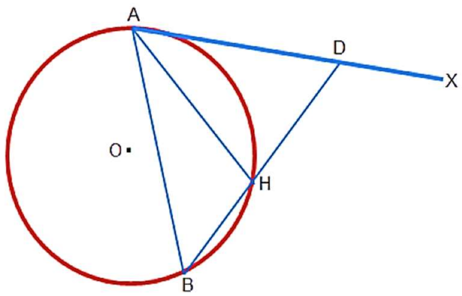
$$\Rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{7}{9} \Rightarrow A' = \frac{7}{9}A$$

وهو المطلوب.

ورقة عمل (9)

تمرين (1):

في الشكل المرسوم جانباً $C(O,R)$ ، دائرة فيها : $(AX]$ مماس الدائرة في A و $AB = AD$ و DB يقطع الدائرة في النقطة H برهن أن المثلث AHD متساوي الساقين



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

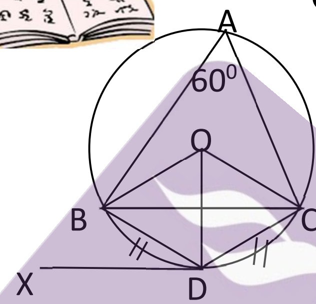
تمرين (2):

في الشكل المجاور دائرة مركزها O

وقياس الزاوية $BAC = 60^0$

D منتصف القوس CB

DX مماس



احسب قياس الزوايا

BDC, BOC

أثبت أن OBDC معين

أثبت أن DX يوازي BC

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

بعض الأسئلة والتمارين الداعمة للوحدة الثالثة هندسة

أسئلة ترد أختر الإجابة الصحيحة:

1- المستقيم d يمس الدائرة c التي مركزها o ونصف قطرها R=6 فإن بعد مركز الدائرة عن المستقيم d:

أكبر من 6	C	أصغر من 6	B	$\boxed{\text{يساوي 6}}$	A

2- في الرباعي الدائري مجموع الزاويتين المتقابلتين يساوي:

90	C	$\boxed{180}$	B	100	A

3- إذا كان AB ضلعاً مرسوماً في مسدس منظم مرسوم في دائرة مركزها O فإن قياس $\widehat{AoB}$ يساوي:

72°	C	90°	B	$\boxed{60°}$	A

4- $[AB]$ ضلع في مخمس منتظم ABCDE مرسوم في دائرة مركزها O فإن قياس $\widehat{AoB}$ يساوي:

70°	C	75°	B	$\boxed{72°}$	A

5- إذا كان $[AB]$ ضلعاً مرسوماً في مضلع منتظم مركزه o وعدد أضلاعه $n = 12$ فإن قياس الزاوية $A\widehat{O}B$ يساوي:

$\boxed{30°}$	C	45°	B	60°	A

6- عدد محاور التناظر لمثلث متساوي الأضلاع هي:

1	C	2	B	$\boxed{3}$	A

7- ABCD رباعي دائري فيه قياس $\widehat{BCD} = 115^o$ فإن قياس الزاوية المقابلة لها $B\widehat{A}D$ يساوي:

115°	C	$\boxed{65°}$	B	25°	A

مسائل داعمة لبحث الدائرة

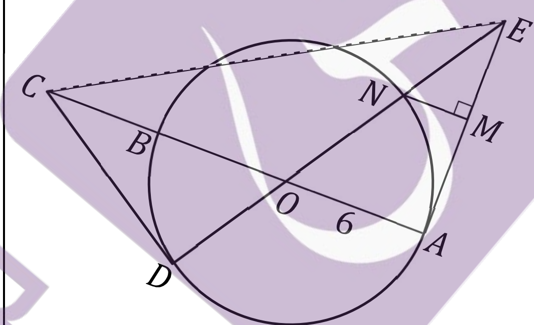
المسألة (1): في الشكل المجاور : دائرة مركزها O ونصف قطرها 6 , AE مماس لها في A و $AE = 8$ و MN يعامد AE **والمطلوب:**

1) احسب طول OE ثم استنتج طول NE.

2) أثبت أن $MN \parallel OA$ ثم اكتب النسب الثلاث في المثلثين MNE ,AOE .

3) احسب $\sin A\hat{E}O$

4) أثبت أن A ,E , C, D تقع على دائرة واحدة وعين مركزها.



الحل:

-1

المثلث $O\hat{A}E$ قائم الزاوية في A لأن نصف القطر عمودي في نقطة التماس. فحسب فيثاغورث

$(OE)^2 = (OA)^2 + (AE)^2$

$(OE)^2 = 100 \implies OE = 10$

-2

$\left.\begin{matrix} OA \perp AE \\ NM \perp AE \end{matrix}\right\} OA \parallel NM$

العمودان على مستقيم واحد متوازيان

توازي = تناسب $\quad OA \parallel NM$

$\left.\begin{matrix} \text{ENM} \\ EOA \end{matrix}\right\} \dfrac{EN}{EO} = \dfrac{EM}{EA} = \dfrac{NM}{OA}$

$\dfrac{4}{10} = \dfrac{NM}{6}$

$\implies NM = \dfrac{6 \times 10}{10} = 2.4$

$\sin A\hat{E}O = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{OA}{OE} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

4-الرباعي $DCEA$ فيه النقطتين A و D تقع بجهة واحدة بالنسبة للمستقيم CE و

$E\hat{A}C = C\hat{D}E = 90^0$ فالرباعي $DCEA$ دائري

مركز الدائرة منتصف الوتر المشترك CE.

المسألة (2): في الشكل المرسوم جانباً:

نصف دائرة مركزها M

و $[AB]$ قطر فيها ونصف قطرها يساوي 3

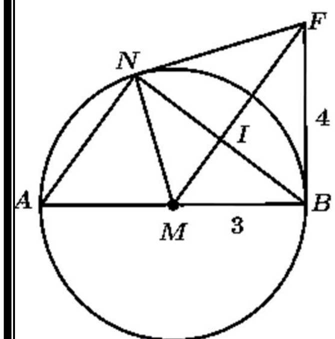
$(FB)(FN)$, مماسان لها و BF=4 والمطلوب

1)أثبت أن المثلثين $(F\widehat{B}M)$ و $(A\widehat{N}B)$ قائمان.

2) أثبت أن $F\widehat{B}N = N\widehat{A}B$

3) أثبت أن الرباعي BFNM رباعي دائري وعين مركز الدائرة المارة برؤوسه وأحسب نصف قطرها.

4) أثبت أن FM منصف الزاوية $N\widehat{F}B$.



1) المثلث $F\hat{B}M$ قائمة الزاوية في B لأن نصف القطر عمودي على المماس في نقطة التماس.

المثلث $A\hat{N}B$ قائم في N لأن ضلعه AB قطر الدائرة المارة برؤوسه

$F\hat{B}N = N\hat{A}B = \widehat{NB}$

محيطية و مماسيه تشتركان بنفس القوس $\widehat{NB}$

$F\hat{B}N = 90^0$ لأن المماس NF عمودي على نصف القطر MN في نقطة التماس فالرباعي BFNM فيه $\hat{B}, \hat{N}$ زاويتان متقابلتان.

$\hat{B} + \hat{N} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

تكاملت زاويتان متقابلتان في رباعي فالرباعي الدائري مركز الدائرة منتصف الوتر المشترك MF

من المثلث القائم $M\hat{B}F$ حسب فيثاغورث

$MF = 5 \Rightarrow \text{R} = \dfrac{5}{2} = 2.5$

-3 المثلثان FMN , FMB فيهما FM وتر مشترك

$FN = FB = R$

فهما طبوقان

ومن التطابق نجد أن $M\hat{F}B = N\hat{F}B$

ومنه نجد أن FM منصف للزاوية $N\hat{F}B$

ورقة عمل (10)

مسألة (1): في الشكل المجاور نصف دائرة مركزها (O) طول قطرها (8) وفيها:

$\widehat{AN} = 2\widehat{NB}$ و $AB = \mathrm{AM} = 8$ و AM يعامد AB

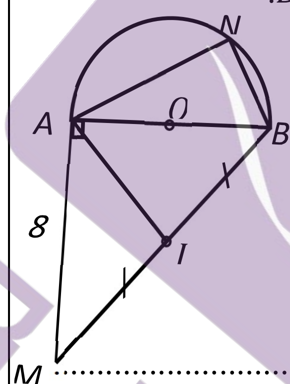
I منتصف $[MB]$ والمطلوب:

1) احسب قياس القوس $\widehat{NB}$ ثم أثبت أن قياس الزاوية $N\hat{A}B = 30^0$.

2) احسب طول كل من NA, NB.

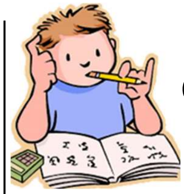
3) أثبت أن الرباعي $BNAI$ رباعي دائري.

4) احسب مساحة الشكل $BNAM$.



ليس المهم أن نتقدم بسرعة لكن المهم أن نتقدم بالاتجاه الصحيح.

مسألة (2):

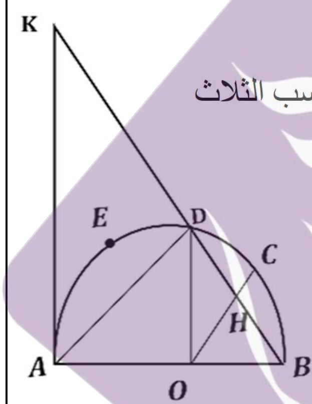


في الشكل المجاور نصف دائرة مركزها O وقطرها AB ، النقاط E , D , C تحقق

$\widehat{AE} = \widehat{ED} = \widehat{DC} = \widehat{CB}$

وليكن AK مماس للدائرة في النقطة A المطلوب:

1- أوجد قياس الزاويتين $D\hat{A}B$, $C\hat{O}B$ واستنتج $OC \parallel AD$



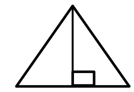
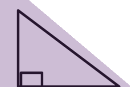
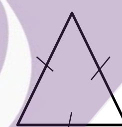
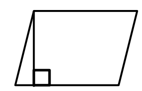
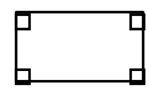
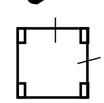
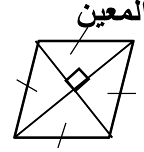
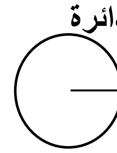
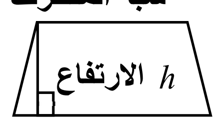
2- إذا كان المثلث OHB تصغير للمثلث ADB اكتب النسب الثلاث واستنتج معامل التصغير

3- أثبت أن $DO \perp AB$ واستنتج أن المثلث DOB تصغير للمثلث KAB

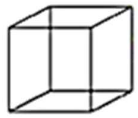
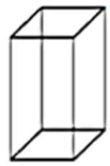
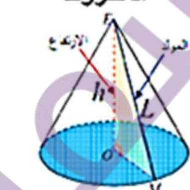
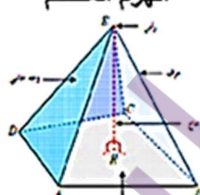
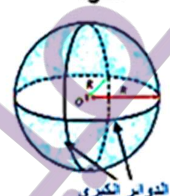
4- أثبت صحة العلاقة $(DB)^2 = BH \times BK$

انتهت الوحدة الثالثة

محيطات ومساحات بعض المضلعات

الشكل الهندسي	المحيط: P المساحة: S
المثلث 	P= مجموع أطوال أضلاعه $S=\frac{B\times h}{2}$ (B القاعدة, h الارتفاع)
المثلث القائم 	P= مجموع أطوال أضلاعه $S=\frac{L_1,L_2}{2}$ (L_1,L_2 الضلعين القائمتين)
المثلث المتساوي الاضلاع 	P= 3× طول الضلع $h=\frac{a\times\sqrt{3}}{2}$ $S=\frac{a^2\times\sqrt{3}}{4}$
متوازي الأضلاع 	P= مجموع أطوال أضلاعه أو (مجموع ضلعين متجاورين×2) $S=B\times h$ (B القاعدة, h الارتفاع)
المستطيل 	$P=(L+W)\times 2$ (L الطول، W العرض) $S=L\times W$
المربع 	$p=4\times a$ (حيث a طول الضلع) $S=(a)^2$
المعين 	$p=4\times a$ (حيث a طول الضلع) $S=\frac{L_1\times L_2}{2}$ (L_1,L_2 الضلعين القائمتين)
الدائرة 	$P=2\pi R$ (حيث R نصف طول القطر) $S=\pi R^2$
شبه المنحرف 	P= مجموع أطوال أضلاعه $S=\frac{(a+b)\times h}{2}$ (a,b طولا القاعدتين)

حجوم ومساحات المجسمات

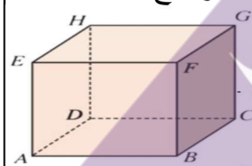
اسم المجسم	خواصه	مساحات وحجوم
المكعب 	له ستة أوجه كلها مربعات طبوقة طول حرفه a مساحة جانبية S_L مساحة كلية S_T الحجم V	$S_L=4a^2$ $S_T=6a^2$ $V=a^3$
متوازي المستطيلات 	وجوهه مستطيلات كل وجهين متقابلين طبوقين أبعاده x,y,z مساحة جانبية S_L مساحة كلية S_T الحجم V	$S_L=P\times h$ $S_T=2xy+2xz+2yz$ $V=x\times y\times z$ P محيط القاعدة h الارتفاع
الاسطوانة الدورانية 	تنتج بدوران مستطيل حول احد اضلاعه دورة كاملة مساحة جانبية S_L الحجم V	$S_L=P\times h$ $S_L=2\pi R\times h$ $V=S\times h$ $V=\pi R^2\times h$ P محيط القاعدة h الارتفاع
المخروط 	ينتج بدوران مثلث قائم حول أحد الضلعين القائمين دورة كاملة قاعدته دائرة مساحة جانبية S_L الحجم V	$S_L=\pi R\times L$ $V=\frac{1}{3}S_B\times h$ $V=\frac{1}{3}\pi R^2\times h$ L العامد(المولد) h الارتفاع
الهرم المنتظم 	قاعدته مضلع منتظم وارتفاعه هو العمود النازل من الرأس على مركز القاعدة ويسمى بحسب عدد اضلاع قاعدته	$V=\frac{1}{3}S\times h$ S مساحة القاعدة h الارتفاع
الكرة 	تنتج بدوران دائرة حول احد اقطارها نصف دورة تعريفها: هي مجموعة نقط الفراغ M التي تبعد عن نقطة O مسافة $OM=R$	$S=4\pi R^2$ $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ S مساحة سطحها V حجمها R نصف قطرها
المجسم الكروي 	تنتج بدوران قرص دائري حول احد اقطاره نصف دورة تعريفها: هي مجموعة نقط الفراغ M التي تبعد عن نقطة O مسافة $OM\le R$ وله ذات قوانين الكرة	

أولاً: متوازي المستطيلات: هو مجسم جميع أوجهه مستطيلات فيه كل وجهين متقابلين متوازيين.

- حجم متوازي المستطيلات =جداء أبعاده الثلاثة

$$\boxed{v = l.w.h}$$

- المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع



$$\boxed{S_l = p \times \text{h}}$$

- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + 2 القاعدة

$$\boxed{S_T = S_l + 2S_b}$$

تمرين (1):

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات أبعاد قاعدته $3cm, 4cm$ وارتفاعه 5 cm اوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية وحجم متوازي المستطيلات.

الحل:

المساحة الجانبية

$S_l = p \times \text{h}$

$P = 2$ (العرض + الطول)

$P = 2\,(3+4)$

$= 2 \times 7$

$= 14cm^2$

$S_l = 14 \times 5 = 70cm^2$ وحدة مربعة

المساحة الكلية

$S_T = S_l + 2S_b$

$S_b =$ العرض × الطول

$= 3 \times 4$

$= 12cm^2$

$S_T = 70 + 2(12)$

$= 70 + 24$

$= 94cm^2$

الحجم

$v =$ الطول × العرض × الارتفاع

$v = 4 \times 3 \times 5$

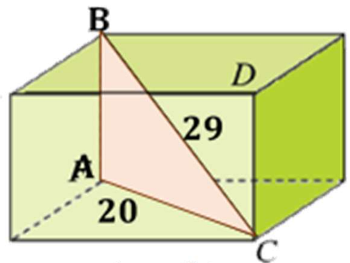
$= 60cm^2$

تمرين (2):

في متوازي المستطيلات المرسوم جانباً ABC قائم في A فيه $BC = 29$ cm و $AC = 20$cm والمطلوب

1- احسب AB

2- احسب المساحة الجانبية والكلية وحجم متوازي المستطيلات إذا علمت أن أبعاده 12، 16 ، 21



1- المثلث $A\hat{B}C$ قائم في A حسب فيثاغورث

$(AB)^2 + (AC)^2 = BC^2$

$(AB)^2 = (BC)^2 - (AC)^2 = 841 - 400$

$(AB)^2 = 441$

بالجذر $AB = 21\ cm$

-2

$S_l = p \times \text{h}$

$S_l = 2(12+16) \times 21$

$S_l = 65 \times 21$

$= 1176\ cm^2$

$S_T = S_l + 2S_b$

$S_b =$ العرض × الطول

$S_b = 16 \times 12$

$= 192$

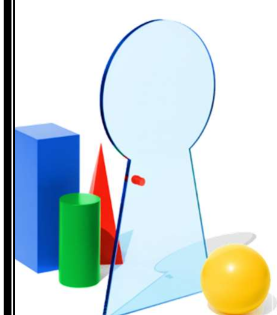
$S_T = 1176 + 384$

$= 1560\ cm^2$

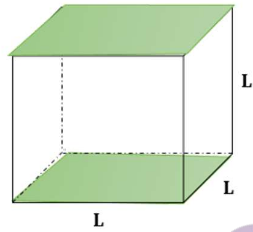
$v =$ الارتفاع × العرض × الطول

$v = 16 \times 12 \times 21$

$= 4032$



ثانياً: المكعب: هو مجسم جميع أوجهه مربعات.



الحجم: $\boxed{v = l^3}$

المساحة الجانبية $\boxed{S_l = 4 \times l^2}$

المساحة الكلية: $\boxed{s_t = 6 \times l^2}$

تمرين(1):

احسب حجم ومساحة سطح مكعب طول حرفه $6cm$

الحل:

$v = (L)^3 = (6)^3 = 6 \times 6 \times 6$

$= 216cm^3$

$S_T = S_l + 2S_b$

$S_l = p \times \mathrm{h} = 4 \times 6 \times 6$

$= 144cm^2$

$S_T = S_l + 2S_b$

$S_T = 144 + 2(6)^2$

$S_T = 144 + 72 = 216$

$S_T = 216\ cm^2$

تمرين (2): مكعب طول حرفه (x) إذا علمت ان القيمة العددية لحجمه تساوي القيمة العددية لمساحتها الكلية أوجد طول ضلع المكعب.

الحل: الحجم

$v = (x)^3 = x^3$

المساحة الكلية

$S_T = S_l + 2S_b$

$S_T = p \times h + 2 \times (x)^2$

$S_T = 4 \times x \times x + 2x^2$

$S_T = 4x^2 + 2x^2 = 6x^2$

$v = S_T$

$x^3 = 6x^2$

$x^3 - 6x^2 = 0$

إما $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

مرفوض

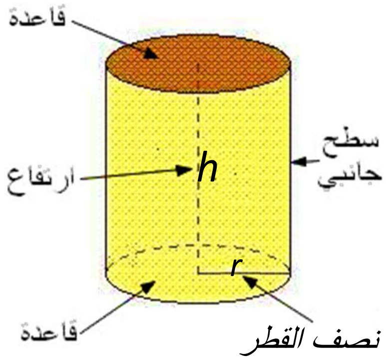
إما $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

طول حرف المكعب 6

ثالثاً: الاسطوانة الدورانية

هي الجسم المتولد عن دوران مستطيل حول أحد بعديه.

الحجم:



المساحة الجانبية $\boxed{S_l = S_b \times h}$

المساحة الكلية: $\boxed{S_T = S_l + 2S_b}$

الحجم $\boxed{v = \pi r^2 \times h}$

تمرين (1):

اسطوانة دورانية $\mathbf{h = 10dm}$

ونصف قطر قاعدتها $R = 3\ dm$

1- احسب محيط قاعدة الاسطوانة.

2- احسب مساحة قاعدة الاسطوانة.

3- احسب حجم الاسطوانة.

الحل:

-1 $P = 2\pi r$

$P = 2\pi \times 3 = 6\pi\ dm$

-2

$S = \pi r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi\ dm^2$

-3

$v = \mathrm{v} = \pi r^2 \times h = 9\pi \times 10$

$v = 90\ \pi\ dm^3$

تمرين (2):

احسب مساحة السطح الجانبي لأسطوانة دورانية محيط قاعدتها $12\ cm$ وارتفاعها $22\ cm$.

الحل:

$S_l = p \times \mathrm{h}$

$S_l = 12 \times 22$

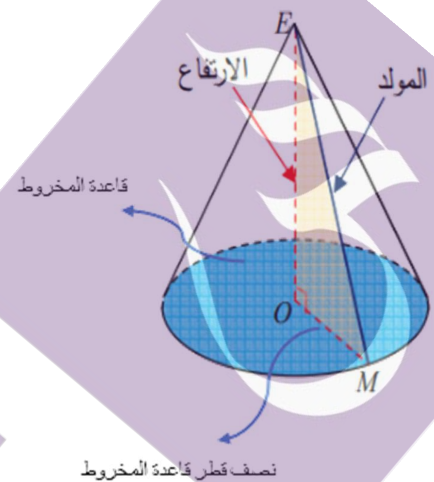
$S_l = 264\ cm^2$

رابعاً: **المخروط الدوراني**

هو الجسم المتولد عن دوران مثلث قائم حول ضلعه القائمة.

حجم المخروط $= \frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$v = \frac{1}{3} S_b \times h$$



تمرين (1)

مخروط دوراني ارتفاعه $h = 4\ cm$ ونصف قطر قاعدته $r = 1.5\ cm$ احسب حجمه.

الحل:

$$v = \frac{1}{3} S_b \times h$$

$$S_b = \pi r^2 = \pi (1.5)^2 = 2.25\pi$$

$$v = \frac{1}{3} \times 2.25 \times 4 \times \pi$$

$$v = 3\pi$$

تمرين (2)

مخروط دوراني ارتفاعه $h = 6\ cm$ وقطر قاعدته $8\ cm$ احسب حجمه.

الحل: $r = \frac{8}{2} = 4$

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

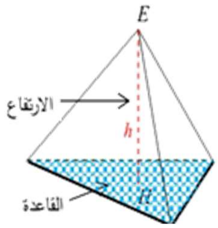
$$v = \frac{1}{3} \times \pi \times 16 \times 6$$

$$v = 32\pi$$

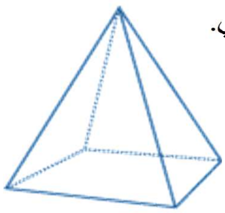
خامساً: الهرم: هو مجسم له قاعدة مضلع ورأسه خارجه

أنواع الهرم:

1- هرم ثلاثي: قاعدته مثلث



2- هرم رباعي: قاعدته مضلع رباعي.



الأوجه الجانبية: هي مثلثات مشتركة بالرأس وقواعدها أضلاع قاعدة الهرم.

السطح الجانبي: مجموع الأوجه الجانبية.

الارتفاع: هو العمود النازل من رأس الهرم على مستوي القاعدة ونرمز له ب h

حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$\boxed{v = \frac{1}{3} S_b \times h}$$

v: حجم الهرم

S_b : مساحة القاعدة

h : الارتفاع

تذكر:

مساحة المثلث $= \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$

مساحة المثلث القائم $= \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2}$

مساحة المثلث متساوي الأضلاع $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة $\times$ الارتفاع

مساحة المعين $= \frac{\text{جداء قطريه}}{2}$

مساحة المستطيل = الطول $\times$ العرض

مساحة المربع = $(\text{طول الضلع})^2$

مساحة شبه المنحرف $= \frac{\text{القاعدة الصغرى+الكبرى}}{2} \times$ الارتفاع

الهرم المنتظم: هو هرم قاعدته مضلع منتظم

ثلاثي ← القاعدة مثلث متساوي الأضلاع

رباعي ← القاعدة مربع

تمرين (1): هرم قاعدته مثلث قائم أطوال أضلاعه 10،8،6 على الترتيب وارتفاعه $h = 5$ احسب حجم الهرم.

الحل:

$$v = \frac{1}{3} S_b \times h$$

$$S_b = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2} = \frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ وحدة مربعة}$$

$$v = \frac{1}{3} \times 24 \times 5 = 40 \text{ وحدة مكعبة}$$

تمرين (2): هرم حجمه $100m^3$ وقاعدته مثلث قائم مساحته $60m^2$ احسب ارتفاع الهرم.

الحل:

$$v = \frac{1}{3} S_b \times h$$

$$h = \frac{3v}{S_b} = \frac{3 \times 100}{60} = 5cm$$

تمرين (3): هرم منتظم ارتفاعه 12 cm و قاعدته مربع طول ضلعه 8 cm احسب حجم هذا الهرم .

الحل:

$$v = \frac{1}{3} S_b \times h$$

$$S_b = (8)^2 = 64$$

$$v = \frac{1}{3} \times 64 \times 12 = 256 \, cm^3$$

تمرين (4):

هرم رباعي منتظم ارتفاعه 6 cm وحجمه $30 \, cm^3$ احسب مساحة قاعدته.

الحل:

$$v = \frac{1}{3} S_b \times h$$

$$S_b = \frac{3v}{h} = \frac{3 \times 30}{6} = 15 \, cm^2$$

ورقة عمل (11)

(1) هرم منتظم قاعدته مربع طول ضلع المربع 6 cm وارتفاع الهرم h =3 cm احسب حجم الهرم.

....

....

....

....

....

(2) هرم ارتفاعه 36 cm وحجمه $156 \, m^3$ احسب مساحة قاعدته.

....

....

....

....

....

(3) احسب المساحة الجانبية لموشور قائم قاعدته مثلث أطوال أضلاعه 8 cm, 10cm, 12cm وارتفاعه 14cm.

....

....

....

....

....

(4) اسطوانة دورانية ارتفاعها 40 cm وطول نصف قطر قاعدتها 7.5 cm اوجد مساحتها الجانبية والكلية وحجمها.

....

....

....

....

....

(5) مخروط دوراني ارتفاعه 12cm وطول قطر قاعدته 20cm احسب مساحة القاعدة وحجمه.

....

....

....

....

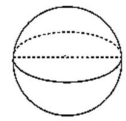
....

الكرة والمجسم الكروي

س: ما الفرق بين السطح الكروي والجسم الكروي.

1- السطح الكروي:

هو مجسم كروي مجوف مثل فقاعة الصابون.



2- الجسم الكروي:

هو مجسم كروي مليء مثل كرة البلياردو.

الأبعاد:

1- السطح الكروي:

هي مجموعة نقاط الفراغ Mالتي تحقق أن:

$OM = R$

((إذا كانت M نقطة من المحيط))

2- الجسم الكروي:

مجموعة من نفاط الفراغ M التي تحقق ان

$OM \leq R$

((اذا كانت M نقطة من المحيط))

قوانين ودساتير هامة:

مساحة سطح كروي بدلالة نصف قطره

$\boxed{S = 4\pi R^2}$

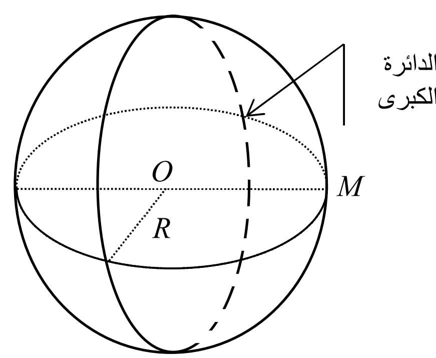
حجم الكرة بدلالة نصف قطرها

$\boxed{v = \frac{4}{3}\pi R^3}$

خطوط مميزة في الكرة:

1- قطر الكرة W: هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة o وطرفاها نقطتان من محيط الكرة.

((أقطار الكرة لها الطول ذاته وهو 2R ويسمى هذا الطول قطر الكرة d=2R))



الدائرة الكبرى: هي دائرة تولّد الكرة وقطرها يساوي قطر الكرة $d = 2R$

تمرين (1)

كرة قطرها 60cm احسب مساحة سطح الكرة وحجمها.

الحل:

$$S = 4\pi R^2$$
$$R = \frac{D}{p} = \frac{60}{2} = 30\ cm$$
$$S = 4\pi \times (30)^2$$
$$= 3600\pi\ cm^2$$
$$v = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$= \frac{4}{3} \times \pi \times 27000$$
$$= 36000\ \pi\ cm^3$$

الأوضاع النسبية لنقطة M وكرة:

- إذا كانت M تبعد عن الكرة مسافة R

اي $OM = R$ فالنقطة m تقع على محيط الكرة.

- إذا كانت M تبعد عن مركز الكرة مسافة أصغر من R

$OM < R$ فالنقطة Mداخل الكرة.

- إذا كانت M تبعد عن مركز الكرة مسافة أكبر من R فالنقطة M خارج الكرة.

أي $OM > R$

تمرين (2):

احسب مساحة سطح كروي نصف قطره 7.5cm

الحل:

$$S = 4\pi R^2$$
$$S = 4\pi(7.5)^2$$
$$S = 225\pi cm^2$$

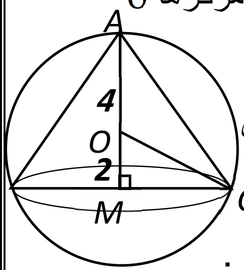
تمرين (3): احسب حجم كرة نصف قطرها 24cm

الحل:

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$v = \frac{4}{3}\pi(24)^3 = 18432\ \pi cm^2$$

بعض التمارين الداعمة للوحدة الرابعة

تمرين (1): في الشكل المجاور كرة مركزها O
ونصف قطرها $OA = 4$
بداخلها مخروط دوراني رأسه A
وقاعدته دائرة مركزها M تبعد عن
مركز الكرة مسافة $OM = 2$



والمطلوب:

1) احسب كلاً من : MC و AC .

2) احسب $\sin O\hat{C}M$ واستنتج قياس الزاوية $O\hat{C}M$

3) احسب حجم المخروط.

الحل: 1) لاحظ أن $OC = R = 4$

حسب فيثاغورث في OMC نجد $MC = 2\sqrt{3}$

حسب فيثاغورث في AMC نجد $AC = 4\sqrt{3}$

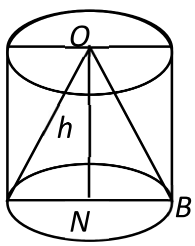
2) $\sin\left(O\hat{C}M\right) = \frac{OM}{OC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ومنه

$O\hat{C}M = 30^{\circ}$

3) $V = \frac{\pi}{3}R^2h$ ومنه $V = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 6$

$V = \frac{\pi}{\cancel{3}}\overset{4}{\cancel{12}} \times 6$ ومنه $V = 24\pi cm^3$

تمرين (2): الشكل: اسطوانة دورانية ارتفاعها ON
ونصف قطر قاعدتها $r = NB = 2\sqrt{3}$
ومخروط دوراني رأسه O
يشترك معها في القاعدة
وحجمه $V = 40\pi$ **المطلوب**



1) أثبت أن ارتفاع الأسطوانة $h = 10$

2) واحسب حجمها V' .

3) احسب حجم الجزء المحصور بين الأسطوانة والمخروط

الحل: 1) حجم المخروط $V = \frac{\pi}{3}r^2h$

نعوض: $40\pi = \frac{\pi}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 h$

$40\pi = \frac{\pi}{\cancel{3}} \times \overset{4}{\cancel{12}} \times h$

ومنه $40\pi = 4\pi h$

ومنه $h = \boxed{10}$

حجم الاسطوانة: $V' = \pi r^2 h$

نعوض: $V' = \pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 \times 10 = \boxed{120\pi}$

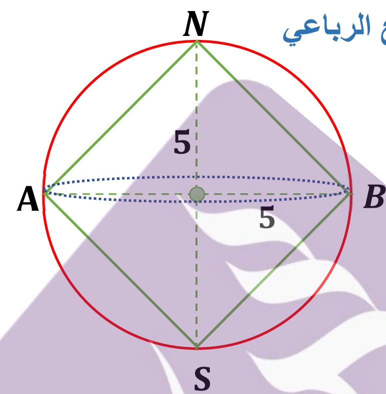
3) $V_1 = 120\pi - 40\pi$ ومنه $V_1 = \boxed{80\pi}$

تمرين (4)

سطح كروي مركزه o ونصف قطره $OB = 5cm$
و (NS) قطران متعامدان فيه.

1- ما طبيعة الرباعي ANBS

2- احسب طول ضلع الرباعي



الحل: (1
ANBS رباعي قطراه متعامدان ومتساويان فهو مربع
2) من المثلث $N\hat{o}B$ القائم ومتساوي الساقين

$$\sin N B\hat{O} = \frac{ON}{NB}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{NB} \Rightarrow NB = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow NB = 5\sqrt{2}$$

تمرين(5): كرة قطرها d

1- اثبت ان حجم الكرة v يعطى بالعلاقة

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3$$

2- احسب بدلالة d مساحة سطح الكرة

الحل: (1

$$R = \frac{d}{2}$$

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$v = \frac{4}{3}\pi \times \frac{d^3}{8} = \frac{1}{6}\pi d^3$$

(2

$$S = 4\pi R^2$$

$$S = 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$S = \pi d^2$$

مقاطع مجسمات

1-متوازي المستطيلات

مقطع متوازي المستطيلات بمستو:

1- يوازي قاعدته

مستطيل مطابق للقاعدة في الأبعاد والمحيط والمساحة

2- يوازي أحد أوجهه

هو مستطيل مطابق للوجه بالأبعاد والمحيط والمساحة

3- مار من أحد أحرفه

هو مستطيل أحد بعديه ذلك الحرف والبعد الآخر يحسب عن طريق فيثاغورث.

4- مقطع متوازي مستطيلات لمستو يوازي أحد أحرفه

هو مستطيل أحد بعديه هو ذلك الحرف والبعد الآخر يحسب عن طريق فيثاغورث.

5- مقطع متوازي مستطيلات لمستو مار من نقطتين

هو مستطيل أحد بعديه يساوي طول الحرف والبعد الآخر يحسب حسب فيثاغورث.

2- المكعب

مقطع مكعب بمستو:

1- يوازي قاعدته

مربع مطابق للقاعدة في الأبعاد والمحيط والمساحة

2- يوازي أحد أوجهه

هو مربع مطابق للوجه بالأبعاد والمحيط والمساحة

3- مار من أحد أحرفه

هو مستطيل أحد بعديه ذلك الحرف والبعد الآخر يحسب عن طريق فيثاغورث.

4- مقطع مكعب لمستو يوازي أحد أحرفه

هو مستطيل أحد بعديه هو ذلك الحرف والبعد الآخر يحسب عن طريق فيثاغورث.

3-الاسطوانة الدورانية

مقطع اسطوانة بمستو:

1- يوازي قاعدتها او عمودي على محورها

مقطع اسطوانة لمستوي يوازي قاعدتها هي دائرة طبوقة على دائرة القاعدة.

2- عمودي على قاعدتها او مار من مركزها

هو مستطيل أحد بعديه هو ارتفاع الأسطوانة

3- حالة خاصة

اذا كان طول قطر القاعدة يساوي ارتفاع الاسطوانة فمقطع الاسطوانة لمستوي مار من مركزها وعمودي على القاعدة هو مربع

4- المخروط الدوراني

مقطع مخروط بمستو:

1- يوازي القاعدة

هو دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة

5- الهرم

مقطع هرم بمستو:

1- يوازي القاعدة

هو مضلع له نفس طبيعة القاعدة ومصغر عنها

إذا كانت قاعدة الهرم مثلث فالمقطع مثلث.

إذا كانت قاعدة الهرم مثلث قائم فالمقطع مثلث قائم.

إذا كانت قاعدة الهرم مربع فالمقطع مربع.

ملاحظة:

عند قطع مخروط لمستوي يوازي القاعدة فالجسم الناتج يسمى جذع المخروط وكذلك في الهرم يسمى جذع الهرم.

6- الكرة

مقطع الكرة بمستو:

1- مار من مركزها

هو دائرة كبرى ويكون قطرها هو قطر الكرة

2- مار من نقطة تبعد عن مركزها مسافة R

هو نقطة حيث المستوي يمس سطح الكرة في هذه النقطة.

3- مار من نقطة تبعد عن مركزها مسافة أصغر من R

هو دائرة صغرى

7- المجسم الكروي

مقطع المجسم الكروي بمستو:

1- مار من مركزه

هو قرص دائري أعظمي ويكون قطره هو قطر المجسم

2- مار من نقطة تبعد عن مركزه مسافة R

هو نقطة فالمستوي يمس سطح المجسم في هذه النقطة.

3- مار من نقطة تبعد عن مركزه مسافة أصغر من R

هو قرص دائري

بعض الأسئلة الداعمة عن الوحدة الرابعة هندسة التي ترد أختر الإجابة الصحيحة

1- اسطوانة دورانية نقطعها لمستوي يوازي محورها فإن مقطعها:

A		B		C	
A	$\boxed{\text{مستطيل}}$	B	دائرة	C	مربع

2- مقطع هرم لمستوي يوازي القاعدة هو:

A	تكبيرللقاعدة	B	$\boxed{\text{تصغير للقاعدة}}$	C	مطابق

3- مكعب طول حرفه $\sqrt{2}$ فإن حجمه:

A	$\boxed{2\sqrt{2}}$	B	$8\sqrt{2}$	C	$4\sqrt{2}$

4- مكعب طول حرفه $x = 0.01m$ فإن حجمه:

A	$\boxed{10^{-6}m^3}$	B	$10^{-12}m^3$	C	$10^{-2}m^3$

$$v = x^3$$
$$= (0.01)^3$$
$$= (10^{-2})^3$$
$$= 10^{-6}$$

5- هرم ارتفاعه 9cm وقاعدته مربع طول ضلعه 3cm فإن حجم الهرم يساوي:

A	$81cm^3$	B	$\boxed{27cm^3}$	C	$36cm^3$

$$v = \frac{1}{3}S_b \times h$$
$$v = \frac{1}{3}(3)^2 \times 9$$
$$v = 27cm^3$$

6- اسطوانة دورانية نقطعها بمستوي يوازي قاعدتها فإن مقطعها:

A	مستطيل	B	$\boxed{\text{دائرة}}$	C	مربع

7- مقطع مخروط بمستوي يوازي القاعدة هو:

A	تكبيرللقاعدة	B	$\boxed{\text{تصغير للقاعدة}}$	C	مطابق

8- مقطع كرة بمستوي يمر من مركزها هو:

A	قرص دائري	B	$\boxed{\text{دائرةعظمى}}$	C	قرص دائري أعظمي

9- مقطع كرة بمستوي يبعد عن مركزها مسافة تساوي نصف قطرها هو:

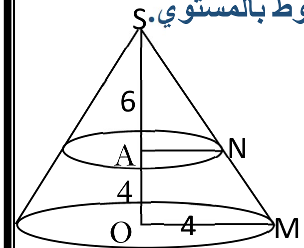
A	دائرة	B	قرص دائري	C	$\boxed{\text{نقطة}}$

تمرين (1): مخروط دوراني رأسه S وقاعدته قرص دائري مركزه o وارتفاع المخروط SO حيث SO = 10cm ونصف قطر قاعدته $OM = 4cm$

A نقطة من SO تحقق أن SA = 6cm

المستوي P المار من النقطة A موازياً قاعدة المخروط يقطع أحد مولداته SM في النقط N.

1- احسب مساحة مقطع المخروط بالمستوي.



الحل:

مقطع المخروط بمستو يوازي قاعدته هو دائرة مصغرة عن القاعدة

$$\left.\begin{matrix} SO \perp AN \\ SO \perp OM \end{matrix}\right\} \Rightarrow AN//OM$$ فحسب النسب الثلاث

$$\left.\begin{matrix} SAN \\ SOM \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{SA}{SO} = \frac{SN}{SM} = \frac{AN}{OM}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{AN}{4} \Rightarrow AN = 2.4cm$$

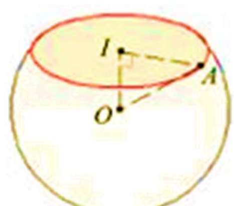
$$S = \pi(R')^2 = \pi\,(2.4)^2 = 5.76\,\pi\,cm^2$$

تمرين (3) W سطح كروي مركزه o ونصف قطره R=3cm قطع لمستو p يبعد عن مركزه 2cm، J نقطة مشتركة بين المقطع والسطح. تمعن الشكل وأجب:

1- ما طبيعة المقطع واحسب مساحة المقطع S_1

2- إذا قطعنا السطح بمستو يمر من o ما طبيعة المقطع واحسب مساحته

3- اوجد حجم الجسم الكروي W



الحل:

1- دائرة $S_1 = \pi {R_1}^2$

$$r_1 = IA$$

نحسب IJ عن طريق فيثاغورث من المثلث القائم OIJ

$$OA^2 = IA^2 + OI^2$$

$$9 = IA^2 + 4 \Rightarrow IA^2 = 9 - 4 = 5$$

$$IA = \sqrt{5} \Rightarrow S_1 = \pi {R_1}^2$$

$$= \pi\sqrt{5}^2 = 5\pi cm^2$$

2- دائرة كبرى $S = \pi R^2 = \pi(3)^2 = 9\pi$

3- $v = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$= \frac{4}{3} \times \pi \times 27$$

$$= 36\,\pi cm^2$$

ورقة عمل12

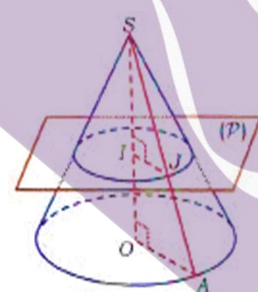
تمرين (1):

في الشكل المرسوم جانباً مخروط دوراني رأسه s وارتفاعه $h = so = 12\ cm$ وقاعدته قرص دائري مركزه o نصف قطر قاعدته $R = OA = 4\ cm$ I نقطة من So تحقق أن $SA = Icm$ والمستوي P المار بنقطة I موازياً قاعدة المخروط ويقطع أحد مساراته SM في النقطة J والمطلوب:

1- احسب IJ ثم احسب مساحة مقطع المخروط بالمستوي P.

2- احسب v حجم المخروط الذي مركز قاعدته o.

2- المثلث SIJ تصغير للمثلث SOA اوجد معامل التصغير.



لا تنسونا من دعائكم

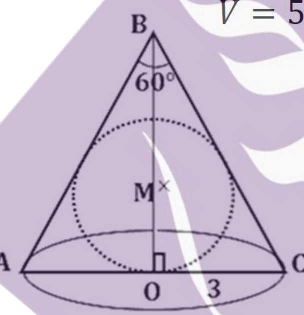
مسألة (2): في الشكل المجاور مخروط دوراني رأسه B، وطول نصف قطر قاعدته $OC = 3$، وليكن قياس زاوية رأسه $A\hat{B}C = 60°$ ، والمطلوب:

1) ما طبيعة المثلث ABC ، واحسب ارتفاع المخروط.

2) وضعت كرة داخل المخروط مركزها مركز المثلث ABC وتمس الضلع AC ، والمطلوب:

a) احسب V_1 حجم المخروط، و V_2 حجم الكرة.

b) أثبت أن V حجم الجزء المحصور بين المخروط والكرة يساوي $V = 5\sqrt{3}\pi\ cm^3$



انتهى قسم الهندسة

انتهت نوطة الرياضيات

لكن العزيمة لم تنته...