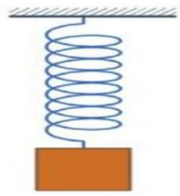
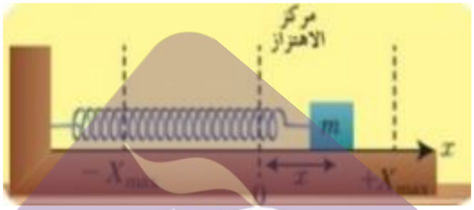
مراجعات في الفيزياء للثالث الثانوي العلمي

شرح نظري و مسائل الميكانيك)

النواس المرن (الحركة التوافقية البسيطة)



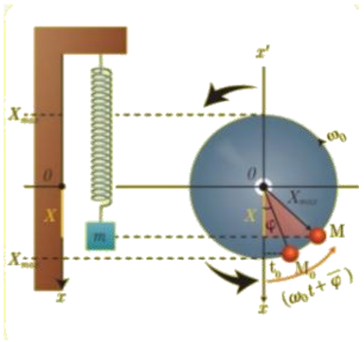


- **النواس المرن:** عبارة عن جسم كتلته m معلق بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k
- يهتز الجسم على جانبي وضع التوازن بحركة توافقية بسيطة
- ((تدل التجربة أن حركة النواس دورية)) ويحسب دورها تجريبيا" من العلاقة : $T_0 = \frac{t}{n}$

حيث (t) زمن الهزات و (n) عدد الهزات))

- طول القطعة المستقيمة التي يرسمها مركز عطالة الجسم في النواس المرن أثناء حركته $(2X_{max})$.
- الزمن اللازم للإنتقال من وضع مطاله $(x = X_{max})$ إلى وضع مطاله $(x = -X_{max})$ لأول مرة هو $\frac{T_0}{2}$.
- الزمن اللازم للإنتقال من وضع مطاله $(x = X_{max})$ إلى وضع التوازن $(x = 0)$ لأول مرة هو $\frac{T_0}{4}$.
- المسافة التي يقطعها مركز عطالة الجسم في النواس المرن خلال دور هي $(4X_{max})$

العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة والحركة التوافقية البسيطة (تمثيل فرينل):



يتصف شعاع فرينل $(\overrightarrow{OM})$ بما يلي :

١) الطور الابتدائي للحركة $\bar{\varphi}$: هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x`x}$ في اللحظة $t = 0$.

٢) طور الحركة $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$: هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x`x}$ في اللحظة t.

٣) سعة الحركة X_{max}: هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الثابتة عند الدوران.

٤) النبض الخاص للحركة ω_0 يقابل السرعة الزاويّة التي تدور بها النقطة

٥) مطال الحركة $\bar{x}$ هو مسقط الشعاع $\overrightarrow{OM}$ على المحور $\overrightarrow{x`x}$ وهو متغير بتغير الزمن.

نلاحظ أن النسبة: $\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = \frac{\bar{x}}{X_{max}}$

فيكون التابع الزمني لحركة المسقط تابع جيبي من الشكل :

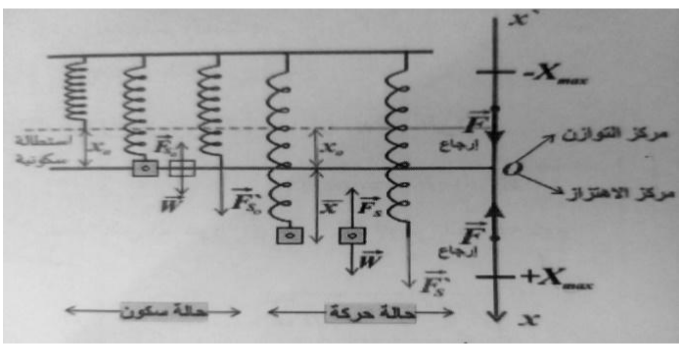
$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لذلك تسمى الحركة جيبيّة انسحابيّة (توافقيّة بسيطة).

س١ ((قوة الإرجاع)) : برهن أن محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في النواس المرن في كل لحظة هي قوة ارجاع تعطى بالعلاقة $(\bar{F} = -K\bar{x})$.

او- بصيغة أخرى- جسم كتلته (m) معلق بأسفل نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة ثابت صلابته k حلقاته متباعدة :

1 ادرس جملة (جسم- نابض) في حالة التوازن وأثبت أن : $x_0 = \frac{m.g}{k}$



ج: يستطيل النابض مسافة x_0 بعد تعليق الجسم فيه ، و يتوازن الجسم

تحت تأثير قوتين :

$\vec{W}$ ثقل الجسم

$\vec{F}_{S_0}$ توتر النابض

عند التوازن $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$\vec{W} + \vec{F}_{S_0} = \vec{0}$ نسقط على محورشاقولي موجه للأسفل

$W - F_{S_0} = 0 \Longrightarrow W = F_{S_0}$

تؤثر في النابض القوة $\overrightarrow{F`_{S_0}}$ تسبب استطالة x_0

$F`_{S_0} = F_{S_0} = K.x_0 \Longrightarrow w = k.x_0$

فتكون الإستطالة السكونية : $x_0 = \frac{m.g}{k}$

2 نشد الجسم عن وضع التوازن مسافة $(\bar{x})$ وتتركه يهتز ادرس جملة (جسم+نابض) في وضع الحركة وأثبت أن $\bar{F} = -k.\bar{x}$ ؟

ج : يؤثر في الجسم القوتين :

$\vec{w}$ قوة الثقل

$\vec{F}_S$ توتر النابض

حسب قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{w} + \vec{F}_S = m\vec{a}$ نسقط على محور شاقولي موجه للأسفل :

$$w - F_S = m.\bar{a}$$

وتؤثر في النابض قوة $\overrightarrow{F`_S}$ تسبب إستطالة $(\bar{x} + x_0)$ لكن

$F`_S = F_S = K(\bar{x} + x_0)$ بالتعويض نجد :

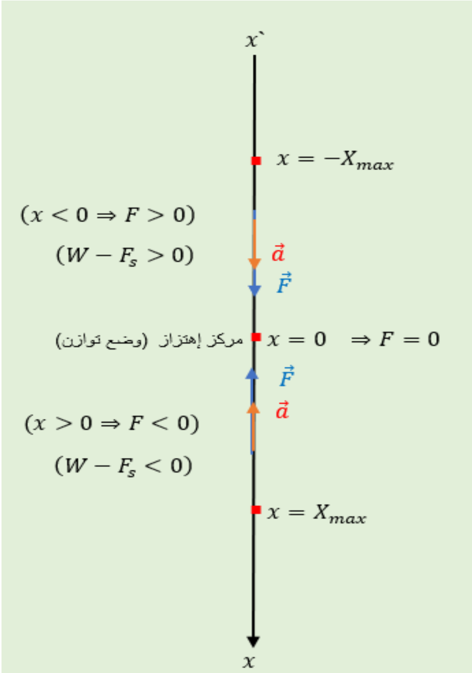
$$w - K(\bar{x} + x_0) = m.\bar{a}$$

$w - K.\bar{x} - k.x_0 = m.\bar{a}$ ولإن $w = k.x_0$

$$-k.\bar{x} = m.\bar{a} = \bar{F}$$

فتكون العلاقة المعبرة عن قوة الإرجاع : $\{\bar{F} = -K.\bar{x}\}$

((أي محصلة القوى المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة إرجاع لأنها تعيد الجسم إلى مركز الإهتزاز دوما" وتتجه نحو مركزه، تتناسب طردا" مع المطال $\bar{x}$ وتعاكسه بالإشارة))



س٢ : انطلاقا من العلاقة المعبرة عن قوة الإرجاع في النواس المرن $(\bar{F} = -K\bar{x})$ استنتج طبيعة الحركة ثم استنتج العلاقة المعبرة عن دور حركته ناقش علاقة الدور:

$$m.\bar{a} = -k.\bar{x}$$

$$\bar{a} = -\frac{k}{m}\bar{x}$$

$$(\bar{x})'' = -\frac{k}{m}\bar{x} \qquad (١)$$

هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاجيبيا"من الشكل :

$$\bar{x} = X_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

وللتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن :

تابع السرعة: $\bar{v} = (\bar{x})`_t = -\omega_0.X_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

تابع التسارع: $\bar{a} = (\bar{x})''_t = -\omega_0^2.\ X_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2.\bar{x} \qquad (٢)$$

بالمقارنة بين (١) و(٢) نجد :

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ وبالتالي $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ وهذا محقق لإن (k, m) موجبان والحركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة)

ولإستنتاج الدور :

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ وبالتالي : $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

نلاحظ الدور الخاص :

① لايتعلق بالسعة X_{max}

② يتناسب طردا" مع الجذر التربيعي للكتلة m

③يتناسب عكسا" مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k

س٣: نواس مرن دور حركته T_0 سعة حركته X_{max}

١: أكتب تابع المطال في الحركة التوافقية البسيطة بشكله العام :

ج: $\bar{x} = X_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

٢ : بفرض أن مبدأ الزمن $(t = 0)$ عندما كان الجسم في مطاله الأعظمي الموجب $(x = X_{max})$ استنتج قيمة الطور الإبتدائي واكتب تابع المطال بشكله المختزل:

ج: $(t = 0, x = X_{max})$

$X_{max} = X_{max}.\cos\varphi$

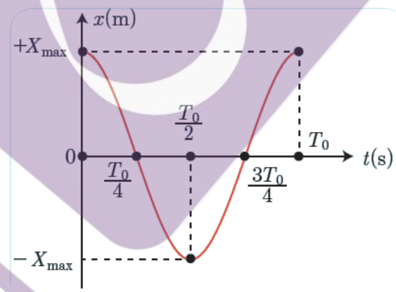
$\cos\varphi = 1$ وبالتالي $(\varphi = 0)rad$ فيأخذ التابع الشكل المختزل: $\bar{x} = X_{max}.\cos\omega_0 t$

٣: أكمل الجدول الآتي : $x = X_{max}.\cos\frac{2\pi}{T_0}t$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0	$\frac{5T_0}{4}$
x	X_{max}	0	$-X_{max}$	0	X_{max}	0

٤: ارسم المنحني البياني لتغيرات المطال بدلالة الزمن خلال دور

ج :



٥: أحدد المواضع التي يأخذ فيها المطال: (a) قيمة عظمى (طويلة)

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
a	$-\omega_0^2 X_{max}$	0	$\omega_0^2 X_{max}$	0	$-\omega_0^2 X_{max}$

(b) قيمة معدومة

ج : a- المطال أعظمي (طويلة) في الموضعين الطرفيين $x = |\pm X_{max}|$

b- المطال معدوم في مركز الإهتزاز $x = 0$

٦ : أحدد مطال الجسم في اللحظة $t = \frac{3T_0}{2}$

ج: $x = X_{max}.\cos\frac{2\pi}{T_0}t$

$x = X_{max}.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.\frac{3T_0}{2}\right)$

$x = X_{max}.\cos(3\pi) \Longrightarrow x = -X_{max}$

س٤ : إذا علمت ان تابع المطال في الحركة التوافقية البسيطة : $x = X_{max}\cos\omega_0 t$ ، المطلوب:

١: استنتج علاقة تابع السرعة:

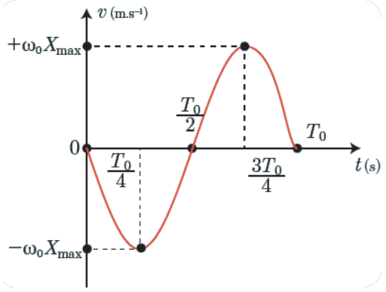
ج : $\bar{v} = (\bar{x})'_t \Longrightarrow \bar{v} = -\omega_0.X_{max}.\sin\omega_0 t$

٢: أكمل الجدول التالي: $\bar{v} = -\omega_0.X_{max}.\sin\frac{2\pi}{T_0}t$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0	
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$\omega_0 X_{max}$	0	

٣: ارسم المنحني البياني لتغيرات السرعة بدلالة الزمن خلال دور:

ج :



٤: أحدد المواضع التي تأخذ فيها السرعة: A) قيمة عظمى طويلة B) قيمة معدومة

ج : A) السرعة أعظمية (طويلة) $v_{max} = |\pm\omega_0.X_{max}|$ لحظة المرور في مركز الإهتزاز.

B) السرعة معدومة $v = 0$ لحظة المرور في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين).

٥ : أحدد قيمة سرعة الجسم وجهة حركته في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$:

ج : $\bar{v} = -\omega_0.X_{max}.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.\frac{5T_0}{4}\right)$

$\bar{v} = -\omega_0.X_{max}.\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

$\bar{v} = -\omega_0.X_{max}.$ اتجاه سالب

س٥: إذا علمت ان تابع المطال في الحركة التوافقية البسيطة: $x = X_{max}\cos\omega_0 t$ ، المطلوب:

١: استنتج علاقة تابع التسارع بدلالة المطال:

ج: $\bar{v} = (\bar{x})'_t = -\omega_0.X_{max}.\sin\omega_0 t$ تابع السرعة

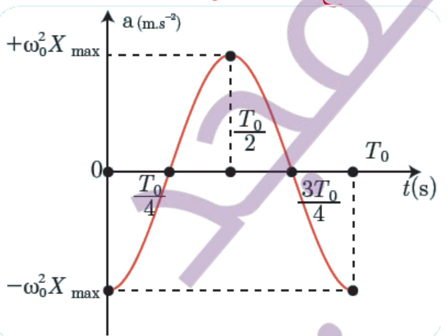
$\bar{a} = (\bar{x})''_t = -\omega_0^2.X_{max}.\cos\omega_0 t$ تابع التسارع

$\bar{a} = -\omega_0^2.\bar{x}$

٢: أكمل الجدول التالي: $\bar{a} = -\omega_0^2.X_{max}.\cos\frac{2\pi}{T_0}t$

٣: ارسم المنحني البياني لتغيرات التسارع بدلالة الزمن خلال دور :

ج:



٤: أحدد المواضع التي يأخذ فيها التسارع: A) قيمة عظمى (طويلة) B) قيمة معدومة

ج: A) التسارع أعظمي طويلة $a_{max} = |\pm\omega_0^2.X_{max}|$ عند المرور في المطالين الأعظميين.

B) التسارع معدوم $(a = 0)$ عند المرور في مركز الإهتزاز.

٥ : أحدد قيمة تسارع الجسم في اللحظة $t = \frac{5T_0}{4}$

ج : $\bar{a} = -\omega_0^2.X_{max}.\cos\frac{2\pi}{T_0}.\frac{5T_0}{4}$

$\bar{a} = -\omega_0^2.X_{max}.\cos\frac{5\pi}{2} \Longrightarrow a = 0$

س٦: ① برهن أن الطاقة الميكانيكية لهزازة جيبيه انسحابيه غير متخامدة هي طاقة ثابتة في كل لحظة ؟

ج : الطاقة الميكانيكية للنواس المرن

هي مجموع الطاقتين: الكامنة و الحركية:

$$E_{tot} = E_p + E_k$$

الطاقة الكامنة المرونية للنابض هي $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$

نعوض تابع المطال: $\bar{x} = X_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$E_p = \frac{1}{2} k\, X_{max}^2\, cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

الطاقة الحركية للجسم هي $E_k = \frac{1}{2} m\, v^2$

نعوض تابع السرعة: $\bar{v} = -\omega_0 . X_{max} . \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$E_k = \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, X_{max}^2\, sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

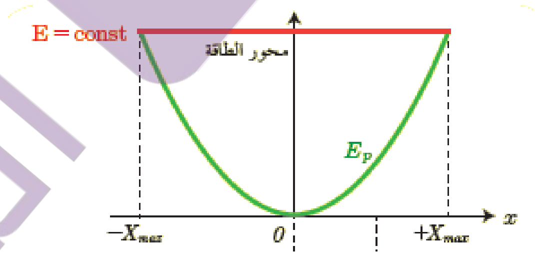
لكن $m\, \omega_0^2 = k$ وبالتالي

$$E_k = \frac{1}{2}\, k\, X_{max}^2\, sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

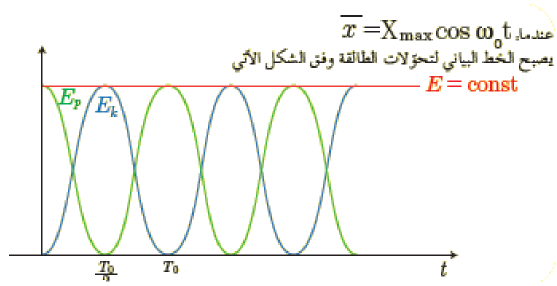
$$E_{tot} = \frac{1}{2} k\, X_{max}^2 cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \frac{1}{2}\, k\, X_{max}^2\, sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\, k\, X_{max}^2 = const$$

② ارسم الخط البياني المعبر عن $E_p = F(x)$ و الخط البياني المعبر عن $E = F(x)$ (في جملة المحاور نفسها)



③ بفرض أن $x = X_{max} \cos \omega_0 t$ ارسم الخط البياني لتحولات الطاقة بدلالة الزمن :



④ مانوع الطاقة في كل من :

❶ بوضع التوازن:

$$x = 0 \Rightarrow E_P = 0 \Rightarrow E_K = E$$

تكون الطاقة الحركية عظمى

❷ عند الوضعين الطرفيين:

$$v = 0 \Rightarrow E_k = 0 \Rightarrow E_p = E$$

تكون الطاقة الكامنة عظمى

س٧ : في النواس المرن برهن أنّ السرعة تعطى بالعلاقة: $v = \omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$.

$$E = E_k + E_p \quad ، \quad E_k = E - E_p$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k X_{max}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow$$

$$m v^2 = k(X_{max}^2 - x^2)$$

$$v^2 = \frac{k}{m}(X_{max}^2 - x^2)$$

لكن:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$v^2 = \omega_0^2(X_{max}^2 - x^2) \implies$$

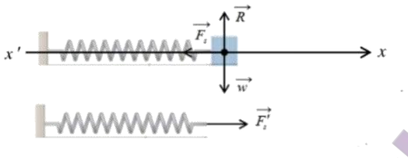
$$v = \pm\omega_0\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$$

س ٨ : نابض مرن مهمل حلقاته متباعدة ثابت صلابته k، مثبت من أحد طرفيه ، ويربط بطرفه الأخر جسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرك على سطح أفقي أملس، كما في الشكل المجاور ، نشد الجسم مسافة أفقية مناسبة ، ونتركه يهتز دون سرعة ابتدائية **والمطلوب** :

١- ادرس حركة الجسم، واستنتج التابع الزمني للمطال.

٢- استنتج علاقة الطاقة الحركية للجسم بدلالة X_{max} في كل من الموضعين (A) و (B)

علما بأن $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$ و $x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$



الحل : **جملة المقارنة**: خارجيّة،

الجملة المدروسة: النواس المرن.(كتلة +نابض)

القوى الخارجيّة المؤثرة في مركز عطالة الجسم:

- قوة توتر النابض $\vec{F_s}$.
- قوة الثقل $\vec{w}$.
- قوة رد فعل السطح الأفقي على الجسم $\vec{R}$.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow$$

$$\vec{w} + \vec{R} + \vec{F_s} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور أفقي موجه كما في الشكل:

$$0 + 0 - F_s = ma \Rightarrow$$

$$-F_s = m(x)''_t$$

تؤثر في النابض القوّة $\vec{F_s}$` الناتجة عن الاستطالة $\bar{x}$:

$$F`_s = F_s = kx$$

وبالتالي $-kx = m(x)''_t$

$$(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\bar{x}$$

معادلة تفاضليّة من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

للتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\bar{x})`_t = -\omega_0 X_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$$(\bar{x})''_t = -\omega_0^2\, \bar{x}$$

بالمطابقة مع المعادلة التفاضليّة نجد:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \to \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقق لإنّ $(m\,, k)$ موجبان، إذا حركة الجسم المعلق بالنابض الأفقي جيبية انسحابية (توافقية بسيطة)

التابع الزمني للمطال: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

a) المطلوب استنتاج علاقة E_k بدلالة X_{max} عند كل من:

١- $x_A = -\frac{X_{max}}{2}$

$$E_{tot} = E_p + E_k \to E_k = E - E_p \to$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}k\frac{X_{max}^2}{4} \to$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}kX_{max}^2 \to$$

$$E_k = \frac{3}{8}kX_{max}^2$$

٢- $x_B = +\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$

$$E_k = E_{tot} - E_p \to$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \to$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2 - \frac{1}{2}k\frac{X_{max}^2}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}kX_{max}^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}kX_{max}^2$$

$$\to E_k = \frac{1}{4}kX_{max}^2$$

نتيجة: عند زيادة القيمة المطلقة للمطال تزداد طاقته الكامنة المرونية وتنقص طاقته الحركية.

مراجعة لبعض القوانين تساعدفي حل مسائل النواس المرن

* علاقة الدور : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ نلاحظ أن الدور :

يتناسب طردا" مع الجذر التربيعي للكتلة m	يتناسب عكسا" مع الجذر التربيعي لثابت صلابة النابض k	لايتعلق بالسعة X_{max}

أو $T_O = \frac{2\pi}{\omega_O}$ أو $T_O = \frac{1}{f_O}$

أو : $T_O = \frac{(t)\ \text{زمن الهزات}}{(N)\ \text{عدد الهزات}}$

* لحساب ω_O : النبض الخاص

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

أو أي علاقة تحوي ω_O

* تابع المطال $x = X_{max}\ \cos(\omega_o t + \varphi)$

المطال أعظمي (طويلة) في الموضعين الطرفيين $x = \lvert\mp X_{max}\rvert$	المطال معدوم في مركز الإهتزاز $x = 0$

* لحساب السرعة في لحظة ما (من أجل زمن ما) نستخدم تابع السرعة

$$v = -\omega_o X_{max} \cdot \sin(\omega_o t + \varphi)$$

* السرعة العظمى طويلة : $v_{max} = \lvert\mp \omega_o x_{max}\rvert$ لحظة المرور بوضع التوازن(مركز الإهتزاز)	السرعة معدومة $(v = 0)$ لحظة الوجود في المطالين الأعظميين (الموضعين الطرفيين)

*لحساب السرعة من أجل قيمة ما ل x:

$$v = \mp\omega_0\sqrt{x_{max}^2 - x^2}$$

* قوة الارجاع $\bar{F} = -k\bar{x}$

(دائما" تتجه نحو مركز الإهتزاز لها حامل وجهة شعاع التسارع)

شدة قوة الإرجاع: $(F = k.x)$

* التسارع بدلالة المطال: $a = -\omega_o^2 x$

*التسارع الأعظمي طويلة في المطالين الأعظميين: $a_{max} = \lvert\mp\omega_0^2 . x_{max}\rvert$	التسارع معدوم $(a = 0)$ عند المرور في مركز الإهتزاز (وضع التوازن)

* **الطاقات:**

الطاقة الكامنة : $E_P = \frac{1}{2}Kx^2$

تكون عظمى في المطالين الأعظميين $x = \mp X_{max} \Leftrightarrow E_p = E$	تكون معدومة عند المرور بوضع التوازن $x = 0 \Leftrightarrow E_p = 0$

الطاقة الحركية: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$

تكون عظمى عند المرور بوضع التوازن $x = 0 \Leftrightarrow E_k = E$	تكون معدومة عند المطالين الأعظميين $x = \mp X_{max} \Leftrightarrow E_k = 0$

الطاقة الميكانيكية: $E = \frac{1}{2}Kx_{max}^2$

$$E = E_P + E_K$$

* لحساب E_k من أجل قيمة ما لـ x

$$E_k = E - E_P$$

$$E_k = E - \frac{1}{2}Kx^2$$

* لحساب الاستطالة السكونية :

عند التوازن $W = Fs_o = F`s_o$

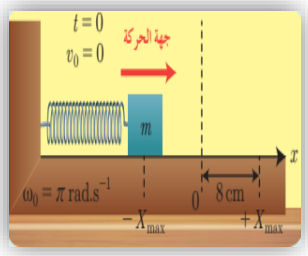
$$mg = kx_o \Rightarrow x_o = \frac{mg}{k}$$

* تذكر $k = \omega_o^2 m \leftrightarrow x_o = \frac{mg}{\omega_o^2 m} = \frac{g}{\omega_o^2}$

مفاهيم أولية:

- طول القطعة المستقيمة التي يرسمها مركز عطالة الجسم في النواس المرن أثناء حركته $(2X_{max})$.
- الزمن اللازم للإنتقال من وضع مطاله $(x = X_{max})$ إلى وضع مطاله $(x = -X_{max})$ لأول مرة هو $\frac{T_0}{2}$.
- الزمن اللازم للإنتقال من وضع مطاله $(x = X_{max})$ إلى وضع التوازن $(x = 0)$ لأول مرة هو $\frac{T_0}{4}$.
- المسافة التي يقطعها مركز عطالة الجسم في النواس المرن خلال دور هي $(4X_{max})$

اختبر نفسي



أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

تابع المطال الذي يصف حركة الهزّازة الجيبية في الشكل المجاور هو: ①

$\overline{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)$

②

$\overline{x} = 8\cos(\pi t - \pi)$

③

$\overline{x} = 0.08\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

④

$\overline{x} = 0.8\cos(\pi t)$

الجواب هو:

$\overline{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)$

طريقة الحل:

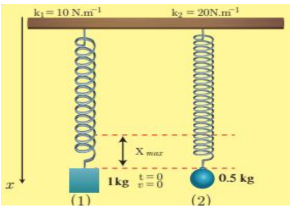
$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x = -X_{max} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad -X_{max} = X_{max}\cos(\varphi)$$

$$\cos\varphi = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pi rad$$

من الشكل: $X_{max} = 8cm = 0.08m$

$$\Rightarrow x = 0.08\cos(\pi t + \pi)$$

2- يمثّل الشكلُ المجاورُ هزّازتان توافقيتان (١) و (2) تنطلقان من الموضع نفسه، وفي اللحظة نفسها، فإنهما بعد مضي 3s من بدء حركتهما:



A. تلتقيان في مركز الاهتزاز.

B. تلتقيان في الموضع $+X_{max}$

C. لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $+X_{max}$ ومطال الثانية $-X_{max}$

D. لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $-X_{max}$ ومطال الثانية $+X_{max}$

الجواب هو:

لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $-X_{max}$ ومطال الثانية $+X_{max}$

طريقة الحل:

$$T_{01} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2(S)$$

$$x_1 = X_{max}\cos(\pi t)$$

وبعد 3(S) ⟸ نعوض t=3(S)

ومنه $x_1 = X_{max}\cos(3\pi)$

$$\boxed{x_1 = -X_{max}}$$

$$T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{m2}{K_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{20}} = 1(S)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{02} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rads^{-1}$$

$$x_2 = X_{max}\cos(2\pi t)$$

$$t = 3(S) \Rightarrow \quad x_2 = X_{max}\cos(6\pi) = +X_{max}$$

$$\boxed{x_2 = +X_{max}}$$

ثالثاً: حل المسائل الآتية:

(وفي جميع المسائل $g = 10m.s^{-2}$, $\pi^2 = 10$, $4\pi = 12.5$)

المسألة الأولى: تتألف هزازة جيبية من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 10N.m^{-1}$ مثبت من أحد طرفيه، ويحمل في طرفه الأخر جسماً كتلته m ويعطى التابع الزمني لمطال حركتها بالعلاقة : $\bar{x} = 0.1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

المطلوب: ① أوجد قيم ثوابت الحركة ودورها الخاص.

② - احسب كتلة الجسم m.

③ - احسب قيمة السرعة في موضع مطاله $x = 6cm$ والجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور.

④ حدد موضع الجسم وجهة حركته لحظة بدء الزمن.

الحل: (1 $x = 0.1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

بالموازنة مع الشكل العام:

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

سعة الحركة $X_{max} = 0.1m$

النبض الخاص $\omega_0 = \pi rad.s^{-1}$

الطور الابتدائي $\varphi = \frac{\pi}{2}rad$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2(s)$$

(2 $m = \frac{k}{\omega_0^2}$

$$= \frac{10}{\pi^2} = 1kg$$

(3 $E_K = E - E_P$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k[X_{max}^2 - x^2]$$

$$v^2 = \frac{k}{m}[X_{max}^2 - x^2]$$

حيث: $x = 6cm \Rightarrow x = \frac{6}{100}m$

$$v^2 = \frac{10}{1}\left[\frac{1}{100} - \frac{36}{10000}\right]$$

$$= 10\left[\frac{64}{10000}\right]$$

$$v = \mp 8\pi \times 10^{-2}m.s^{-1}$$

وبما أن الجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور:

$$v = 8\pi \times 10^{-2}m.s^{-1}$$

(4 لحظة البدء هي : $t = 0$

نعوض في تابع المطال:

$$x = 0.1\cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = 0$$

أي أن الجسم كان مار من مركز الاهتزاز

لتحديد جهة الحركة نستعين بتابع السرعة:

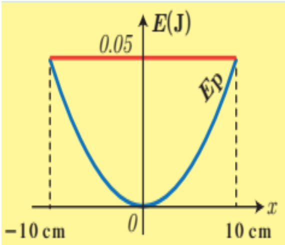
$$v = (x)'_t = -0.1\pi\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = 0 \Rightarrow v = -0.1\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$v = -0.1\pi m.s^{-1} < 0$$

أي أن الجسم في لحظة البدء كان متحركاً بالاتجاه السالب.

المسألة الثانية:



يوضح الرسم البياني المجاور تغيرات الطاقة الكامنة المرونية بتغير الموضع لهزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته $0.4kg$

المطلوب:

١- استنتج قيمة ثابت صلابة النابض k.

٢- احسب الدور الخاص للحركة.

٣- احسب قيمة السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز.

الحل:

$$m = 0.4kg$$

من معطيات الرسم البياني

$$E = 0.05\,J \quad ، \quad X_{max} = 0.1m$$

(1 $E = \frac{1}{2}KX_{max}^2$

$$k = \frac{2E}{X_{max}^2} = \frac{2 \times 0.05}{(0.1)^2}$$

$$k = 10Nm^{-1}$$

(2 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{10}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{4}{100}} = 2\pi \times \frac{2}{10}$$

$$T_0 = 4\pi \times 10^{-1}$$

$$T_0 = 12.5 \times 10^{-1}$$

$$T_0 = 1.25(s)$$

(3 طريقة ①

في مركز الاهتزاز

$$x = 0 \Rightarrow E_P = 0$$

$$E = E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{2E}{m}$$

$$v^2 = \frac{2 \times 0.05}{0.4}$$

$$v^2 = \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{v = \mp\frac{1}{2}m.s^{-1}}$$

طريقة ② السرعة في مركز الاهتزاز :

$$v_{max} = \mp\omega_0 X_{max}$$

$$= \mp\frac{2\pi}{T_0}X_{max}$$

$$= \mp \frac{2\pi}{0.4\pi} \times 0.1$$

$$\boldsymbol{v_{max} = \mp \frac{1}{2} m.s^{-1}}$$

المسألة الثالثة:

تشكل هزازة توافقية بسيطة من جسم كتلته $m = 1kg$ معلق بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة فينجز 10 هزات في $10S$ ويرسم أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها $16\ cm$ المطلوب:

١- استنتج علاقة الاستطالة السكونية لهذا النابض، ثم احسب قيمتها.

٢- احسب قيمة السرعة العظمى (طويلة).

٣- احسب قيمة التسارع في المطال $x = 6\ cm$

٤- احسب الطاقة الكامنة المرونية في موضع مطاله $x = -4\ cm$ ، واحسب الطاقة الحركية عندئذ.

الحل:

$$m = 1kg$$

10 هزات خلال $10(s)$

$$L = 16cm = 16 \times 10^{-2}m$$

1) $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$$\vec{w} + \overrightarrow{F_{so}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$w = F_{so} = 0$$

$$\Rightarrow w = F_{so}$$

$$mg = Kx_0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{mg}{K}$$

$$x_0 = \frac{g}{\omega_0^2}$$

حساب ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

نحسب:

$$T_0 = \frac{t}{N} = \frac{10}{10} = 1(s)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$$

$$x_0 = \frac{10}{(2\pi)^2} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}m$$

2) $v_{max} = |\mp\omega_0 X_{max}|$

نحسب X_{max} : $X_{max} = \frac{L}{2} = 8 \times 10^{-2}m$

$$= |\mp 2\pi \times 8 \times 10^{-2}|$$

$$= 16\pi \times 10^{-2}$$

$$v_{max} = 5 \times 10^{-1}m.s^{-1}$$

حيث: $16\pi \simeq 50$

3) $a = -\omega_0^2 x$

$$= -(2\pi)^2(6 \times 10^{-2})$$

$$= -40 \times 6 \times 10^{-2} = -24 \times 10^{-1}m.s^{-2}$$

$$= -2.4m.s^{-2}$$

4) حساب E_P في موضع مطاله $x = -4cm$

$$E_P = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$K = m\omega_0^2$$

$$E_P = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times (2\pi)^2(-4 \times 10^{-2})^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 40 \times 16 \times 10^{-4}$$

$$E_P = 32 \times 10^{-3}J$$

حساب E_k :

$$E_k = E - E_P$$

نحسب E :

$$E = \frac{1}{2}KX_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 40 \times 64 \times 10^{-4}$$

$$E = 128 \times 10^{-3}J$$

$$E_K = 128 \times 10^{-3} - 32 \times 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{E_K = 96 \times 10^{-3}J}$$

المسألة الرابعة:

تهتز كرة معدنية كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 16N.m^{-1}$ بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص $1\ s$ ، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1m$ ، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرك بالاتجاه السالب.

المطلوب:

1 - استنتج التابع الزمني لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام.

2 -عيّن لحظتي المرور الأول والثالث للكرة في موضع التوازن.

3 -احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $x = +0.1m$

4 -احسب كتلة الكرة.

الحل:

$K = 16Nm^{-1}$

$X_{max} = 0.1m$

$T_0 = 1(s)$

$$\left.\begin{aligned} t &= 0 \\ x &= \frac{X_{max}}{2} \\ v &< 0 \end{aligned}\right\}$$

1) $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

نحسب الثوابت

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad.s^{-1}$$

حساب φ:

$$\left.\begin{aligned} t &= 0 \\ x &= \frac{X_{max}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi \begin{cases} \frac{\pi}{3} rad \\ -\frac{\pi}{3} rad \end{cases}$$

فنختار قيمة لـ φ تجعل السرعة سالبة في اللحظة $t = 0$:

$$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$t = 0 \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max}\sin(\varphi)$$

$\varphi = \frac{\pi}{3}rad \Rightarrow \sin\varphi > 0 \Rightarrow v < 0$ مقبول

$\varphi = -\frac{\pi}{3}rad \Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow v > 0$ مرفوض

نعوض قيم الثوابت في الشكل العام فنجد:

$$\boldsymbol{x = 0.1\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})}$$

2) في مركز الاهتزاز $x = 0$

$$\Rightarrow \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi K}$$

أول مرة: $K = 0$

$$\Rightarrow 2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{12}(s)$$

ثالث مرة: $K = 2$

$$2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

$$2\pi t = \frac{\pi}{6} + 2\pi$$

$$2\pi t = \frac{13\pi}{6}$$

$$t = \frac{13}{12}(s)$$

3) $F = |-kx|$

$$F = |-16 \times 0.1| = 1.6N$$

4) $$m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{16}{(2\pi)^2} = \frac{16}{4\pi^2}$$

$$\boldsymbol{m = 0.4kg}$$

مسألة عامة: (1)

نشكل هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلةحلقاته متباعدة ثابت صلابته $\boldsymbol{k = 10N.m^{-1}}$ مثبت من إحدى نهايتيه إلى نقطة ثابتة ويحمل في نهايته الثانية جسماً كتلته $\boldsymbol{m = 0.1kg}$ فإذا علمت أن مبدأ الزمن لحظة مرور الجسم في مركزالاهتزاز وهو يتحرك بالاتجاه السالب بسرعة $\boldsymbol{v = -3m.s^{-1}}$ المطلوب:

1. احسب نبض الحركة.
2. استنتج التابع الزمني لمطال الحركة.
3. احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها 3 cm .

الحل: $m = 0.1kg$

$K = 10N.m^{-1}$

شروط البدء:

$$\left.\begin{aligned} t &= 0 \\ x &= 0 \\ v &= -3m.s^{-1} \end{aligned}\right\}$$

1) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0.1}} = 10rad.s^{-1}$$

2) $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0 = 10rads^{-1}$

$$\left.\begin{aligned} t &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = X_{max}\cos(\varphi)$$

(1

$$\cos\varphi = 0$$

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \varphi \begin{cases} \frac{\pi}{2} rad \\ -\frac{\pi}{2} rad \end{cases}$$

نختار قيمة لـ φ تجعل السرعة سالبة في اللحظة $t = 0$

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin\varphi$$

مقبول

$$\varphi = \frac{\pi}{2} rad \Rightarrow \sin\varphi > 0 \Rightarrow v < 0$$

مرفوض يخالف

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} rad \Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow v > 0$$

حساب X_{max}:

$$-3 = -10 X_{max} \sin\frac{\pi}{2}$$

$$X_{max} = 0.3m$$

$$\mathbf{x = 0.3\cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) m}$$

(3

$$F = |-kx|$$

$$= |-10(0.03)|$$

$$F = 0.3N$$

مسألة عامة: (2)

تهتز نقطة مادية كتلتها $0.5kg$ بحركة توافقية بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة حلقاته متباعدة شاقولي وبدور خاص $4s$ وبسعة اهتزاز $X_{max} = 8cm$ فإذا علمت أن النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحركة بالاتجاه السالب.المطلوب:

1. استنتج التابع الزمني لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.
2. عين لحظتي المرور الأول والثالث في وضع التوازن.
3. عين المواضع التي تكون فيها شدة محصلة القوى عظمى واحسب قيمتها وحدد موضعاً تنعدم فيه شدة هذه المحصلة.
4. احسب قيمة ثابت صلابة النابض وهل تتغير هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلقة؟
5. احسب الكتلة التي تجعل الدور الخاص 1s.

الحل:

$$m = 0.5kg$$

$$X_{max} = 0.08m$$

$$T_0 = 4(s)$$

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x = \frac{X_{max}}{2} \\ v < 0 \end{matrix}\right\} \text{شروط البدء}$$

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} rad s^{-1}$$

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x = \frac{X_{max}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi \begin{cases} \frac{\pi}{3} rad \\ -\frac{\pi}{3} rad \end{cases}$$

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\varphi)$$

مقبول

$$\varphi = \frac{\pi}{3} rad \Rightarrow \sin\varphi > 0 \Rightarrow v < 0$$

مرفوض يخالف شروط

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} rad \Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow v > 0$$

$$x = 0.08\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(2)

$$x = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi K$$

أول مرة:

$$k = 0$$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}s$$

ثالث مرة:

$$k = 2$$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{6} + 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2}t = \frac{13\pi}{6}$$

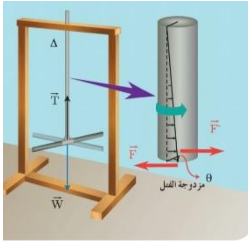
$$t = \frac{\frac{13}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}s$$

③
$$F = -Kx$$
$$F_{max} = \mp KX_{max}$$
$$F_{max} = \mp m\omega_0^2 X_{max}$$
F عظمى عندما $x = \mp X_{max}$ تبلغ قيمة عظمى عند مرور الجسم في الوضعتين الجانبيين:
$$F_{max} = \mp 0.5 \times \frac{\pi^2}{4} \times 0.08$$
$$F_{max} = \mp 0.1N$$
$F = 0$ عندما $x = 0$ تنعدم عند مرور الجسم في مركز الاهتزاز

④
$$K = m\omega_0^2$$
$$= 0.5(\frac{\pi}{2})^2$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{10}{4} = \frac{10}{8}$$
$$= 1.25N.m^{-1}$$
لا تتغير قيمة k باستبدال الكتلة المعلقة.

⑤
$$T_0 = 1(s)$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\grave{m}}{K}}$$
$$1 = 2\pi\sqrt{\frac{\grave{m}}{1.25}}$$
$$1 = 4\pi^2\frac{\grave{m}}{1.25}$$
$$\grave{m} = \frac{1.25}{40}$$
$$\grave{m} = 31.25 \times 10^{-3}kg$$

(((نواس الفتل غير المتخامد))) (مراجعة وملاحظات)



س ١: ساق معدنية متجانسة معلقة من منتصفها بسلك فتل رفيع شاقولي ثابت فتله (k). ندير الساق في مستوٍ أفقي حول سلك التعليق بزاوية (θ) و نتركها تهتز . ادرس حركة الساق مبيناً طبيعتها ثم استنتج علاقة الدور الخاص موضحا" دلالات الرموز ووحداتها:

ج : القوى الخارجية المؤثرة في الساق :

$\overrightarrow{w}$: ثقل الساق ، $\overrightarrow{T}$: توتر السلك

$\vec{\eta}$: مزدوجة الفتل تتولد في السلك عندما ندير الساق زاوية (θ) تعمل على إعادة الساق إلى وضع توازنها عزمها $\bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = -k.\bar{\theta}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني حول محور دوران ينطبق على السلك $\sum\bar{\Gamma}_{/\Delta} = \mathrm{I}_\Delta.\bar{\alpha}$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{\eta}/\Delta} = \mathrm{I}_\Delta.\bar{\alpha}$$

إن عزم كل من قوة الثقل $\overrightarrow{w}$ وقوة التوتر $\overrightarrow{T}$ معدوم لأن حامل كل منهما منطبق على محور الدوران Δ

$$0 + 0 - K.\bar{\theta} = \mathrm{I}_\Delta.\bar{\alpha}$$
$$(\bar{\theta})'' = -\frac{k}{\mathrm{I}_\Delta}\bar{\theta} \qquad (١)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلا جيبيا" من الشكل :

$$\bar{\theta} = \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

وللتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن :

$$\bar{\omega} = (\bar{\theta})`_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
تابع السرعةالزاوية
$$\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\ \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
تابع التسارع الزاوي
$$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\bar{\theta} \qquad (٢)$$

بالمقارنة بين (١) و(٢) نجد :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\mathrm{I}_\Delta}$$

وبالتالي $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mathrm{I}_\Delta}} > 0$ وهذا محقق لإن (k, I_Δ) موجبان والحركة جيبية دورانية ، ولإستنتاج الدور :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

وبالتالي : $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}$$

T_0: الدور الخاص واحدته (sec) .

k ثابت فتل سلك التعليق واحدته $(m.N.rad^{-1})$

I_Δ عزم عطالة الجملة حول محور الدوران $(kg.m^2)$

نلاحظ:

١- الدور لايتعلق بالسعة الزاوية للحركة θ_{max}

٢ – يتناسب الدور طرداً" مع الجذر التربيعي لعزم عطالة جملة النواس حول محور الدوران

٣ – يتناسب الدور عكساً" مع الجذر التربيعي لثابت فتل السلك

س ٢: انطلاقاً" من مصونية الطاقة الميكانيكية برهن أن حركة نواس الفتل جيبية دورانية.

ج : $E = E_P + E_K = const$

$$E = \frac{1}{2}k.\theta^2 + \frac{1}{2}I_\Delta.\omega^2$$

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن :

$$0 = \frac{1}{2}k.2(\bar{\theta}.\bar{\omega}) + \frac{1}{2}I_\Delta 2(\bar{\omega}.\bar{\alpha})$$

$$0 = k.\bar{\theta} + I_\Delta.\bar{\alpha}$$

$(\theta)''_t = -\frac{k}{I_\Delta}.(\bar{\theta})$ .... (1)

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلا جيبياً" من الشكل :

$$\bar{\theta} = \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

وللتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن :

$\bar{\omega} = (\bar{\theta})`_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تابع السرعةالزاوية

$\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\ \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تابع التسارع الزاوي

$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\bar{\theta}$ (٢)

بالمقارنة بين (١) و(٢) نجد :

$\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta}$ وبالتالي $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$ وهذا محقق لإن (k, I_Δ) موجبان والحركة جيبية دورانية

س ٣ :نعلق ساقين متماثلين بسلكي فتل متماثلين طول الأول l_1 وطول الثاني l_2 فإذا علمت أن $T_{0_1} = 2T_{0_2}$ أوجد العلاقة بين طولي السلكين؟

(الحل) $2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k_1}} = 2 \times 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k_2}} \Rightarrow$

$$T_{0_1} = 2T_{0_2}$$

$\sqrt{\frac{I_\Delta}{k_1}} = 2 \times \sqrt{\frac{I_\Delta}{k_2}}$ نربع الطرفين

$$\frac{I_\Delta}{k_1} = 4 \times \frac{I_\Delta}{K_2}$$

$\frac{1}{k_1} = \frac{4}{k_2}$ وبالتالي $4\,k_1 = k_2$

$$4 \times \grave{k}\,\frac{(2r)^4}{l_1} = \grave{k}\,\frac{(2r)^4}{l_2}$$

$$\frac{4}{l_1} = \frac{1}{l_2} \Rightarrow l_1 = 4l_2$$

س٤ :نعلق ساقين متماثلين بسلكي فتل متماثلين طول الأول l_1 وطول الثاني $l_2 = 2l_1$ أوجد العلاقة بين T_{0_1}, T_{0_2}

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\grave{k}\frac{(2r)^4}{l_1}}{\grave{k}\frac{(2r)^4}{l_2}}$$

$\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_2}{l_1}$ وبالتالي $\frac{k_1}{k_2} = \frac{2l_1}{l_1} \leftarrow k_1 = 2k_2$

$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_2}}}$ وبالتالي $\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$

$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{K_2}{2K_2}}$ وبالتالي $\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ وبالتالي ($T_{0_2} = \sqrt{2}\ .T_{0_1}$)

*ثابت فتل سلك التعليق : $K = \grave{k}\,\frac{(2r)^4}{l}$

((تستخدم عندما نغير طول سلك الفتل (l) تتغير (k) فيتغير الدور ويمكن حساب ثابت الفتل من العلاقة (($(k = \omega_0^2.I_\Delta)$

(((ملاحظة))) :

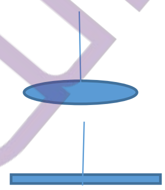
$$(\theta^2)`_t = 2.\theta.(\theta)`_t = 2.\theta.\omega$$

$$(\omega^2)`_t = 2.\omega.(\omega)`_t = 2.\omega.\alpha$$

نواس الفتل	
الحركة جيبية دورانية	
تابع المطال الزاوي	$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_o t + \varphi)$
تابع السرعة الزاوية	$\omega = -\omega_o \theta_{max}\sin(\omega_o t + \varphi)$
السرعة الزاوية العظمى طويلة	$\omega_{max} = \omega_o \theta_{max}$
تسارع زاوي بدلالة المطال الزاوي	$\alpha = -\omega_o^2 \theta$
الطاقة الكامنة المرونية	$E_P = \frac{1}{2} K\theta^2$
* الطاقة الحركية الدورانية	$E_k = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$ أو $E_K = E - E_P$
الطاقة الميكانيكية	$E = \frac{1}{2} K\theta_{max}^2$
الدور	$T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$
النبض الخاص للحركة	$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$
ثابت فتل السلك	$k = \omega_0^2 . I_\Delta$ واحدته $m.N.rad^{-1}$
عزم الإرجاع	$\bar{\Gamma}_{\bar{\eta}/\Delta} = -k.\bar{\theta}$

① ساق متجانسة (أو قرص) كتلتها m معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي : $I_\Delta = I_{\Delta/c}$ حيث

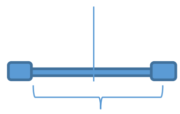
لقرص $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} mr^2$ ، $I_{\Delta/c} = \frac{1}{12} ml^2$ لساق



② ساق متجانسة كتلتها (m) معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي وتحمل كتلتين $(m_1 = m_2)$ على بعد $(r_1 = r_2)$ من المنتصف : $I_\Delta = I_{\Delta/c} + I_{\Delta/كتلتين}$ حيث

$I_{\Delta/كتلتين} = 2m_1 r_1^2$

وعندما تكون الكتلتين بطرفي الساق: $r_1 = r_2 = \frac{l}{2}$



③ ساق مهملة الكتلة معلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي وتحمل كتلتين $(m_1 = m_2)$ على بعد $(r_1 = r_2)$ من المنتصف:

$(I_{\Delta/الساق} = 0)$ ،

$\left(I_\Delta = I_{\Delta/كتلتين} = 2m_1 r_1^2\right)$

④ قرص كتلته (m) مثبت عليه ساق كتلتها (M) تحمل في طرفيها كتلتين $(m_1 = m_2)$ البعد بينهما $(2r_1)$

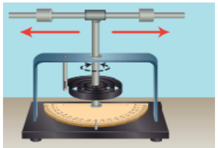
$$I_\Delta = I_{\Delta/قرص} + I_{\Delta/ساق} + I_{\Delta/كتلتين}$$

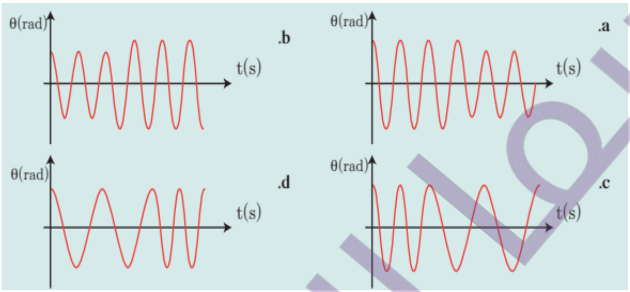
$$I_\Delta = \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{12} Ml^2 + 2m_1 r_1^2$$

اختبر نفسي :

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1- يهتز نواس فتل بدور خاص T_0 ، في لحظة ما أثناء حركته ابتعدت الكتلتان عن محور الدوران بالمقدار نفسه كما هو موضح فالرسم البياني الذي يعبّر عن تغير المطال الزاوي مع الزمن في هذه الحالة هو:

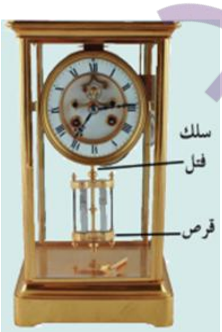




الجواب هو : C

الحل : عند ابتعاد الكتل يزداد I_Δ فيزداد الدور

2- ميقاتية تعتمد في عملها على نواس فتل كما في الشكل المجاور، ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها، قدم الطلاب مقترحاتهم، فإن الاقتراح الصحيح هو:

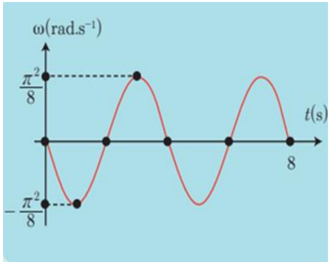


① :زيادة طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.
② :زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره.
③ :إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.
④ :زيادة قطر القرص مع المحافظة على كتلته.

الحل:

يجب إنقاص الدور لتصحيح التأخير لذلك ننقص طول السلك.

3- يمثل الرسم البياني المجاور تغيرات السرعة الزاوية لنواس فتل بتغير الزمن، فإن تابع السرعة الزاوية الذي يمثله هذا المنحني **هو:**



a. $\bar{\omega} = \frac{\pi^2}{8} sin3\pi t$

b. $\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8} sin2\pi t$

c. $\bar{\omega} = +\frac{\pi^2}{8} sin\frac{\pi}{2}t$

d. $\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8} sin\frac{\pi}{2}t$

الجواب هو: d

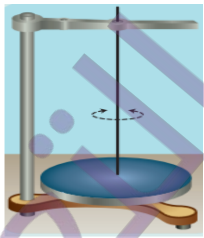
التعليل: **من الخط البياني :** $2T_0 = 8$

$$\Rightarrow T_0 = 4(s) \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}$$

من الخط البياني:

$$\omega_0\theta_{max} = \frac{\pi^2}{8} rad.s^{-1}$$

ثالثاً: حل المسائل الآتية:



(وفي جميع المسائل $\pi^2 = 10$, $4\pi = 12.5$, $g = 10m.s^{-2}$)

المسألة الأولى: يتألف نواس فتل من قرص متجانس كتلته $m = 2kg$ نصف قطره $r = 4cm$ ، معلق من مركزه إلى سلك فتل ثابت فتله $k = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ ، ندير القرص في مستوٍ أفقي زاوية $\theta = +\frac{\pi}{4} rad$ عن وضع توازنه ، ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$ المطلوب:

١. احسب الدور الخاص للنواس.

٢. استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.

٣. احسب الطاقة الكامنة في وضع مطاله الزاوي $\theta = \frac{\pi}{8} rad$ ، ثم احسب الطاقة الحركية عندئذٍ.

(عزم عطالة قرص حول محور عمودي على مستويه ومار من مركزه $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2}mr^2$)

الحل:

$$K = 16 \times 10^{-3} mNrad^{-1}$$

$$m = 2kg \quad , \quad r = 4cm = 4 \times 10^{-2}m$$

شروط البدء:
$$\left.\begin{array}{c} t = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{4} = \theta_{max} \\ \omega = 0 \end{array}\right\}$$

1) حساب دور الخاص:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

نحسب I_Δ :

$$I_{C/\Delta} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 16 \times 10^{-4}$$

$$= 16 \times 10^{-4} kgm^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-4}}{16\times10^{-3}}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2(s)$$

2) $\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi rad.s^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{4} rad \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_{max} = \theta_{max} cos\varphi$$

$$cos\varphi = 1$$

$$\boldsymbol{\varphi = 0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t)} rad$$

طلب إضافي: احسب السرعة الزاوية للقرص في لحظة المرور الأول في مركز الاهتزاز.

$$\omega = (\theta)'_t = -\frac{\pi}{4}(\pi)\sin(\pi t)$$

$$\boldsymbol{\omega = -\frac{10}{4}\sin(\pi t)}$$

نحسب لحظة المرور في مركز الاهتزاز:

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos(\pi t) = 0$$

$$\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

أول مرور $\Rightarrow k = 0 \Rightarrow \pi t = \frac{\pi}{2}$

$$t = \frac{1}{2}(s)$$

نعوض في تابع السرعة:

$$\Rightarrow \omega = -\frac{10}{4}\sin(\pi \times \frac{1}{2})$$

$$\omega = -\frac{10}{4} rad.s^{-1}$$

مرور $\Rightarrow k = 1 \Rightarrow \pi t = \frac{3\pi}{2}$

3) حساب الطاقة الكامنة: $\theta = \frac{\pi}{8} rad$

$$E_P = \frac{1}{2}k\theta^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 10^{-3} \times \frac{\pi^2}{64}$$

$$E_P = \frac{1}{8} \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

وطاقته الحركية عندئذ:

$$E_K = E - E_P$$

نحسب E:

$$E = \frac{1}{2} k\theta_{max}^2$$

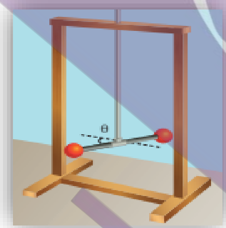
$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 10^{-3} \times \frac{\pi^2}{16}$$

$$E = \frac{1}{2} \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

$$\Rightarrow E_K = \frac{1}{2} \times 10^{-2} - \frac{1}{8} \times 10^{-2}$$

$$E_K = \frac{3}{8} \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

المسألة الثانية:



ساق مهملة الكتلة طولها L ، تثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية 125g ، ونعلق لجملة من منتصفها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ لتؤلف الجملة نواس فتل، نزيح الساق عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3}\, rad$ وتترك دون سرعة ابتدائية لحظة بدء الزمن، فتهتز بحركة جيبية دورانية، دورها الخاص $2.5\ S$. المطلوب:

١. استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.

٢. احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الأول بوضع التوازن.

٣. احسب طول الساق.

الحل:

طول الساق L , الساق مهملة الكتلة

$$m_1 = m_2 = 125g = 125 \times 10^{-3} kg$$

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{3} rad \\ \omega = 0 \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} T_0 = 2.5(s) \\ k = 16 \times 10^{-3} rads^{-1} \end{matrix}$$

1) $$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5} rad.s^{-1}$$

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ \theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta_{max} = \theta_{max} cos\varphi$$

$$cos\varphi = 1 \quad \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = 0}$$

نعوض في الشكل العام:

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

2) $$\omega = (\theta)'_t = -\frac{4\pi}{5}\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

$$\omega = -\frac{40}{15} \sin\left(\frac{4\pi}{5} t\right)$$

نحسب لحظة المرور في مركز الاهتزاز:

$$\theta = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{4\pi}{5} t\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{5} t\right) = 0$$

$$\frac{4\pi}{5} t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

مرور أول $K = 0 \Rightarrow \frac{4\pi}{5} t = \frac{\pi}{2}$

$$t = \frac{5}{8} (s)$$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{40}{15} \sin\left(\frac{4\pi}{5} \frac{5}{8}\right)$$

$$\omega = -\frac{40}{15} rad.s^{-1} = -\frac{8}{3} rad.s^{-1}$$

3) حساب طول الساق:

نحسب $I_{جملة/\Delta}$:

$$I_{جملة/\Delta} = I_{ساق} + 2I_{m_1/\Delta}$$

$$= 0 + 2m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= 2m_1 \frac{L^2}{4} = m_1 \frac{L^2}{2}$$

$$I_{جملة/\Delta} = m_1 \frac{L^2}{2}$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

$$\left.\begin{matrix} T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 \frac{L^2}{2}}{K}} \\ T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m_1 \frac{L^2}{2}}{K} \end{matrix}\right]$$

$$T_0^2 = \frac{2\pi^2 m_1 L^2}{K}$$

$$L^2 = \frac{K\,T_0^2}{2\pi^2 m_1}$$

$$L = \sqrt{\frac{K\,T_0^2}{2\pi^2 m_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{16\times10^{-3}\times 6.25}{2\pi^2\times 125\times10^{-3}}} = 2\times10^{-1}m$$

$$\boldsymbol{L = 2\times10^{-1}m}$$

المسألة الثالثة:

ساق أفقية متجانسة طولها $L = ab = 40cm$ معلقة بسلك فتل شاقولي يمر من منتصفها.

a. ندير الساق في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = 60^\circ$ انطلاقاً من وضع توازنها وتتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة t = 0 فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 1s$ فإذا علمت أن عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك الفتل

b. $I_{\Delta/c} = 2\times10^{-3}kg.m^2$

المطلوب:

١. استنتج التابع الزمني الزاوي انطلاقاً من شكله العام.

٢. احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن.

٣. احسب قيمة التسارع الزاوي للساق عندما تصنع الزاوية (-30°) مع وضع توازنها.

b. نثبت بالطرفين a, b كتلتين نقطيتين $m_1 = m_2 = 75g$ استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للجملة المهتزة، ثم احسب قيمة ثابت فتل السلك.

C. نقسم سلك الفتل قسمين متساويين، ونعلق الساق بعدئذٍ بنصفي السلك معاً ؛ أحدهما من الأعلى، والآخر من الأسفل ومن منتصفها، ونثبت طرف هذا السلك من الأسفل بحيث يكون شاقولياً. استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للساق (دون وجود كتل نقطية).

افترض $\pi^2 = 10$

الحل:

$$L = 40cm = 4\times10^{-1}m$$

$$I_{C/\Delta} = 2\times10^{-3}kgm^2$$

شروط البدء $\left.\begin{matrix} t = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{3}rad \\ \omega = 0 \end{matrix}\right\}$, $T_0 = 1(s)$

(A

1. $$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$$

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ \theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$$

$$\theta_{max} = \theta_{max}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1 \implies \varphi = 0$$

$$\implies \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}\cos(2\pi t)}\,rad$$

2. حساب السرعة الزاوية:

$$\omega = (\theta)'_t = -2\pi\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(2\pi t)$$

$$\boldsymbol{\omega = -\frac{20}{3}\sin(2\pi t)}$$

- حساب لحظة المرور الثاني:

$$\theta = 0 \implies \cos(2\pi t) = 0$$

$$2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi K$$

$$K = 1 \implies 2\pi t = \frac{3\pi}{2}$$

$$t = \frac{3}{4}(s)$$

نعوض في تابع السرعة:

$$\omega = -\frac{20}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\omega = +\frac{20}{3}rad.s^{-1}$$

3. $$\boldsymbol{\propto = -\omega_0^2\theta}$$

$$\theta = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}rad$$

$$\propto = -(2\pi)^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\propto = +\frac{40\,\pi}{6}rad.s^{-2}$$

$$\propto = +\frac{20\,\pi}{3}rad.s^{-2}$$

(B

$$m_1 = m_2 = 75g$$
$$= 75\times10^{-3}kg$$

قبل وضع الكتل: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{ساق/\Delta}}{K}}$

بعد وضع الكتل: $\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{جملة/\Delta}}{K}}$

$$\frac{T_0}{\grave{T}_0} = \sqrt{\frac{I_{ساق/\Delta}}{I_{جملة/\Delta}}}$$

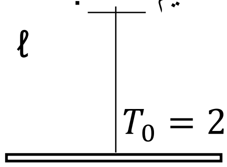
نحسب $I_{جملة/\Delta}$:

$$I_{جملة/\Delta} = I_{ساق/\Delta} + 2m_1(\frac{L}{2})^2$$
$$= 2\times10^{-3} + 2\times75\times10^{-3}(2\times10^{-1})^2$$
$$= 2\times10^{-3} + 600\times10^{-5}$$
$$= 2\times10^{-3} + 6\times10^{-3}$$
$$I_{جملة/\Delta} = 8\times10^{-3}kgm^2$$
$$\frac{T_0}{\grave{T}_0} = \sqrt{\frac{2\times10^{-3}}{8\times10^{-3}}} = \frac{1}{2}$$
$$\grave{T}_0 = 2T_0$$
$$\grave{T}_0 = 2\times1 = 2(s)$$

- حساب K :

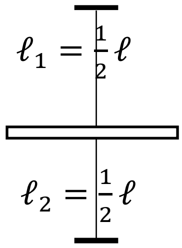
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{ساق/\Delta}}{K}}$$
$$1 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-3}}{K}} \Longrightarrow K = 8\times10^{-2}m.N.rad^{-1}$$

C) قبل تقسيم السلك:



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

بعد:



$$\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_1+K_2}}$$
$$\ell_1 = \frac{1}{2}\ell \Longrightarrow K_1 = 2K$$
$$\ell_2 = \frac{1}{2}\ell \Longrightarrow K_2 = 2K$$
$$\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{2K+2K}}$$
$$\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{4K}}$$
$$\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}\times\frac{1}{2}$$
$$\grave{T}_0 = \frac{1}{2}T_0$$
$$\grave{T}_0 = \frac{1}{2}\times1 = \frac{1}{2}(s)$$

مسألة عامة (3)

تتألَّفُ ميقاتيّةٌ من قرص نحاسيٍّ كتلتُهُ $M_1 = 0.12\ kg$ نصفُ قطره $R = 0.05m$ مثبّتٌ عليه ساق كتلتُها $M_2 = 0.012\ kg$ طولُها $L = 0.1m$ تُحملُ الساق بكتلتين نقطيّتين كتلتاهما $m_1 = m_2 = 0.05\ kg$ تبعدان عن بعضهما البعض مسافةً قدرُها $2r = 0.04m$ يمكن تغييرُها بوساطة بزّال، نعلّق جملة القرص وما عليه من مركز عطالتها إلى سلكِ فتلٍ شاقوليٍّ ثابتُ فتله $k = 8\times10^{-4}\ m.N.rad^{-1}$

المطلوب:

1. احسب دورَ الميقاتيّة.
2. إذا أردنا للدَّور أنْ يزدادَ بمقدار $0.86s$ وذلك بزيادة البعد بين الكتلتين، فما البعدُ الجديدُ الذي يجبُ أنْ يصبحَ بينها؟ (عزم عطالة السّاق حول محور مار من مركز عطالته $I_1 = \frac{1}{2}M_1R^2$ وعزم عطالة الساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركزها $I_2 = \frac{1}{12}M_2L^2$ ، $\pi^2 \simeq 10$، $\pi = 3.14$

الحل:

$$\left.\begin{matrix}M_1 = 0.12kg\\ R = 0.05m\end{matrix}\right\} قرص$$
$$\left.\begin{matrix}M_2 = 00.12kg\\ L = 0.1m\end{matrix}\right\} ساق$$
$$m_1 = m_2 = 0.05kg$$
$$2r = 0.04 \Longrightarrow r_1 = r_2 = 0.02m$$
$$K = 8\times10^{-4}m.Nrad^{-1}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$
$$I_{جملة/\Delta} = I_{قرص} + I_{ساق/\Delta} + 2I_{\Delta/m_1}$$

$$= \frac{1}{2} M_1 r^2 + \frac{1}{12} M_2 L^2 + 2m_1 r_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.12 \times 25 \times 10^{-4} + \frac{1}{12} \times 0.012 \times 10^{-2}$$

$$+2 \times 0.05 \times 4 \times 10^{-4}$$

$$= 15 \times 10^{-5} + 10^{-5} + 4 \times 10^{-5}$$

$$= 20 \times 10^{-5} = 2 \times 10^{-4} kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\times10^{-4}}{8\times10^{-4}}}$$

$$2\pi \sqrt{\frac{1}{4}} = \pi(s)$$

2)

$$\grave{T}_0 = T_0 + 0.86$$

$$= 3.14 + 0.86$$

$$\grave{T}_0 = 4(s)$$

لكن:

$$\grave{T}_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{جملة}/\Delta}}{K}}$$

K بقي نفسه لأن السلك بقي نفسه عند زيادة البعد بين الكتل.

$$I_{\text{جملة}/\Delta} = I_{\text{قرص}/\Delta} + I_{\text{ساق}/\Delta} + 2I_{\Delta/m_1}$$

$$= 15 \times 10^{-5} + 10^{-5} + 2m_1 \grave{r}_1^2$$

$$= 15 \times 10^{-5} + 10^{-5} + 2 \times 5 \times 10^{-2} \grave{r}_1^2$$

$$I_{\text{جملة}/\Delta} = 16 \times 10^{-5} + 10^{-1} \grave{r}_1^2$$

نعوض في علاقة الدور فنجد:

$$4 = 2\pi \sqrt{\frac{16\times10^{-5} + 10^{-1}\grave{r}_1^2}{8\times10^{-4}}}$$

نربع:

$$16 = 4\pi^2 \frac{16\times10^{-5} + 10^{-1}\grave{r}^2}{8\times10^{-4}}$$

$$128 \times 10^{-4} = 64 \times 10^{-4} + 4\grave{r}^2$$

$$64 \times 10^{-4} = 4\grave{r}^2$$

$$\boldsymbol{2\grave{r} = 8 \times 10^{-2}\, m}$$

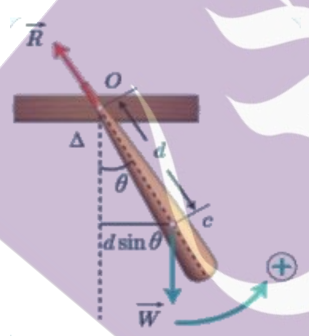
وهو البعد بين الكتلتين

النواس الثقلي المركب – ((مراجعة وملاحظات))

س ١- عرف النواس الثقلي المركب:

الجواب: كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم ثقله في مستو شاقولي حول محور دوران أفقي لا يمر من مركز عطالته، وعمودي على مستويه.

س ٢-نعلق جسماً "صلبا" كتلته (m) مركز عطالته (c) إلى محور دوران أفقي (Δ) مار من النقطة (o) من الجسم حيث البعد $(d = oc)$ ، نزيح الجسم عن موضع توازنه الشاقولي زاوية (θ) وتركه دون سرعة ابتدائية ليهتز في مستوي شاقولي ادرس حركة الجسم , وأثبت أن $(\theta)''_t = -\frac{mgd}{I_\Delta}\sin\theta$ ، ثم استنتج العلاقة المعبرة عن الدور من اجل السعات الزاوية الصغيرة:



جـ) القوى الخارجية المؤثرة :

$\vec{W}$: ثقل الجسم. $\vec{R}$:رد فعل محور الدوران على الجسم.

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني (نظرية التسارع الزاوي):

$$\sum \bar{\Gamma}_\Delta = I_\Delta.\bar{\alpha} \rightarrow$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_\Delta.\bar{\alpha}$$

وبإعتبار الجهة الموجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة نجد :

$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$ لأن حامل القوة يمر من محور الدوران Δ

$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} = -d.\sin\theta.W$ بالتعويض

$$-d.\sin\theta.W + 0 = I_\Delta.\bar{\alpha} \rightarrow$$

$$-m.g.d.\sin\theta = I_\Delta.(\bar{\theta})''_t$$

وبالتالي: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{m.g.d}{I_\Delta}\sin\theta$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تحتوي $\sin\theta$ فحلها ليس جيبيا"

ومن ذلك فالحركة اهتزازية غير توافقية .

أما من أجل السعات الزاوية الصغيرة $(\theta \le 0.24\ rad)$

تكون $\sin\theta \approx \theta$ تصبح المعادلة :

$(\bar{\theta})''_t = -\frac{m.g.d}{I_\Delta}.\bar{\theta}$ .....(١)

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلا جيبيا" من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

وللتحقق من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن :

$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تابع السرعةالزاوية

$\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\ \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تابع التسارع الزاوي

$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\bar{\theta}$ (٢)

بالمقارنة بين (١) و(٢) نجد : $\omega_0^2 = \frac{m.g.d}{I_\Delta}$

وبالتالي $\omega_0 = \sqrt{\frac{m.g.d}{I_\Delta}} > 0$ وهذا محقق لإن (m, g, d, I_Δ) مقادير موجبة فحركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية نبضها ω_0 ،

ولإستنتاج الدور : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

وبالتالي: $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{m.g.d}{I_\Delta}} \leftarrow$ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$

T_0 : دور النواس الثقلي الخاص بسعة صغيرة واحدته (S).

I_Δ : عزم عطالة الجسم الصلب حول محور الدوران واحدته $(kg.m^2)$.

d :بعد محور الدوران (o)عن مركز عطالة الجسم الصلب (c) واحدته (m).

ملاحظة: تصبح علاقة الدور من أجل السعات الكبيرة. : $(\theta_{max} > 0.24\,rad)$

$$T_0` \approx T_0\left(1 + \frac{\theta^2_{max}}{16}\right)$$

ملاحظات :

١- عندما يزداد الإرتفاع عن سطح الأرض تنقص قيمة الجاذبية وعندما تنقص قيمة الجاذبية يزداد الدور،

٢- عندما تؤخر الميقاتية يزداد الدور والعكس عندما تنقص قيمة الدور تقدم الميقاتية

٣- الطاقة الميكانيكية =الطاقة الكامنة +الطاقة الحركية

$$E = E_P + E_K$$

النواس الثقلي البسيط ((مراجعة وملاحظات))

س ١ ① عرف النواس الثقلي البسيط نظرياً و عملياً, ماذا يعني أن النواس الثقلي يدق الثانية.

② ثم استنتج العلاقة المعبرة عن دوره في حال السعات الصغيرة انطلاقاً من دور النواس الثقلي المركب.

③ ثم ماذا يطرأ على قيمة الدور عندما:

a- نزيد قيمة الكتلة. b- نجعل طول الخيط ربع ما كان عليه.

c- ما هي علاقة الدور للسعات الكبيرة.

الجواب: ①

نظريا": نقطة مادية تهتز تحت تأثير ثقلها على بعد ثابت (l) من محور دوران أفقي ثابت

عمليا": كرة صغيرة كتلتها (m) كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة لايمتط طوله (l) كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة

((نواس ثقلي يدق الثانية دوره $T_0 = 2\,s$)).

② دور النواس الثقلي المركب للسعات الصغيرة $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{m.g.d}}$

في النواس الثقلي: $I_\Delta = ml^2$ ، $(d = l)$

نعوض في علاقة الدور

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{m.g.l}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

③ a) الدور لا يتعلق بالكتلة b) عندما نجعل طول السلك ربع ما كان عليه

$T_0` = 2\pi\sqrt{\frac{l`}{g}}$ وأن $\left(l` = \frac{l}{4}\right)$

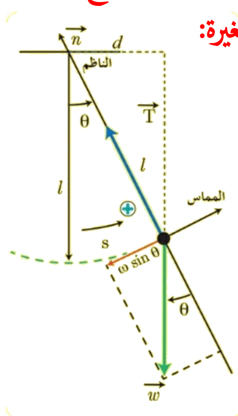
$$T_0` = 2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}}$$

$$T_0` = \frac{1}{2}\,T_0 \leftarrow T_0` = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.\frac{1}{2}$$

c) الدور في حال السعات الكبيرة $(\theta_{max} > 0.24\,rad)$

يعطى بالعلاقة: $T_0` \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$

س ٢ - ادرس تحريكيا" نواس ثقلي بسيط واستنتج العلاقة المعبرة عن دوره من اجل السعات الزاوية الصغيرة:



الجواب: ١- طريقة أولى((طريقة الكتاب)): القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

$\vec{w} = m\,\vec{g}$ ثقل الكرة. ، $\vec{T}$ توتر الخيط.

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني:

$$\sum \Gamma_\Delta = I_\Delta.\bar{\alpha} \to \Gamma_{\vec{W}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} = I_\Delta.\bar{\alpha}$$

نختار جهة موجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة:

$\Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0$ لإن حامل $\vec{T}$ يمر من محور الدوران

$$-mgl\sin\theta + 0 = ml^2.(\bar{\theta})_t^{``} \to -g\sin\theta + 0 = l.(\bar{\theta})_t^{``}$$

$$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}sin\theta$$

وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة: $\theta \le 0.24\,rad$

تكون $\sin\theta \approx \theta$

$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\bar{\theta}$ ....(١)

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$\bar{\omega} = (\bar{\theta})`_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تابع السرعة الزاوية

$\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\ \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تابع التسارع الزاوي

$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta}$ ......(٢)

بالمطابقة بين (1) و(٢) نجد: $\omega_0^2 = \frac{g}{l} \leftarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$

و هذا محقق لأن g, l مقداران موجبان، فحركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية نبضها الخاص ω_0. ولإستنتاج علاقة الدور الخاص للاهتزاز:

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ وبما أن $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \leftarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Longrightarrow$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في السعات الزاوية الصغيرة. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

حيث (l) طول الخيط ، (g) تسارع الجاذبية

٢- طريقة ثانية: القوى الخارجية المؤثرة في الكرة: $\vec{w} = m\,\vec{g}$ ثقل الكرة، $\vec{T}$ توتر الخيط.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن: $\sum \vec{F} = m.\vec{a}$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\,\vec{a}$$

بالإسقاط على المماس الموجه بجهة إزاحة الكرة:

$$-m\,g\sin\theta + 0 = m\,a_t$$

$- g\sin\theta = a_t$

لكن $\bar{a}_t = l.\bar{\alpha} = l.(\bar{\theta})''_t \rightarrow - g\sin\theta = l.(\bar{\theta})''_t$

وبالتالي: $(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l} sin\theta$

وفي حالة السعات الزاوية الصغيرة: $\theta \le 0.24\ rad$

تكون $\sin\theta \approx \theta$

$(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}\bar{\theta}$ .... (١)

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل: $\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

للتحقق من صحة الحل نشتق تابع المطال مرتين بالنسبة للزمن نجد:

$\bar{\omega} = (\bar{\theta})'_t = -\omega_0.\theta_{max}.\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تابع السرعة الزاوية

$\bar{\alpha} = (\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2.\ \theta_{max}.\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تابع التسارع الزاوي

$(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta}$ ......(٢)

بالمطابقة بين (1) و(٢) نجد: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > \omega_0^2 = \frac{g}{l}$

$\leftarrow 0$

و هذا محقق لأن g,l مقداران موجبان، فحركة النواس الثقلي البسيط من أجل السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية نبضها الخاص ω_0. ولإستنتاج علاقة الدور الخاص للاهتزاز:

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ← وبما أن $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ← $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط في السعات الزاوية الصغيرة. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

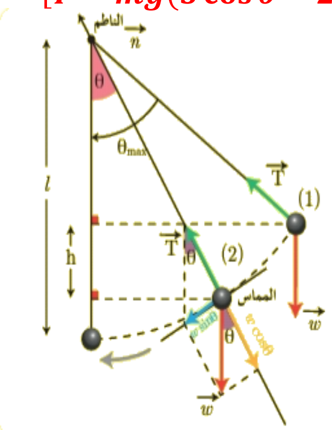
حيث (l) طول الخيط، (g) تسارع الجاذبية.

س ٣- نواس ثقلي بسيط مؤلف من كرة صغيرة كتلتها (m) معلقة بخيط لايمتط طوله (ℓ) نزيح كرة النواس بحيث يصنع الخيط مع الشاقول زاوية (θ_{max}) و نتركها تهتز دون سرعة ابتدائية، المطلوب:

①- استنتج العلاقة المعبرة عن السرعة الخطية للكرة عندما يصنع الخيط مع الشاقول زاوية $(\theta_{max} > \theta)$

②- أثبت أن توتر الخيط عندما يصنع مع الشاقول زاوية $(\theta max > \theta)$ يعطى بالعلاقة:

$$[T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})]$$



الجواب: ① :لإيجاد العلاقة المحددة لسرعة الكرة في الوضع (٢) القوى الخارجية المؤثرة:

ثقل الكرة $\vec{W}$ ، توتر الخيط $\vec{T}$.

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

الأول: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ_{max}.

الثاني: حيث يصنع الخيط مع الشاقول الزاوية θ .

$\overline{\Delta E_K} = \sum \bar{W}_{\vec{F}(1\rightarrow 2)} \rightarrow E_{K2} - E_{K1} = \bar{W}_{\vec{W}} + \bar{W}_{\vec{T}}$

$\bar{W}_{\vec{W}} = m\,g\,h$

$E_{K_1} = 0$ النواس ترك دون سرعة ابتدائية ، $\bar{W}_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = m\,g\,h + 0$

وبملاحظة الشكل نجد: $h = l\cos\theta - l\cos\theta_{max} \rightarrow h = l\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

نعوض: $\frac{1}{2}mv^2 = m\,g\,l(\cos\theta - \cos\theta_{max})$

$v^2 = 2\,g\,l\,(\cos\theta - \cos\theta_{max}) \rightarrow$

$v = \sqrt{2\,g\,l\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$

حالة خاصة: عند المرور الشاقول $\theta = 0$ وبالتالي $\cos\theta = 1$

تصبح العلاقة الشكل: $v = \sqrt{2\,g\,l\,(1 - \cos\theta_{max})}$

②- لإيجاد العلاقة المحددة لقوة توتر الخيط في الوضع (2) نطبق العلاقة الأساسية في التحريك: $\sum\vec{F} = m\,\vec{a}$

$\vec{W} + \vec{T} = m\,\vec{a}$

بالإسقاط على محور ينطبق على حامل $\vec{T}$ وجهته (محور الناظم):

$-w\cos\theta + T = m.a_c$ ، وبما أن $a_c = \frac{v^2}{l}$

$T = m\frac{v^2}{l} + m\,g\,\cos\theta \rightarrow T = 2\,m\,g\,(\cos\theta - \cos\theta_{max}) + m\,g\,\cos\theta$

$T = m\,g\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$

حالة خاصة: عند المرور الشاقول $\theta = 0$: $T = m\,g\,(3 - 2\cos\theta_{max})$

ملاحظة هامة جدا": ① - توتر الخيط يكون أعظمي عند المرور بوضع التوازن (وضع الشاقول عندما $\theta = 0$)

② -توتر الخيط يكون أصغري عند المطالين الأعظميين (عندما $\theta = \theta_{max}$

ملاحظة :

الطاقة الميكانيكية في النواس الثقلي البسيط $E = E_P + E_K$

حيث الطاقة الكامنة الثقالية : $E_p = m.g.h$ ، الطاقة الحركية الإنسحابية: $E_k = \frac{1}{2}m\,v^2$

((ملاحظات لحل مسائل النواس الثقلي المركب))

١- حساب الدور للسعات الصغيرة

٢- : $T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta(\text{جملة})}}{mgd}}$

أما في حال السعات الكبيرة حيث $(\theta_{max} > 0.24\,rad)$:

$$\acute{T}_O \approx T_O\left(1+\frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$$

٣- حساب طول النواس البسيط الموافق لنواس مركب:

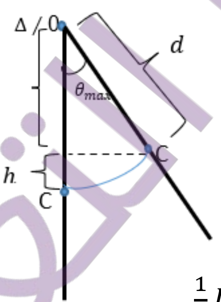
$$T_{O\,\text{بسيط}} = T_{O\,\text{مركب}} \leftarrow 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = T_{O\,(\text{مركب(عدديا}))}$$

٤- حساب السرعة الزاوية للنواس الثقلي المركب لحظة المرور بالشاقول (بوضع التوازن) بفرض انه ترك دون سرعة ابتدائية عندما كان يصنع مع الشاقول زاوية $(\theta = \theta_{max})$

الحل: نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين :

الأول : لحظة ترك النواس دون سرعة ابتدائية $(\theta = \theta_{max})$

الثاني: لحظة المرور بوضع الشاقول $(\theta = 0)$



$$\Delta E_K = \sum \overline{W}_{\vec{F}(1\to 2)}$$

$$E_{K2} - E_{K1} = \overline{W}_{\vec{W}} + \overline{W}_{\vec{R}}$$

$E_{K1} = 0$ ترك دون سرعة ابتدائية

$\overline{W}_{\vec{R}} = 0$ لايرافقه انتقال لنقطة تأثيره

$$\frac{1}{2} I_{\Delta\,\text{جملة}}\,\omega^2 - 0 = mgh + 0$$

حيث $h = d(1-\cos\theta_{max})$

$$\frac{1}{2} I_{\Delta\,\text{جملة}}\,\omega^2 = mgd(1-\cos\theta_{max})$$

$$\omega^2 = \frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_{\Delta(\text{جملة})}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_{\Delta(\text{جملة})}}}$$

ولحساب السعة الزاوية $\cos\theta_{max} = 1 - \frac{I_\Delta \omega^2}{2mgd}$

ولحساب السرعة الخطية :

١) لمركز العطالة : $v_c = \omega . d$

٢) لكتلة نقطية : $v = \omega . r$

حيث (r) هو بعد الكتلة النقطية عن محور الدوران

وفي حال زاويتين $(\theta < \theta_{max})$

$$h = d(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

ملاحظة هامة جدا" :

في حال السعات الزاوية الصغيرة $(\theta_{max} \leq 0.24\,rad)$ تكون الحركة جيبية دورانية يمكن حساب السرعة الزاوية من التابع :

$$\omega = -\omega_o \theta_{max} \sin(\omega_o t + \varphi)$$

و عند الشاقول تكون السرعة الزاوية عظمى طويلة:

$$(\omega_{max} = \omega_o \theta_{max})$$

بعض الحالات لحساب $(I_{\Delta(\text{جملة})}, m_{\text{جملة}}, d)$

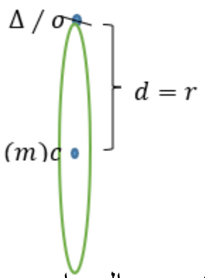
١) ساق متجانسة كتلتها (m) أو (قرص متجانس)

بحيث محور الدوران (o) لايمر من المنتصف:

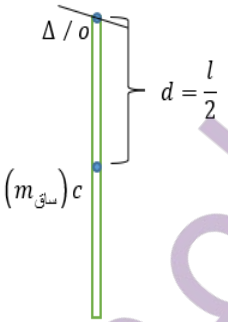
(هايغنز) $I_{\Delta/O} = I_{\Delta/C} + md^2$

(d) من نص السؤال مثلا" :

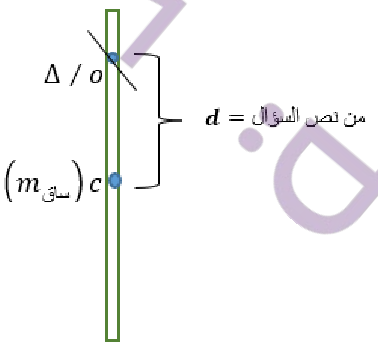
أ)) قرص متجانس نصف قطره (r) محور الدوران يمر بنقطة من محيطه$(d = r)$



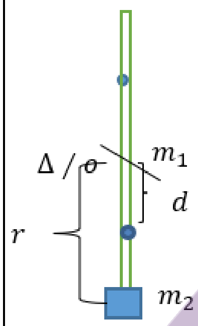
ب)) ساق متجانسة طولها (l) محور الدوران يمر من طرفها العلوي $\left(d = \frac{l}{2}\right)$



ج))ساق متجانسة محور الدوران يمر من نقطة تبعد مسافة (تذكر بنص السؤال) عن مركز العطالة نأخذ هذه المسافة



د)) ساق (او قرص) متجانسة كتلتها (m_1) محور الدوران (o) يمر من المنتصف وتحمل كتلة (m_2) على بعد (r) من محور الدوران



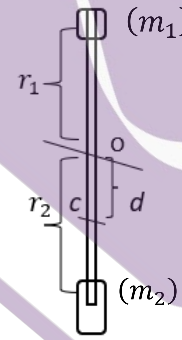
$$I_{\Delta/o} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta(\text{كتلة})}$$

حيث $I_{\Delta(\text{كتلة})} = m_2 r^2$

$$m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2$$

$$d = \frac{m_2 r}{m_2 + m_1}$$

٣ - ساق مهملة الكتلة وتحمل كتلتين (m_1, m_2) على بعد (r_1, r_2) من محور الدوران الواقع بين الكتلتين :



$$I_{\Delta/o} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\text{كتلتين}}$$

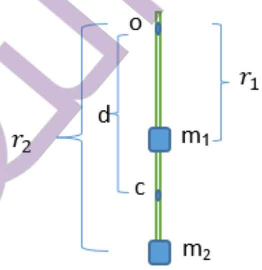
لأن الساق مهملة الكتلة $I_{\Delta/\text{ساق}} = 0$

$$I_{\Delta/o} = 0 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$m_{\text{جملة}} = m_1 + m_2$$

$$d = \frac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 + m_2}$$

ملاحظة : إذا كان محور الدوران



$$d = \frac{m_2 r_2 + m_1 r_1}{m_1 + m_2}$$

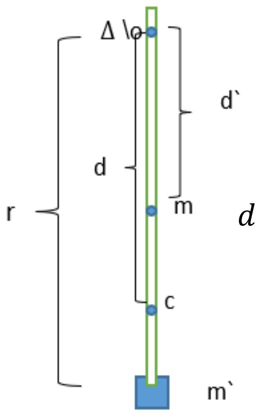
٤- ساق متجانسة كتلتها m محور الدوران يبعد عن المنتصف مسافة $(\grave{d})$ وتحمل كتلة $(\grave{m})$ على بعد (r) من محور الدوران

$$I_{\Delta/o\,\text{للجملة}} = I_{\Delta/o\,\text{للساق}} + I_{\Delta/o\,\text{للكتلة}}$$

حيث وحسب هايغنز

$$I_{\Delta/o\,\text{للساق}} = I_{\Delta/c} + m\grave{d}^2$$

وعزم عطالة الكتلة $I_{\Delta/o\,\text{للكتلة}} = \grave{m}.r^2$



$$d = \frac{m.d` + m`.r}{m + m`}$$

ملاحظات :

لقرص $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2} m r^2$

لساق $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} m l^2$

ملاحظة : لحساب d :

$d = \frac{m_1.\bar{r}_1 + m_2.\bar{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}$ حيث r بعد الكتلة عن محور الدوران ويكون موجب عندما تكون الكتلة تحت محور الدوران وسالبة عندما تكون الكتلة فوق المحور

بعض الملاحظات للنواس الثقلي البسيط

النبض الخاص : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

الدور للسعات الصغيرة : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ وللسعات الكبيرة: $\mathbf{T_0` \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)}$

ملاحظة: الدور للسعات الصغيرة لايتعلق بكتلة الكرة المعلقة بالخيط

ملاحظة : نواس يدق الثانية دوره $(2\ s)$

حساب السرعة الخطية للكرة من نظرية الطاقة الحركية: $v = \sqrt{2\,g\,l\,(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$

وعند المرور بالشاقول :

$$v = \sqrt{2\,g\,l\,(1 - \cos\theta_{max})}$$

قوة التوتر عندما يصنع الخيط مع الشاقول زاوية θ:

$$T = m\,g\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})$$

وعند الشاقول :

$$T = m\,g\,(3 - 2\cos\theta_{max})$$

ويمكن أن تكتب بالشكل: $T = m\left(\frac{v^2}{l} + g\right)$

ملاحظة : قوة التوتر عظمى عند المرور بالشاقول وصغرى في المطالين الأعظميين

حل المسائل الآتية:

(وفي جميع المسائل $g=$ $4\pi = 12.5$, $\pi^2 = 10$, $(10m.s^{-1}$

المسألة الأولى:

يتألف نواس ثقلي مركب من ساق شاقولية متجانسة كتلتها M=0.5 Kg طولها1.5m يمكنها أن تنوس حول محور أفقي مار من طرفها العلوي ومثبت عليها كتلة نقطية $\acute{m} = 0.5kg$ على بُعد 1m من هذا الطرف. المطلوب:

1. احسب دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة.
2. نزيح جملة النواس عن موضع توازنه الشاقولي بزاوية $\frac{\pi}{2}rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية. احسب الطاقة الحركية للنواس لحظة مروره بالشاقول ثم احسب السرعة الخطية للكتلة $\acute{m}$ عندئذ. عزم عطالة ساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها

$$I_{\Delta/c} = \frac{1}{12}ML^2$$

$$L = \frac{3}{2}m$$

$$M = \frac{1}{2}kg$$

$$\grave{m} = \frac{1}{2}kg$$

$$r_{\grave{m}} = 1m$$

الحل:

1)
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{M_{جملة}gd}}$$

حساب $M_{جملة}$:

$$M_{جملة} = M + \grave{m} = 1kg$$

حساب $I_{\Delta/جملة}$:

$$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/ساق} + I_{\Delta/\grave{m}}$$

حيث:

$$I_{\Delta/ساق} = \frac{1}{12}ML^2 + M(\frac{L}{2})^2$$

$$I_{\Delta/ساق} = \frac{1}{3}ML^2$$

ومنه:

$$I_{\Delta/جملة} = \frac{1}{3}ML^2 + \grave{m}r^2$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{9}{4} + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{7}{8}kg.m^2$$

حساب d:

$$d = \frac{M\left(\frac{L}{2}\right) + \grave{m}(r)}{M + \grave{m}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times 1}{1}$$

$$d = \frac{7}{8}m$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1\times10\times\frac{7}{8}}}$$

$$T_0 = 2(s)$$

2) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعتين:

① $E_{K_1} = 0$, $\theta_1 = \theta_{max}$

② عند المرور , $\theta_2 = 0$ بالشاقول

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{R}}$$

$$E_K - 0 = M_{جملة}gh + 0$$

حيث:

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$E_K = M_{جملة}gd(1 - cos\theta_{max})$$

$$E_K = 1\times 10\times\frac{7}{8}(1-0)$$

$$E_K = \frac{70}{8}J$$

حساب السرعة الخطية لـ $\grave{m}$:

$$v_{\grave{m}} = \omega.r_{\grave{m}}$$

نحسب ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,E_K}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2\times\frac{70}{8}}{\frac{7}{8}}} = \sqrt{20}rad.s^{-1}$$

$$v_{\grave{m}} = \sqrt{20}\times 1 = \sqrt{20}\,m.s^{-1}$$

$$v_{m`} = 2\sqrt{5}m.s^{-1}$$

المسألة الرابعة:

ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها $L = 1m$ ، نثبت في منتصفها كتلة نقطية $m_1 = 0.4kg$ ونثبت في طرفها السفلي كتلة نقطية $m_2 = 0.2kg$ لتؤلف الجملة نواساً ثقلياً مركباً يمكنه أن ينوس في مستوٍ شاقولي حول محور أفقي مار من الطرف العلوي للساق.

المطلوب:

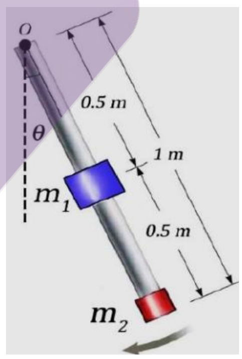
١. احسب دور نوساتها صغيرة السعة.

٢. نزيح الجملة عن موضع توازنها بزاوية $\theta_{max} > 0.24rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الخطية لمركز عطالة جملة النواس لحظة مرورها بالشاقول $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} m.s^{-1}$ المطلوب:

a. احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2 لحظة المرور بالشاقول.

b. استنتج قيمة الزاوية θ_{max}

الحل:



$$L = 1m$$
$$m_1 = 0.4kg$$
$$m_2 = 0.2kg$$

$$\boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}}$$

حساب $M_{\text{جملة}}$:

$$M_{\Delta/\text{جملة}} = m + \grave{m}$$
$$= 0.4 + 0.2 = 0.6kg$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$
$$= 0 + m_1(\tfrac{L}{2})^2 + m_2(L)^2$$
$$= 0.4(\tfrac{1}{2})^2 + 0.2(1)^2$$
$$= 0.1 + 0.2 = 0.3kg.m^2$$

$$\boldsymbol{d = \frac{m_1\left(\frac{L}{2}\right) + m_2(L)}{m_1 + m_2}}$$
$$= \frac{0.4 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 0.2(1)}{0.6} = \frac{0.4}{0.6}$$
$$d = \frac{2}{3}m$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{0.6 \times 10 \times \frac{2}{3}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\times10}} = 2\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$T_0 = \sqrt{3}\ (s)$$

(2

$$\theta_{max} > 0.24rad$$
$$v_C = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} m.s^{-1}$$

حساب السرعة الخطية لـ m_2 :

$$v_{m_2} = \omega.L$$

نحسب ω :

$$v_C = \omega.d \implies \omega = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} rad.s^{-1}$$

نعوض:

$$\implies v_{m_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times 1$$
$$v_{m_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} m.s^{-1}$$

استنتاج θ_{max} :

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعتين:

$$E_{K_1} = 0 \quad , \quad \theta_1 = \theta_{max} \quad ①$$
$$\theta_2 = 0 \quad ②$$

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec{F}}$$
$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{R}}$$
$$\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 - 0 = Mgh + 0$$

حيث:

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 = Mgd(1 - cos\theta_{max})$$

$$1 - cos\theta_{max} = \frac{\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2}{Mgh}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 0.3 \times \frac{4\pi^2}{3}}{0.6 \times 10 \times \frac{2}{3}}$$

$$1 - cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \implies$$
$$cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \implies$$

$$\boldsymbol{\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad}$$

المسألة الخامسة:

يتألف نواس ثقلي من ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها L تحمل في كل من طرفيها كتلة نقطية $\grave{m}$ نعلق الجملة بمحور دوران أفقي يبعد $\frac{L}{4}$ عن طرف الساق العلوي نزيح الجملة عن وضع توازنها الشاقولي $\frac{1}{2\pi}rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة t=0 فتهتز بدور خاص $T = 2.5(s)$

والمطلوب:

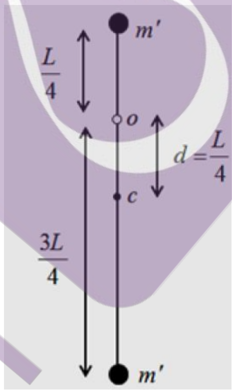
1- التابع الزمني للمطال الزاوي لحركة هذا النواس انطلاقاً من شكله العام.

٢-احسب قيمة السرعة الزاوية العظمى للحركة الطويلة.

٣ -استنتج بالرموز العلاقة المحدد لطول الساق ثم احسب قيمته.

4- لنفرض أنه في إحدى النوسات انفصلت الكتلة السفلية عن الساق. استنتج الدور الخاص الجديد للجملة.

الحل:



طول الساق L

في طرفيها كتلتان $\grave{m}$ على بعد $r_1 = \frac{L}{4}$، $r_2 = \frac{3L}{4}$

$$\theta_{max} = \frac{1}{2\pi}rad$$
$$T_0 = 2.5(s)$$

c

1) التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5}rad s^{-1}$$
$$\left.\begin{aligned} t &= 0 \\ \theta &= \theta_{max} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_{max} = \theta_{max}\cos\varphi$$
$$\Rightarrow \cos\varphi = 1$$
$$\varphi = 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right) rad}$$

2) السرعة الزاوية العظمى:

$$\omega_{max} = |\omega_0 \theta_{max}|$$
$$= \frac{4\pi}{5} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{2}{5} = 0.4 rad.s^{-1}$$

3) حساب طول الساق:

من علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}$$
$$\boldsymbol{I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\text{ساق}} + I_{\Delta/\grave{m}} + I_{\Delta/\grave{m}}}$$
$$= 0 + \grave{m}\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \grave{m}\left(\frac{3L}{4}\right)^2$$
$$= \frac{\grave{m}L^2}{16} + \frac{9\grave{m}L^2}{16}$$
$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{10\grave{m}L^2}{16}$$
$$\boldsymbol{I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{5\grave{m}L^2}{8}}$$
$$\left[d = \frac{m`\times\left(\frac{3L}{4}\right)^2 - m`\times\left(\frac{L}{4}\right)^2}{2m`}\right]$$
$$\left[d = \frac{L}{4}\right]$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5\grave{m}L^2}{8}}{2\grave{m}(g)\frac{L}{4}}}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{5L}{4g}}$$
$$T_0^2 = 4\pi^2\frac{5L}{4\times 10}$$
$$T_0^2 = 5L \Rightarrow \boldsymbol{L = \frac{T_0^2}{5}}$$
$$L = \frac{6.25}{5}$$
$$\boldsymbol{L = 1.25m}$$

(4

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}$$
$$\boldsymbol{d = \frac{L}{4}}$$
$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\text{ساق}} + I_{\Delta/\grave{m}}$$
$$= 0 + \grave{m}\left(\frac{L}{4}\right)^2$$
$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \grave{m}\left(\frac{L}{4}\right)^2$$
$$\boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\grave{m}\left(\frac{L}{4}\right)^2}{\grave{m}(10)\left(\frac{L}{4}\right)}}}$$
$$T_0 = 2\sqrt{\frac{L}{4}} = \sqrt{L} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

أو $\boldsymbol{T_0 = \sqrt{1.25}\,(s)}$

المسألة $\frac{6}{271}$:

يتألف نواس ثقلي مركب من قرص متجانس كتلته m نصف قطره $r=\frac{2}{3}m$ يمكن أن يهتز في مستوٍ شاقولي حول محور أفقي مار من نقطة على محيطه.

والمطلوب:

١. انطلاقاً من العلاقة العامة لدور النواس الثقلي المركب استنتج العلاقة المحددة لدوره الخاص في حالة السعات الصغيرة ثم احسب قيمة هذا الدور.

٢. احسب طول النواس البسيط الموافق لهذا النواس المركب.

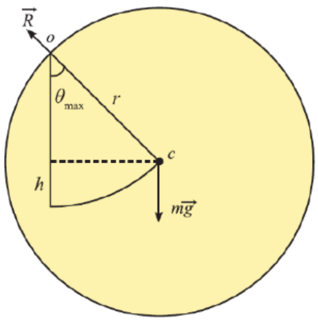
٣. نثبت في نقطة من محيط القرص كتلة نقطية $\grave{m}=m$ ونجعله يهتز حول محور مار من مركز القرص احسب دوره في هذه الحالة من أجل السعات الزاوية الصغيرة.

٤. نزيح القرص من جديد عن وضع توازنه الشاقولي بسعة زاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الخطية للكتلة النقطية $\grave{m}$ لحظة المرور بالشاقول $\frac{2\pi}{3}m.s^{-1}$ احسب قيمة السعة الزاوية θ_{max} إذا علمت أن: $\theta_{max}>0.24rad$,

$g=10m.s^{-2}$

$\pi^2=10$ عزم عطالة القرص حول محور مار من مركزه وعمودي على مستويه $I_{\Delta/C}=\frac{1}{2}mr^2$

الحل:



كتلة القرص m $\qquad r=\frac{2}{3}m$

$$I_{C/\Delta}=\frac{1}{2}mr^2$$

(1 $$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}$$

حساب:

$$I_{C/\Delta}=I_{C/\Delta}+md^2$$
$$=\frac{1}{2}mr^2+mr^2$$
$$\boldsymbol{I_{C/\Delta}=\frac{3}{2}mr^2}$$
$$d=r \quad , \quad M=m$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{mgr}}$$
$$\boldsymbol{T_0=2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}}}$$

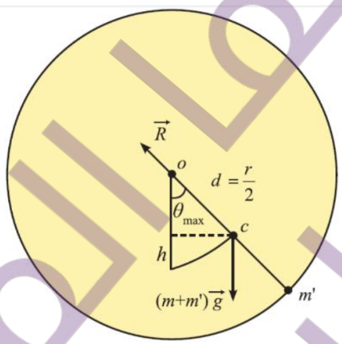
حساب T_0 :

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\frac{2}{3}}{10}}$$
$$T_0=2(s)$$

(2 $\qquad \underset{\text{بسيط}}{T_0}=\underset{\text{مركب}}{T_0}$

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}=2$$
$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}}=2$$
$$\sqrt{\ell}=1$$
$$\ell=1m$$

(3 $\qquad m=\grave{m}$



نحسب:

$$\boldsymbol{I_{\Delta/\text{جملة}}=I_{\text{قرص}}+I_{\grave{m}}}$$
$$=\frac{1}{2}mr^2+\grave{m}r^2$$

لكن: $m=\grave{m}$

$$I_{\Delta/\text{جملة}}=\frac{1}{2}mr^2+mr^2$$
$$\boldsymbol{I_{\Delta/\text{جملة}}=\frac{3}{2}mr^2}$$
$$\boldsymbol{d=\frac{\grave{m}r+m(0)}{m+\grave{m}}=\frac{\grave{m}r}{2\grave{m}}=\frac{r}{2}}$$
$$M=m+\grave{m}=2m$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{2m\,g\frac{r}{2}}}$$

$$\boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}}}$$

حساب T_0 :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\frac{2}{3}}{10}}$$

$$T_0 = 2(s)$$

4) $\theta_{max} > 0.2rad$

$$v_{\grave{m}} = \frac{2\pi}{3} m.s^{-1}$$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعتين:

① $\theta_1 = \theta_{max}$, $E_{K_1} = 0$

② $\theta_2 = 0$, عند المرور بالشاقول

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{R}}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 - 0 = Mgd(1 - cos\theta_{max}) + 0$$

حيث:

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$1 - cos\theta_{max} = \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2}{Mgd}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})\,(\frac{3}{2}\,mr^2)\,\frac{v^2}{r^2}}{(2m)\,g\,(\frac{r}{2})}$$

$$\Rightarrow 1 - cos\theta_{max} = \frac{\frac{3}{4}\,v^2}{g\;\,r}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{4\pi^2}{9}}{10 \times \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad}$$

المسألة $\frac{5}{271}$ عامة:

يتألف نواس ثقلي من ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها 1m تحمل في نهايتها العلوية كتلة نقطية $\boldsymbol{m_1 = 0.2kg}$ وتحمل في نهايتها السفلية كتلة نقطية $\boldsymbol{m_2 = 0.6kg}$ تهتز هذه الساق حول محور أفقي مار من منتصفها.

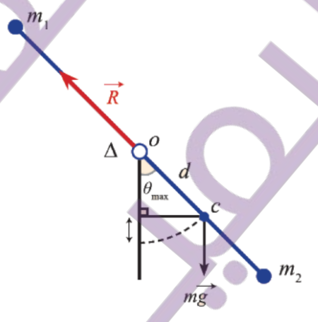
المطلوب:

١. احسب دور النواس في حالة السعات الصغيرة.
٢. احسب طول النواس البسيط المواقف لهذا النواس.
٣. احسب دور النواس لو ناس بسعة $\boldsymbol{\theta_{max} = 0.4rad}$
٤. نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\boldsymbol{\theta_{max} = 60°}$ استنتج بالرموز علاقة السرعة الزاوية لجملة النواس لحظة مرورها بشاقول محور التعليق ثم احسب قيمتها عندئذ.احسب السرعة الخطية لعطالة لمركز عطالة جملة النواس لحظة المرور بالشاقول.
٥. نستبدل بالكتلة $\boldsymbol{m_2}$ كتلة $\boldsymbol{m_1 = 0.2kg}$ ونعلق الساق من منتصفها بسلك فتل شاقولي لنشكل بذلك نواساً للفتل نزيح الساق الأفقية عن وضع توازنها بزاوية ونتركها دون سرعة ابتدائية فتهتز بدور $\boldsymbol{T_0 = 2\pi\ s}$ احسب قيمة ثابت فتل سلك التعليق.
٦. احسب قيمة التسارع الزاوي لنواس الفتل عند المرور بوضع $\boldsymbol{\theta = 0.5rad}$

الحل:

$$m_1 = 0.2kg$$
$$m_2 = 0.6kg$$
$$L = 1m$$

الساق مهملة الكتلة



1) $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{M_{جملة}gd}}$$

$$\boldsymbol{M_{جملة} = m_1 + m_2 = 0.8kg}$$

$$\boldsymbol{I_{\Delta/جملة} = I_{ساق} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}}$$

$$= 0 + m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(\frac{L}{2})^2$$

$$= 0.2(\frac{1}{2})^2 + 0.6(\frac{1}{2})^2$$

$$= 0.8 \times \frac{1}{4} = 0.2kgm^2$$

$$\boldsymbol{d = \frac{m_2\left(\frac{L}{2}\right) - m_1\left(\frac{L}{2}\right)}{m_2 + m_1}}$$

$$= \frac{0.6\left(\frac{1}{2}\right) - 0.2\left(\frac{1}{2}\right)}{0.8}$$

$$d = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4}m$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{0.8(10)\left(\frac{1}{4}\right)}}$$

$$\boldsymbol{T_0 = 2(s)}$$

(2

$$T_{0\,\text{بسيط}} = T_{0\,\text{مركب}}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2$$

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}} = 2$$

$$\sqrt{\ell} = 1 \Longrightarrow \boldsymbol{\ell = 1m}$$

(3 السعات كبيرة $\theta_{max} = 0.4rad$

$$\boldsymbol{\grave{T}_0 = T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)}$$

$$= 2\left(1 + \frac{(0.4)^2}{16}\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{0.16}{16}\right)$$

$$= 2(1 + 0.01) = 2(1.01)$$

$$\grave{T}_0 = 2.02(s)$$

(4

a. نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

$$E_{K_1} = 0 \quad , \quad \theta_1 = \theta_{max} \ \ ①$$

$$\theta_2 = 0 \ \ ②$$

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{R}}$$

$$\frac{1}{2}I_\Delta \omega^2 - 0 = Mgd(1 - cos\theta_{max})$$

حيث:

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$\omega^2 = \frac{2Mgd(1 - cos\theta_{max})}{I_\Delta}$$

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{2Mgd(1 - cos\theta_{max})}{I_\Delta}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \times 0.8 \times 10 \times \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{0.2}}$$

$$= \sqrt{20\left(\frac{1}{2}\right)}$$

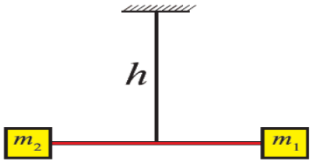
$$= \sqrt{10} = \pi rad.s^{-1}$$

b. حساب السرعة الخطية لمركز العطالة:

$$v_c = \omega.d = \pi \times \frac{1}{4}$$

$$v_c = \frac{\pi}{4}m.s^{-1}$$

(5



$$m_1 = m_2 = 0.2kg$$

$$T_0 = 2\pi(s)$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{جملة}}}{K}}$$

نحسب $I_{\Delta/\text{جملة}}$:

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\text{ساق}} + 2I_{\Delta/m_1}$$

$$= 0 + 2m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= 2m_1\frac{L^2}{4}$$

$$\boldsymbol{I_{\Delta/\text{جملة}} = m_1\frac{L^2}{2}} = 0.2\frac{1}{2} = 0.1kg.m^2$$

نعوض في علاقة الدور:

$$2\pi = 2\pi\sqrt{\frac{0.1}{K}}$$

$$1 = \frac{0.1}{K}$$

$$K = 0.1m.Nrad^{-1}$$

(6

$$\boldsymbol{\propto = -\omega_0^2\theta}$$

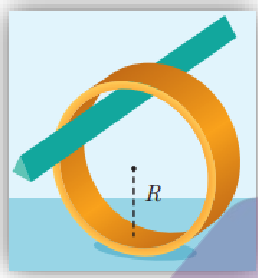
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1rad.s^{-1}$$

$$\propto = -1(0.5)$$

$$\propto = -0.5rad.s^{-2}$$

المسألة $\frac{4}{271}$:

نعلق حلقة معدنية نصف قطرها $R = 12.5cm$ بمحور أفقي ثابت كما هو موضح بالشكل:



المطلوب:

1. استنتج عبارة الدور الخاص لاهتزاز هذا النواس من أجل السعات الصغيرة إذا علمت أن عزم عطالة الحلقة حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها $I_{\Delta/c} = M R^2$ ثم احسبه.
2. احسب طول النواس البسيط المواقت.

الحل:

$$R = 12.5cm$$
$$R = 12.5 \times 10^{-2}\, m$$
$$I_{\Delta/C} = MR^2$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}$$
$$I_{\Delta/0} = I_{\Delta/C} + md^2$$
$$= MR^2 + MR^2$$
$$I_{\Delta/C} = 2MR^2$$
$$d = R$$
$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times12.5\times10^{-2}}{10}}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{25\times10^{-2}}{10}}$$
$$T_0 = 2\times5\times10^{-1}$$
$$T_0 = 1(s)$$

(2

$$T_0 \text{ بسيط} = T_0 \text{ مركب}$$
$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 1$$
$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}} = 1$$
$$4\pi^2\frac{\ell}{10} = 1$$
$$\boldsymbol{\ell = \frac{1}{4}m}$$

المسألة الثانية:

خيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l = 40cm$ نعلق في نهايته كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها m=100g . يحرف الخيط عن وضع التوازن بزاوية $\theta_{max} > 0.24rad$ ونترك الكرة بدون سرعة ابتدائية فتكون سرعتها لحظة مرورها بالشاقول $v = 2m.s^{-1}$ المطلوب حساب:

1- قيمة الزاوية θ_{max}

2- استنتج علاقة توتر خيط النواس عند المرور بالشاقول واحسب قيمته

الحل:

$$\ell = 40cm = 4\times10^{-1}m$$
$$m = 100g$$

(1 استنتاج θ_{max} :

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

1- حيث يضع الخيط مع الشاقول θ_{max} .

$$\theta_1 = \theta_{max}$$

2- حيث يضع الخيط مع الشاقول $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}}$$
$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{T}}$$

$E_{K_1} = 0$ لأنه ترك بدون سرعة ابتدائية

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg\ell(1 - cos\theta_{max})$$

لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة عمله معدوم

$$1 - cos\theta_{max} = \frac{v^2}{2g\ell}$$
$$= \frac{4}{2\times10\times4\times10^{-1}}$$
$$1 - cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad$$

(2

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور له حامل وجهة $\vec{T}$ (الناظم)

$$-w_C + T = ma_c$$
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{\ell}$$
$$T = w_C + m\frac{v^2}{\ell}$$

$$T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$$

في الشاقول: $\theta = 0$

$$\Rightarrow T = mg + m\frac{v^2}{\ell}$$

$$= 0.1 \times 10 + 0.1 \times \frac{4}{4\times10^{-1}}$$

$$T = 1 + 1 = 2N$$

المسألة الثالثة:

نعلق كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها $m = 0.5kg$ بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l = 1.6m$ لتؤلف نواساً بسيطاً ثم نزيح الكرة إلى مستوٍ أفقي يرتفع $h = 0.8m$ عن المستوي الأفقي المار منها وهي في موضع توازنها الشاقولي ليصنع خيط النواس مع الشاقول زاوية $\theta_{max} > 0.24rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية.

المطلوب:

1. استنتج بالرموز العلاقة المحددة لسرعة الكرة عند مرورها بالشاقول ثم احسب قيمتها موضحاً بالرسم.
2. استنتج قيمة الزاوية θ_{max} ثم احسب قيمتها
3. احسب دور هذا النواس.
4. استنتج بالرموز العلاقة المحددة لشدة قوة توتر الخيط عند المرور بالشاقول ثم احسب قيمتها.

الحل:

1) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

1- حيث يضع الخيط مع الشاقول

$$\theta_1 = \theta_{max}$$

2- حيث يضع الخيط مع الشاقول $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{T}}$$

$E_{K_1} = 0$ لأنه ترك بدون سرعة ابتدائية

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$= \sqrt{2\times10\times0.8}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$v = 4m.s^{-1}$$

2) $$h = \ell(1 - \cos\theta_{max})$$

$$1 - \cos\theta_{max} = \frac{h}{\ell}$$

$$= \frac{0.8}{1.6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad$$

3) $$\grave{T}_0 = T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$$

نحسب: $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1.6}{10}} = 2\pi\sqrt{16\times10^{-2}}$$

$$= 2\pi \times 4 \times 10^{-1}$$

$$T_0 = 8\pi \times 10^{-1} = 2.5(s)$$

$$\grave{T}_0 = 2.5\left(1 + \frac{\frac{\pi^2}{9}}{16}\right)$$

$$= 2.5\left(1 + \frac{10}{144}\right)$$

$$= 2.5\left(\frac{154}{144}\right)$$

$$\grave{T}_0 = 2.673(s)$$

4) $$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور له حامل وجهة $\vec{T}$ (الناظم)

$$-w_C + T = ma_c$$

: $$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{\ell}$$

$$T = w_C + m\frac{v^2}{\ell}$$

$$T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$$

في الشاقول $\theta = 0$

$$T = mg + m\frac{v^2}{\ell}$$

$$= 0.5\times10 + 0.5\times\frac{16}{16\times10^{-1}}$$

$$= 5 + 5 = 10N$$

اختبر نفسي :

- اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1- قمت بزيارة بيت جدك وطلبت إليك جدتك تصحيح الميقاتية المعلقة على الجدار وهي مؤلفة من ساق منتهية بقرص قابل للحركة صعوداً أو هبوطاً فاتصلت بالساعة الناطقة فأشارت إلى السادسة تماماً عندما كانت الميقاتية تشير إلى السادسة وخمس دقائق ولتصحيح قياس الوقت يجب:

a. إيقاف الميقاتية، وخفض القرص بمقدار ضئيل ثم إعادة تشغيلها.

b. إيقاف الميقاتية، ورفع القرص بمقدار ضئيل ثم إعادة تشغيلها.

c. تصحيح عقرب الدقائق، وإعادته ليشير الوقت إلى السادسة تماماً.

d. إيقاف الميقاتية مدة خمس دقائق، ثم إعادة تشغيلها مرة أخرى.

الجواب هو : a ليزداد الدور.

2- ميقاتيان متماثلتان مضبوطتان عند سطح الأرض بالتوقيت المحلي، نضع الأولى بالطابق الأرضي لناطحة سحاب، بينما نضع الثانية في الطابق الأخير، فإنه بعد شهر مع ثبات درجة الحرارة.

a. تشيران إلى التوقيت نفسه.

b. تقدم الثانية ويجب تعديلها.

c. تؤخر الثانية ويجب تعديلها.

d. تؤخر الأولى ويجب تعديلها.

الجواب هو : c لأن: رفع الميقاتية إلى الطابق الأخير يؤدي إلى نقصان g فيزداد الدور.

ميكانيك السوائل المتحركة

جسيم السائل : هو جزء من السائل أبعاده صغيرة جدا" بالنسبة لأبعاد السائل وكبيرة بالنسبة لأبعاد جزيئات السائل

ملاحظة : تتميز السوائل بقوى تماسك ضعيفة نسبيا"بين جزيئاتها ، فهي لاتحافظ على شكل معين ، وتتحرك جزيئاتها بحيث تأخذ شكل الوعاء الذي توضع فيه، وتتجاوب بسهولة للقوى الخارجية التي تحاول تغيير شكلها

تعاريف أساسية

١- **الجريان المستقر:** هو الجريان الذي تكون فيه سرعة جسيمات السائل ثابته مع مرور الزمن في النقطة نفسها من خط الانسياب، فإذا تغيرت السرعة من نقطة إلى أخرى بمرور الزمن كان الجريان المستقر غير منتظم، أما إذا كانت السرعة ثابتة في جميع نقاط السائل بمرور الزمن فإن الجريان المستقر يكون منتظماً.

٢- **خط الانسياب (خط الجريان):** خط وهمي يبين المسار الذي يسلكه جسيم السائل أثناء جريانه ويمس في كل نقطة من نقاطه شعاع السرعة في تلك النقطة.

٣- **أنبوب التدفق:** إذا أخذنا مساحة صغيرة عمودية على اتجاه جريان سائل جريانه مستقر، ورسمنا على محيط هذه المساحة خطوط الانسياب نحصل على أنبوب وهمي يحتوي السائل يدعى أنبوب التدفق.

٤- **ميزات السائل المثالي:**

يتمتع السائل المثالي بالميزات الآتية:

a) غير قابل للانضغاط: كتلته الحجمية ثابتة مع مرور الزمن.

b) عديم اللزوجة: قوى الاحتكاك الداخلي بين مكوناته مهملة عندما تتحرك بالنسبة لبعضها البعض، وبالتالي لا يوجد ضياع للطاقة.

c) جريانه مستقر: أي أن حركة جسيماته لها خطوط انسياب محددة وسرعة جسيماته عند نقطة معينة تكون ثابته بمرور الزمن.

d) جريانه غير دوراني: لا تتحرك جسيمات السائل حركة دورانية حول أي نقطة في مجرى الجريان.

معدل التدفق الكتلي (Q) لسائل :هو كتلة كمية السّائل التي تعبُرمقطع الأنبوب في واحدة الزمن ،ونعبر عنه بالعلاقة:

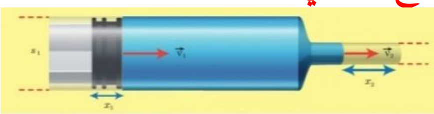
$\left(Q = \frac{m}{\Delta t}\right)$ واحدته $(kg.s^{-1})$

معدل التدفق الحجمي $(Q`)$ لسائل :هو حجم كمية السّائل التي تعبُرمقطع الأنبوب في واحدة الزمن ،ونعبر عنه بالعلاقة:

$\left(Q` = \frac{V}{\Delta t}\right)$ واحدته $(m^3.s^{-1})$

معادلة الاستمرارية:

الاستنتاج الرياضي لمعادلة الاستمرارية:



بافتراض سائل يتحرك داخل أنبوب مساحة كل من مقطعي طرفيه تختلف عن الأخرى $(s_1 \neq s_2)$، و كمية السائل التي تدخل الأنبوب عند المقطع s_1 في مدة زمنية معينة تساوي كمية السائل التي تخرج من المقطع s_2 للأنبوب في المدة الزمنية نفسها (السائل لا يتجمع داخل الأنبوب و يملؤه تماماً، و جريانه مستمر):

بفرض أن $\boldsymbol{v_1}$ سرعة السائل عبر المقطع s1 ، و $\boldsymbol{v_2}$ سرعة السائل عبر المقطع s2 إن حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s1 لمسافة $\boldsymbol{x_1}$ في الزمن $\boldsymbol{\Delta t}$ يكون: $V_1 = s_1 x_1$

لكن: $x_1 = v_1 \Delta t$ $V_1 = s_1 v_1 \Delta t$

و حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s2 لمسافة $\boldsymbol{x_2}$ في الزمن $\boldsymbol{\Delta t}$ يكون: $V_2 = s_2 x_2$

لكن: $x_2 = v_2 \Delta t$ $V_2 = s_2 v_2 \Delta t$

وبما أن حجم كمية السائل التي عبرت المقطع s1 تساوي حجم كمية السائل التي عبرت المقطع s2 في المدة الزمنية نفسها فإن:

$$Q'_1 = Q'_2 \rightarrow \frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t} \rightarrow \frac{s_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{s_2 v_2 \Delta t}{\Delta t}$$

إذن: $s_1 v_1 = s_2 v_2$

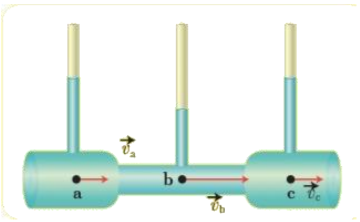
أي أن سرعة تدفق السائل تتناسب عكساً مع مساحة مقطع الأنبوب الذي يتدفق منه السائل.

و عموماً يمكننا أن نكتب:

$$Q' = s_1 v_1 = s_2 v_2 = const$$

عندما تنقص مساحة مقطع الإنبوب تزداد سرعة جريان السائل

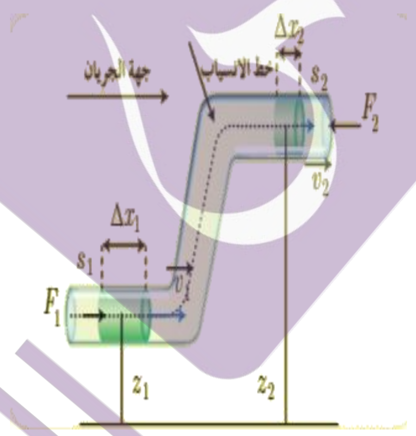
نظرية برنولي في الجريان المستقر:



((إن مجموع الضغط و الطاقة الحركية لواحدة الحجوم، و الطاقة الكامنة الثقالية لواحدة الحجوم تساوي مقداراً ثابتاً عند أي نقطة من نقاط خط الانسياب لسائل جريانه مستقر)) .

نلاحظ عندما تنقص مساحة مقطع الإنبوب تزداد سرعة جريان السائل أي تزداد طاقته الحركية ولكن ينقص الضغط

الاستنتاج الرياضي لمعادلة برنولي:



عندما تمر كمية صغيرة من السائل بين مقطعين حيث مساحة المقطع الأول **s1**، والضغط عنده $\boldsymbol{p_1}$، وسرعة الجريان فيه $\boldsymbol{v_1}$، و الارتفاع عن مستو مرجعي $\boldsymbol{z_1}$ ومساحة المقطع الثاني **s2**،

والضغط عنده $\boldsymbol{p_2}$، وسرعة الجريان فيه $\boldsymbol{v_2}$، والارتفاع عن المستوي المرجعي $\boldsymbol{z_2}$.

إن العمل الكلي المبذول لتحريك كتلة السائل من المقطع الأول إلى المقطع الثاني

يساوي مجموع عمل قوة الثقل، وعمل قوة ضغط السائل.

حيث :عمل قوة الثقل

$$W_{\vec{w}} = -mg(z_2 - z_1)$$

وعمل قوة ضغط السائل

يتأثر سطح المقطع s1 بقوة F1 لها جهة الجريان، و تنتقل نقطة تأثيرها مسافة قدرها Δx_1 في مدة زمنية $\boldsymbol{\Delta t}$ فتقوم بعمل محرك (موجب)

$$W_1 = F_1\Delta x_1$$

لكن: $F_1 = P_1 s_1 \Rightarrow W_1 = P_1 s_1 \Delta x_1$

لكن: $s_1\Delta x_1 = \Delta V \Rightarrow W_1 = P_1\Delta V$

حيث ΔV حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s1 في المدة الزمنية $\boldsymbol{\Delta t}$.

يتأثر سطح المقطع s2 بقوة F2 معيقة لجريان السائل، لها جهة تعاكس جهة الجريان، وتنتقل نقطة تأثيرها مسافة قدرها $\boldsymbol{\Delta x_2}$ في المدة الزمنية $\boldsymbol{\Delta t}$ فتقوم بعمل مقاوم (سالب).

$$W_2 = -F_2\Delta x_2$$

لكن: $F_2 = P_2 s_2 \Rightarrow W_2 = -P_2 s_2 \Delta x_2$

لكن: $s_2\Delta x_2 = \Delta V$

حيث ΔV حجم كمية السائل التي تعبر المقطع s2 في المدة الزمنية Δt نفسها ، وهي تساوي حجم كمية السائل التي نعبر المقطع s1 في المدة الزمنية $\boldsymbol{\Delta t}$ ، وذلك لأن السائل غير قابل للانضغاط.

$$W_2 = -P_2\Delta V$$

ويصبح العمل الكلي: $W_T = W_w + W_1 + W_2$

$$W_T = -mg(z_2 - z_1) + P_1\Delta V - P_2\Delta V$$

وبحسب مصونة الطاقة فإن:

$$W_T = E_{K_2} - E_{K_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$-mg(z_2 - z_1) + P_1\Delta V - P_2\Delta V = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

لكن: $m = \rho\,\Delta V$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\,v_1^2 + \rho\,g\,z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\,v_2^2 + \rho\,g\,z_2$$

$$P + \frac{1}{2}\rho\,v^2 + \rho\,g\,z = const$$

وهي معادلة برنولي التي تعبر عن نظرية برنولي، وهي أحد أشكال حفظ الطاقة.

تطبيقات على معادلة برنولي:

ملاحظة : في حال أنبوب أفقي: $(\boldsymbol{z_1 = z_2})$ تصبح معادلة برنولي : $P_1 + \frac{1}{2}\rho\,v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\,v_2^2$

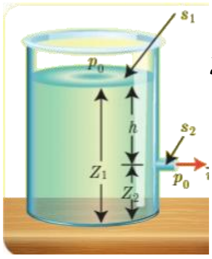
وبالتالي : $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$

①- سكون السوائل، ومعادلة المانومتر:

يمكن أن نحصل على معادلة المانومتر من معادلة برنولي بفرض أن السائل ساكن في الأنبوب أي أن: $v_1 = v_2 = 0$ نعوض في معادلة برنولي فنجد: $P_1 - P_2 = \rho\,g\,z_2 - \rho\,g\,z_1 = \rho\,g(z_2 - z_1) = \rho\,g\,h$

وهذه معادلة المانومتر (قانون الضغط في السوائل الساكنة).

② - نظرية تورشيللي:



يحتوي خزان على سائل كتلته الحجمية ρ، مساحة سطح مقطعه s1 كبيرة بالنسبة إلى فتحة جانبيه مساحة مقطعها s2 صغيرة تقع قرب قعره و على عمق $z_1 - z_2$ من السطح الحر للسائل. ما السرعة التي يخرج بها السائل من الفتحة الجانبية؟

نطبق معادلة برنولي على جزء صغير من السائل انتقل من سطح الخزان بسرعة $v_1 \simeq 0$ ليخرج من الفتحة s2 إلى الوسط الخارجي بسرعة v_2 :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + \rho\, g\, z_2$$

إن السطح المفتوح، والفتحة معرضتان للضغط الجوي النظامي، ولذلك $P_1 = P_2 = P_0$

$$\frac{1}{2}v_1^2 + g\, z_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + g\, z_2$$

وبما أن السرعة v_1 مهملة بالنسبة للسرعة v_2 نأخذ $v_1 \simeq 0$

$$g\, z_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + g\, z_2 \rightarrow \frac{1}{2}v_2^2 = g\, z_1 - g\, z_2$$

$$v_2^2 = 2g(z_1 - z_2) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2\, g\, h}$$

إن سرعة خروج السائل تساوي السرعة التي يسقط بها جسم مائع سقوطاً حراً من ارتفاع h.

تدعى العلاقة السابقة بنظرية تورشيللي، وتنطبق على أي فتحة في الوعاء، سواء في قعره كانت أم في جداره الجانبي.

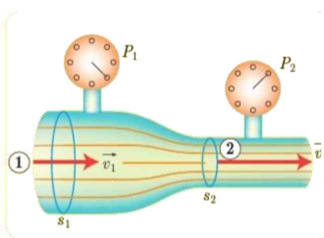
③-أنبوب فنتوري:

يتألف أنبوب فنتوري من أنبوب مساحة مقطعه s1 يجري في سائل بسرعة v_1 في منطقة ضغطها P_1 فيصل لاختناق مساحته s2، ولمعرفة فرق الضغط بين الجذع الرئيسي و الاختناق نستعمل أنبوب فنتوري.

نطبق معادلة برنولي بين النقطتين ١ و ٢ اللتين تقعان في المستوي الأفقي نفسه.

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

ولكن: $s_1 v_1 = s_2 v_2$



$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{s_1}{s_2}\right)^2 - 1\right]v_1^2$$

ويقاس فرق الضغط بين نقطتين باستخدام جهاز قياس الضغط.

لدينا $s_1 > s_2$ ، إذاً $P_1 > P_2$

أي أن الضغط في الاختناق أقل من الضغط في الجذع الرئيسي للأنبوب.

يستفاد من هذه الخاصية في الطب، فقد تتناقص مساحة مقطع الشرايين في منطقة ما نتيجة تراكم الدهون و الشحوم، وهذا يعيق جريان الدم في الشرايين، ويتناقص ضغط الدم في المقاطع المتضيقة عن قيمته الطبيعية اللازمة لمقاومة الضغوط الخارجية

بعض القوانين للمسائل:

$Q=\frac{m}{\Delta t}$ معدل التدفق الكتلي حيث (m) كتلة كمية السائل

$Q=\rho . Q`$

معدل التدفق الحجمي (معدل الضخ) :

$Q`=S.v$ حيث (v) سرعة جريان السائل

$Q`=\frac{V}{\Delta t}$ حيث (V) حجم كمية السائل

بشكل عام : $Q'=s_1v_1=s_2v_2=const$

في حال رشاش استحمام :

$Q`=S.v=N.S`.v`$ حيث مساحة مقطع الإنبوب (S)، سرعة جريان السائل في الإنبوب (v)

عدد الثقوب (N) ، سرعة جريان السائل في الثقب $(v`)$، مساحة مقطع الثقب $(S`)$

لحساب العمل الميكانيكي اللازم لضخ حجم من السائل من مقطع s_1 إلى مقطع s_2 :

$$W_T=-mg(z_2-z_1)+P_1\Delta V-P_2\Delta V$$

$$W_T=-mg(z_2-z_1)+(P_1-P_2)\Delta V$$

أو من العلاقة: $w_T=E_{K_2}-E_{K_1}$

$$W_T=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)$$

3 حسب تورشللي لحساب سرعة خروج السائل من فتحة جانبيّة صغيرة مساحة مقطعها s_2 تقع قرب قعره وعلى عمق h من السطح الحر للسائل: $v=\sqrt{2gh}$

4 معادلة فنتوري:

$$P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2-1\right]v_1^2$$

المسألة الأولى:

لملء خزان حجمه $600\ L$ بالماء استعمل خرطوم مساحة مقطعه $5\ cm^2$ فاستغرقت العملية $300\ s$

المطلوب:

1- احسب معدل التدفق الحجمي $\grave{Q}$.

2- احسب سرعة تدفق الماء من فتحة الخرطوم

3- كم تصبح سرعة تدفق الماء من فتحة الخرطوم إذا نقص مقطعها ليصبح ربع ما كان عليه؟

الحل:

$$V=600L=600\times10^{-3}m^3$$
$$S=5cm^2=5\times10^{-4}m^2$$
$$\Delta t=300(s)$$

1) $$\grave{Q}=\frac{V}{\Delta t}=\frac{600\times10^{-3}}{300}=2\times10^{-3}m^3.s^{-1}$$

2) $$\grave{Q}=S.v$$
$$\Longrightarrow v=\frac{2\times10^{-3}}{5\times10^{-4}}=4m.s^{-1}$$

3) $$S_1v_1=S_2v_2$$

لكن: $$S_2=\frac{1}{4}S_1$$
$$S_1v_1=\frac{1}{4}S_1v_2$$
$$\boldsymbol{v_2=4v_1}$$
$$=4\times4=16m.s^{-1}$$

المسألة الثالثة:

ينتهي أنبوب ماء مساحة مقطعه ***10 cm2*** إلى رشاش الاستحمام وفيه 25 ثقباً متماثلاً مساحة مقطع كل ثقب $0.1\ cm^2$ فإذا علمت أن سرعة تدفق الماء عبر الأنبوب $50\ cm.s^{-1}$

1- احسب معدل التدفق الحجمي للماء.

2- احسب سرعة تدفق الماء من كل ثقب.

الحل:

$$S=10cm^2=10\times10^{-4}m^2$$
$$N=25\ \text{ثقب}$$
$$S_1=0.1cm^2=10^{-5}m^2$$
$$v=50cm.s^{-1}=50\times10^{-2}m.s^{-1}$$

١) $$\grave{Q}=S.v$$
$$\grave{Q}=10^{-3}\times50\times10^{-2}$$
$$=5\times10^{-4}m^3.s^{-1}$$

وبما أن الثقوب متماثلة المساحة وعددها N:

$$\grave{Q}=NS_1v_1$$
$$v_1=\frac{5\times10^{-4}}{25\times10^{-5}}=2m.s^{-1}$$

المسألة الثانية:

ترفع مضخة الماء من خزان أرضي عبر أنبوب مساحة مقطعه $s_1 = 10cm^2$ إلى خزان يقع على سطح بناء فإذا علمت أن مساحة مقطع الأنبوب الذي يصب في الخزان العلوي $s_2 = 5cm^2$ وأن معدل الضخ $\dot{Q} = 0.005m^3.s^{-1}$

المطلوب:

١- احسب سرعة الماء عند دخوله الأنبوب وعند فتحة خروجه من الأنبوب.

2- احسب قيمة ضغط الماء عند دخوله الأنبوب علماً أن الضغط الجوي $1 \times 10^5 Pa$ والارتفاع بين الفوهتين 20m

3- احسب العمل الميكانيكي اللازم لضخ 100 L من الماء إلى الخزان العلوي.

الحل:

$$S_1 = 10cm^2 = 10 \times 10^{-4}m^2$$
$$S_2 = 5cm^2 = 5 \times 10^{-4}m^2$$
$$\dot{Q} = 0.005m^3.s^{-1}$$

(1

$$\dot{Q} = S_1 v_1$$
$$v_1 = \frac{5 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-4}} = 5m.s^{-1}$$
$$\dot{Q} = S_2 v_2$$
$$v_2 = \frac{5 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-4}} = 10m.s^{-1}$$

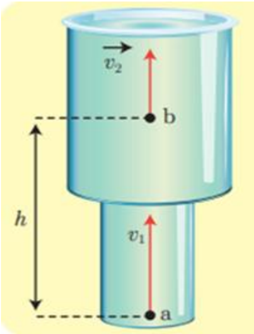
(2

$$P_0 = P_2 = 10^5 P_a$$
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g Z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g Z_2$$
$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(Z_2 - Z_1)$$
$$= 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000(100 - 25) + 1000(10)(20)$$
$$= 10^5 + 37.5 \times 10^3 + 2 \times 10^5$$
$$= 3 \times 10^5 + 37.5 \times 10^3$$
$$= 300 \times 10^3 + 37.5 \times 10^3$$
$$= 337.5 \times 10^3 P_a$$

(3

$$W_t = \Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1}$$
$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$
$$W_t = \frac{1}{2}\rho V(v_2^2 - v_1^2)$$
$$= \frac{1}{2} \times 1000 \times 100 \times 10^{-3}(100 - 25)$$
$$= 3750 \text{ J}$$

مسألة 7 عامة :



يجري أنبوب داخل الأنابيب الموضحة في الشكل من (a) إلى (b)

حيث نصف قطر الأنبوب عند (a) $r_1 = 5cm$ ونصف قطر الأنبوب عند النقطة (b) $r_2 = 10cm$ والمسافة الشاقولية بين (a) و (b) $h = 50cm$

1- احسب سرعة جريان الماء عند النقطة (b) علماً أن سرعة جريان الماء عند النقطة (a) $v_1 = 4m.s^{-1}$

-احسب قيمة فرق الضغط $(P_a - P_b)$ $(\rho_{H2O} = 1000kg.m^{-3})$

الحل:

$$r_1 = 5cm = 5 \times 10^{-2}m$$
$$r_2 = 10cm = 10 \times 10^{-2}m$$
$$h = 0.5m \quad , \quad v_1 = 4m.s^{-1}$$

(1 حساب سرعة جريان الماء عند (b)

$$S_1.v_1 = S_2.v_2$$
$$\pi r_1^2 v_1 = \pi r_2^2 v_2$$
$$v_2 = \frac{r_1^2 v_1}{r_2^2}$$
$$= \frac{25 \times 10^{-4} \times 4}{10^{-2}} = 1m.s^{-1}$$

(2 حسب برنولي:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(Z_2 - Z_1)$$
$$= \frac{1}{2} \times 1000(1 - 16) + 1000 \times 10 \times 50 \times 10^{-2}$$
$$= -7500 + 5000$$
$$= -2500P_a$$
$$P_1 - P_2 < 0 \Longrightarrow P_1 < P_2$$

اختبر نفسي:

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي

1- عندما تهب رياح أفقية عند فوهة مدخنة شاقولية فإن:

a. سرعة خروج الدخان من فوهة المدخنة:

A) تزداد B) تنقص C) تبقى دون تغير D) تنعدم

b. ويمكن تفسير النتيجة وفق:

A) مبدأ باسكال B) مبدأ برنولي

C) قاعدة أرخميدس D) معادلة الاستمرارية

الحل:

a. تزداد b. مبدأ برنولي

2- يتصف السائل المثالي بأنه:

a. قابل للانضغاط وعديم اللزوجة.

b. غير قابل للانضغاط ولزوجته غير مهملة.

c. غير قابل للانضغاط وعديم اللزوجة.

d. قابل للانضغاط ولزوجته غير مهملة.

الحل:

غير قابل للانضغاط وعديم اللزوجة.

١- خرطوم مساحة مقطعه عند فوهة دخول الماء فيه S_1 وسرعة جريان الماء عند تلك الفوهة v_1 فتكون سرعة خروج الماء v_2 من نهاية الخرطوم حيث أن مساحة المقطع $s_2 = \frac{1}{4} s_1$ مساوية:

A) v_1 B) $\frac{1}{4} v_1$ C) $4v_1$ D) $16v_1$

الحل:

$$s_2 = \frac{1}{4} s_1 \Rightarrow v_2 = 4v_1$$

ثانياً: أعط تفسيراً علمياً باستخدام العلاقات الرياضية المناسبة لكل مما يأتي:

١. اختلاف سرعة جريان الماء عبر مقاطع مختلفة المساحة في مجرى نهر جريانه أفقي.

الحل:

حسب معادلة الاستمرارية $s_1 v_1 = s_2 v_2$ تتناسب السرعة عكساً مع مساحة مقطع النهر.

٢. عدم تقاطع خطوط الانسياب لسائل.

الحل:

خط الانسياب يمر في كل نقطة شعاع سرعة جسيم السائل في تلك النقطة، تقاطع خطوط الانسياب يعني وجود أكثر من سرعة للجسيم بالمكان نفسه وباتجاهات مختلفة.

٣. ينقص مقطع عمود الماء المتدفق من الخرطوم عندما توجه فوهته للأسفل ويزداد مقطعه عندما توجه فوهته رأسياً للأعلى.

الحل:

عندما توجه فوهته للأسفل سرعة جريان الماء تزداد كلما اقترب من سطح الأرض فينقص ضغط الماء ويصبح الضغط الجوي المحيط بالماء أكبر فتنقص مساحة مقطع الماء عندما توجه فوهته للأعلى سرعة جريان الماء تنقص فيزداد الضغط للسائل ويصبح أكبر من الضغط الجوي فيزداد مقطعه.

٤. يندفع الماء بسرعة كبيرة من ثقب صغير حدث فيجدار خرطوم ينقل الماء.

الحل:

حسب معادلة الاستمرارية $s_1 v_1 = s_2 v_2$ تتناسب السرعة عكساً مع مساحة مقطع الأنبوب.

٥. تستطيع خراطيم سيارات الإطفاء إيصال الماء لارتفاعات ومسافات كبيرة.

٦. تكون مساحة فتحات الغاز في موقد الغاز صغيرة.

٧. لجعل الماء المتدفق من فتحة خرطوم يصل إلى مسافات أبعد نغلق جزءاً من فتحة الخرطوم.

الحل:

على نفس السبب (٥, ٦, ٧) حسب معادلة الاستمرارية.

....

((مراجعات وتمارين في النسبية الخاصة))

تسمح النظرية النسبية الخاصة بوصف حركة الأجسام التي تتحرك بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء وقد وجد أن :

❶ السرعة مفهوم نسبي يختلف بإختلاف جملة المقارنة

مثال : يطلق شخص متحرك سهما" بجهة حركته فنلاحظ:

Ⓐ سرعة السهم بالنسبة للشخص المتحرك هي السرعة التي يعطيها للسهم.

Ⓑ سرعة السهم بالنسبة لمراقب ساكن ، هي سرعة الشخص المتحرك بالإضافة لسرعة السهم.

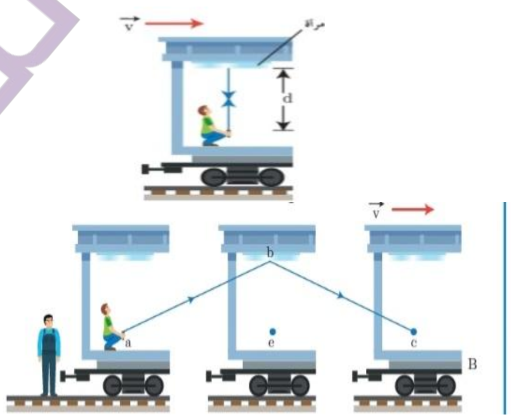
❷ سرعة انتشار الضوء ثابتة في الوسط نفسه مهما اختلفت سرعة المنبع الضوئي أو سرعة المراقب

اذكر فرضيتا اينشتاين في النسبية الخاصة:

① سرعة انتشار الضوء في الخلاء هي $(c = 3 \times 10^8 m.s^{-1})$ في جميع جمل المقارنة.

② القوانين الفيزيائية تبقى نفسها في جميع جمل المقارنة العطالية.

تمدد الزمن:

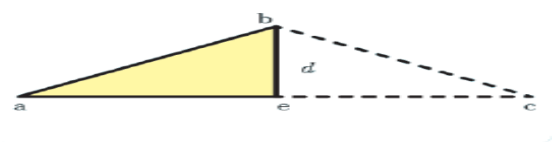


بفرض قطار يسير بسرعة ثابتة (v) ، مثبت على سقف إحدى عرباته مرآة مستوية ترتفع مسافة (d) عن منبع ضوئي بيد مراقب يقف ساكن في العربة ذاتها ، يرسل المراقب ومضة ضوئية بإتجاه المرآة ويسجل الزمن t_0 الذي تستغرقة الومضة الضوئية للعودة إلى المنبع ، تكون سرعةالشعاع الضوئي (c) :

$$c = \frac{2d}{t_0} \Rightarrow d = \frac{c.t_0}{2}$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{2d}{c} \quad ....(١)$$

أما بالنسبة لمراقب خارجي يقف ساكنا" خارج القطار وعلى استقامة المنبع الضوئي لحظة إصدار الومضة الضوئية ، فإن الزمن الذي تستغرقه الومضة الضوئية للعودة إلى المنبع هو (t)



إن المسافة التي تقطعها الومضة الضوئية للعودة إلة المنبع بالنسبة للمراقب الخارجي هي : $(ab + bc)$ حيث

$$c = \frac{ab + bc}{t} = \frac{2ab}{t} \Longrightarrow ab = \frac{c.t}{2}$$

اما بالنسبة للمنبع (داخل العربة) فإنه انتقل من النقطة (a) إلى النقطة (c) بسرعة (v)خلال نفس الزمن :

$$v = \frac{ac}{t} = \frac{2ae}{t} \Longrightarrow ae = \frac{v.t}{2}$$

وحسب نظرية فيثاغورث نجد :

$$(ab)^2 = (ae)^2 + (be)^2$$

$$\frac{c^2.t^2}{4} = \frac{v^2t^2}{4} + d^2 \rightarrow \frac{c^2.t^2}{4} - \frac{v^2t^2}{4} = d^2 \rightarrow$$

$$\frac{t^2}{4}(c^2 - v^2) = d^2 \rightarrow \frac{t}{2}\sqrt{c^2 - v^2} = d$$

$$t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad ....(٢)$$

بنسب العلاقتين : $\frac{t}{t_0} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Longrightarrow \frac{t}{t_0} =$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \Longrightarrow \frac{t}{t_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

بفرض أن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$ عامل لورينتس

$$t = \gamma\, t_0$$

ولإن $\gamma > 1 \Longrightarrow t > t_0$

نستنتج يتمدد الزمن (يتباطأ) الزمن عند الحركة

....

تطبيق (مفارقة التوأمان) : بفرض أن أخوين توأمين أحدهما رائد فضاء طار بسرعة قريبة من سرعة الضوء في الخلاء $v = \frac{\sqrt{899}}{30} . c$ وبقي رائد الفضاء في رحلته سنة واحدة وفق ميقاتية يحملها ، فما الزمن الذي ينتظره أخوه التوأم على الأرض ليعود رائد الفضاء من رحلته ؟

الحل :

الزمن الذي سجلته ميقاتية رائد الفضاء $t_0 = 1\ year$

الزمن الذي سجله الأخ التوأم على الأرض : $(t = ?)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\left(\frac{\sqrt{899}}{30}.c\right)^2}{c^2}\right)}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{899}{900}\right)}} \Longrightarrow \gamma = 30$$

$t = 30 \times 1 = 30\ year$ أي أن الأخ التوأم انتظر أخيه التوأم ثلاثين عاما"حتى انتهت رحلته

تقلص الأطوال :

تخيل مراقبين :

الأول في محطة إطلاق على الأرض .

الثاني : هو روبوت في مركبة فضاء انطلقت من محطة الفضاء نحو الشمس بسرعة ثابتة v بالنسبة للمراقب الأول.

① تسجل العدادات في المحطة على الأرض الآتي :

المسافة بين الأرض والشمس $L`_0$ ، والزمن الذي استغرقته مركبة الفضاء في رحلتها $t$ : فيكون $L`_0 = v.t$

② تسجل عدادات مركبة الفضاء الآتي :

المسافة بين الأرض والشمس $L`$ وزمن الرحلة t_0

فيكون : $L` = v.t_0$

نسب العلاقتين: $\frac{L`_0}{L`} = \frac{t}{t_0}$

ولإن $t = \gamma.t_0$

$$\frac{L`_0}{L`} = \frac{\gamma.t_0}{t_0}$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

أما بالنسبة للأطوال: نعتبر طول المركبة الفضائية L بالنسبة للمراقب الأرضي في المحطة لأن المركبة الفضائية متحركة بالنسبة له، ونعتبر طولها L_0 بالنسبة للمراقب في المركبة الفضائية.

- فيكون طول المركبة بالنسبة للمراقب الأرضي أقصر مما هو عليه بالنسبة لمراقب في المركبة.

نتيجة: يتقلص (ينكمش) الطول عند الحركة.

تطبيق (السارية و الحجرة):

يفرض أن رو بوتاً رياضياً يحمل سارية أفقية طولها و هي ساكنة **15m**، يتحرك بسرعة أفقية **0.8c** أمامها حجرة لها بابين أمامي و خلفي، البعد بينهما **10m**، يمكن التحكم بفتحها و اغلاقها آنياً بالنسبة لمراقب ساكن، هل يمكن أن تعبر السارية الحجرة بأمان إذا أغلق المراقب الساكن وفتح البابين آنياً (بالنسبة له) عند عبور الروبوت مع السارية للحجرة؟

الحل:

- يعد المراقب الساكن طول السارية المتحركة **L**:
- وطولها و هي ساكنة L_0 فيكون: $L = \frac{L_0}{\gamma}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0.8c)^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-0.64}} = \frac{1}{\sqrt{0.36}}$$

$$= \frac{1}{0.6}$$

لذلك $L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{15}{\frac{1}{0.6}} \Longrightarrow \quad L = 9m < 10m$

يمكن أن تعبر السارية بأمان.

تكافؤ الكتلة – الطاقة: (برهن في الميكانيك النسبي عندما يتحرك الجسم تزداد كتلته بمقدار يساوي طاقته الحركية مقسومة على رقم ثابت C^2 ، أي أن الكتلة تكافئ الطاقة)

- تكون الكتلة ثابتة في الميكانيك الكلاسيكي من أجل السرعات الصغيرة أمام سرعة انتشار الضوء في الخلاء.
- بينما الكتلة تزداد بزيادة السرعة في الميكانيك النسبي، و تعطى بالعلاقة: $m = \gamma.m_0$

سؤال: من أين أتت هذه الزيادة في الكتلة؟

$$E_K = m.c^2 - m_0.c^2$$

$$\leftarrow \quad E_k = (m - m_0)c^2$$

$$\leftarrow \quad \Delta m = \frac{E_K}{c^2}$$

الطاقة الكلية في الميكانيك النسبي :

$E = E_K + E_O$ حيث :

الطاقة الكلية : $E = m.c^2$ - الطاقة السكونية : $E_O = m_o.c^2$ - الطاقة الحركية : $E_k = E - E_0$

س: انطلاقا" من علاقات الميكانيك النسبي استنتج العلاقة المحددة للطاقة الحركية في الميكانيك الكلاسيكي؟

الجواب : من أجل السرعات الصغيرة أمام سرعة الضوء في الخلاء : $v \ll c$ أي $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

$$E_k = E - E_0$$

$$E_K = m.c^2 - m_0c^2$$

$$E_K = \gamma.m_o.c^2 - m_0c^2$$

$$E_K = (\gamma - 1)\, m_oc^2$$

$$E_K = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1\right) m_oc^2$$

$$E_K = \frac{1}{2}m_ov^2$$

س :انطلاقا" من علاقات الميكانيك النسبي استنتج العلاقة المحددة لكمية الحركة في الميكانيك الكلاسيكي؟

الجواب : من أجل السرعات الصغيرة أمام سرعة الضوء في الخلاء $v \ll c$ أي $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

$$p = m.v$$

$$p = \gamma.m_o.v$$

$$p = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right).m_o.v$$

نهمل $\frac{v^2}{2c^2}$ أمام ١

$p = m_0v$ وهي كمية الحركة في الميكانيك الكلاسيكي

....

تطبيق: يتحرك الكترون في أنبوبة تلفاز بطاقة حركية $E_K = 27 \times 10^{-16} J$

① احسب النسبة المئوية للزيادة في كتلة الإلكترون نتيجة طاقته الحركية.

② احسب طاقته السكونية.

علما" بأن : $(C = 3 \times 10^8\ m.s^{-1})$ ، $(m_e = 9 \times 10^{-31} kg)$

الحل : ① $E_K = m.c^2 - m_o.c^2$

$$E_K = (m - m_0)c^2$$

$$m - m_0 = \frac{E_K}{c^2} \leftarrow m - m_0 = \frac{27\times10^{-16}}{9\times10^{16}}$$

$$m - m_0 = 3 \times 10^{-32}\ kg$$

$$\text{النسبة المئوية} = \frac{3\times10^{-32}\ \times100}{9\times10^{-31}} = 3.33\%$$

② $E_0 = m_o.c^2$

$$E_0 = 9 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16}$$

$$= 81 \times 10^{-15} J$$

مسائل النسبية الخاصة

أولاً- اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- a) **C** - توضيح الإجابة : سرعة انتشار الضوء ثابتة في الوسط نفسه ، لا تتغير عند حركة المنبع الضوئي أو حركة المراقب.

2- b) أكبر - توضيح الإجابة : يتمدد الزمن عند الحركة.

3- a) - توضيح الإجابة : نختار الشكل الذي لا تتجاوز السرعة فيه نسبياً سرعة الضوء في الخلاء $(3 \times 10^8 m.s^{-1})$.

ثانياً : أجب عن السؤالين الآتيين:

١. يحاول العلماء عند دراستهم خصائص الجسيمات تحريكها بسرعات كبيرة جداً باستخدام المسرعات ، هل يمكن أن تصل سرعة هذه الجسيمات إلى سرعة انتشار الضوء في الخلاء تماماً؟ لماذا؟

الجواب : لا ، بما أن الجسيم يمتلك كتلة سكونية فكلما اقتربت سرعته من سرعة الضوء في الخلاء زادت كتلته وبالتالي سيحتاج لقوة أكبر لدفعه فإذا تناهت سرعته إلى سرعة الضوء في الخلاء يحتاج إلى إعطاءه قوة لانهائية وهذا غير ممكن

٢. يقف جسم ساكن عند مستوٍ مرجعي (سطح الأرض مثلاً) ، ما قيمة طاقته الحركية عندئذ ؟ و ما قيمة طاقته

الكامنة الثقالية بالنسبة للمستوي المرجعي ؟ هل طاقته الكتلية النسبية معدومة؟ و لماذا؟

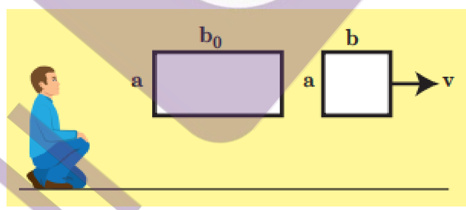
الجواب :طاقته الحركية معدومة لانعدام سرعته ، طاقته الكامنة الثقالية معدومة بالنسبة للمستوي المرجعي لأن ارتفاع الجسم عنه معدوم ، طاقته الكلية النسبية غير معدومة لأنها مجموع الطاقة الحركية والطاقة السكونية ، صحيح أن طاقته الحركية معدومة إلا أن طاقته السكونية غير معدومة مازال يمتلك كتلة سكونية

$$\boldsymbol{E = E_0 + E_K = m_0c^2 + 0 = m_0c^2 \neq 0}$$

ثالثاً : حل المسائل الآتية : ص(٦٥-٦٦)

المسألة الأولى:

جسم مستطيل الشكل طوله وهو ساكن b_0 يساوي ضعفي عرضه a يتحرك هذا الجسم بحيث يكون طوله موازياً لشعاع سرعته $\vec{v}$ بالنسبة لمراقب في الجملة الساكنة فيبدو له مربعاً احسب قيمة سرعة الجسم.



الحل : طول الجسم وهو ساكن $b_0 = 2\,a$

طول الجسم وهو متحرك $b = a$

$$b = \frac{b_0}{\gamma} = \frac{2a}{\gamma} \quad \rightarrow \quad \gamma = 2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$4 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$4 - \frac{4\,v^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{4\,v^2}{c^2} = 3 \Rightarrow$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}\,c \Rightarrow$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 \times 10^8\, m.s^{-1}$$

المسألة الثانية

يتحرك إلكترون بسرعة $v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c$ ، احسب قيمة كمية حركة لإلكترون وفق الميكانيك الكلاسيكي ثم وفق الميكانيك النسبي .أيهما الأصح

الحل : $(m_e = 9 \times 10^{-31} kg)$

كلاسيكيا لا تتغير الكتلة بين حالتي السكون والحركة أي:

$$p = m_{0_e}.v$$

$$p = 9\,x\,10^{-31}\,x\,\frac{2\sqrt{2}}{3}\,x\,3\,x\,10^8$$

$$p = 18\,\sqrt{2}\,x\,10^{-23}\,kg.m.s^{-1}$$

نسبيا تزداد كتلة الإلكترون عند تحركه وتصبح $\gamma\, m_e$ فتكون كمية حركته $p = \gamma\, m_e v$

حساب γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(\frac{2\sqrt{2}}{3}c)^2}{c^2}}} = 3$$

$$\Rightarrow P = 3 \times 9 \times 10^{-31} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3 \times 10^8$$

$$P = 54\sqrt{2} \times 10^{-23} kgm.s^{-1}$$

الحساب وفق الميكانيك النسبي هو الأدق لأنه يأخذ بعين الاعتبار مقدار الزيادة في الكتلة عند الحركة.

المسألة الثالثة:

تبلغ الكتلة السكونية لبروتون $m_P = 1.67 \times 10^{-27} kg$ وطاقته الكلية تساوي ثلاثة أضعاف طاقته السكونية.

المطلوب حساب:

1. قيمة طاقته السكونية:
2. طاقته الحركية في الميكانيك النسبي:
3. كتلته في الميكانيك النسبي:

الحل:

الحل : حساب الطاقة السكونية: $E_0 = m_{0_p}.c^2 =$

$$1.67\,x10^{-27}\,x\,9\,x\,10^{16} = 15.03\,x\,10^{-11} j$$

حساب الطاقة الحركية في الميكانيك النسبي: $E_k = E - E_0 =$

$$2\,E_0 = 2\,x\,1.67\,x\,10^{-27}\,x\,9\,x10^{16}$$

$$E_k = 30.06 \times 10^{-11}\, j$$

$$E = m\,c^2 = \gamma\, m_0c^2 = \gamma\, E_0$$

$$3\,E_0 = \gamma\, E_0 \quad \rightarrow \quad \gamma = 3 \quad \rightarrow m = \gamma\, m_0$$

$$= 3\,(\,1.67\,x\,10^{-27})$$

$$= 5\,x\,10^{-27} kg$$

مسألة 8 عامة:

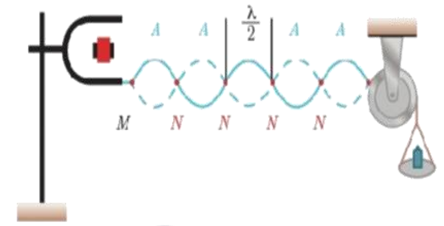
تخيل أن مركبة فضاء لها شكل مستطيل تقوم برحلة إلى نجم "الشعرى" وفق مسار مستقيم بحيث يكون شعاع سرعة المركبة دوماً موازياً لطول المركبة فتسجل أجهزة المركبة المسافرة القياسات الآتية:

طول المركبة 100 m عرض المركبة 25 m المسافة المقطوعة 4 سنة ضوئية زمن الرحلة $\frac{8}{\sqrt{3}}$ سنة وتسجل أجهزة المحطة الأرضية قياساتها لتلك الرحلة باستخدام تيلسكوب دقيق، احسب كلاً من سرعة المركبة وطولها وعرضها في أثناء الرحلة والمسافة التي قطعها وزمن الرحلة وفق قياسات المحطة الأرضية.

(سرعة الضوء في الخلاء
$(c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$

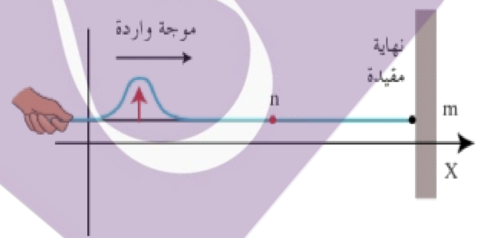
الأمواج المستقرة العرضية

الدراسة التجريبية للأمواج المستقرة العرضية في وتر :



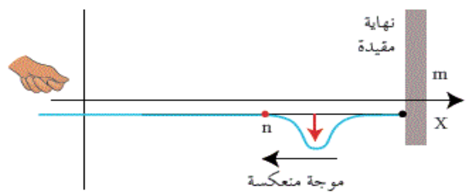
عندما تعمل الهزازة (الرنانة) تتشكل على طول الوتر أمواج عرضية جيبيه متقدمة ، و تكون معادلة مطال موجة واردة متقدمة جيبية بالاتجاه الموجب للمحور $\overrightarrow{x`x}$ عندما تصل إلى النقطة n من وسط الانتشار و التي فاصلتها $\bar{x}$ عن النهاية المقيدة m في اللحظة t معطاة بالعلاقة

$$\bar{y}_{1(t)} = Y_{max}\cos\left(\omega t - 2\pi\frac{\bar{x}}{\lambda}\right) \dots\dots\dots (1)$$



و عندما تصل الأمواج الجيبية إلى النهاية المقيدة m للوتر تنعكس، فتولد الموجة المنعكسة المتقدمة الجيبية بالاتجاه السالب للمحور $\overrightarrow{x`x}$ في النقط n في اللحظة t مطالاً يعطى بالعلاقة :

$$\bar{y}_{2(t)} = Y_{max}\cos\left(\omega t + 2\pi\frac{\bar{x}}{\lambda} + \varphi'\right) \dots\dots\dots (2)$$



تتعرض لفرق في الطور $\overline{\varphi`}$ بسبب الانعكاس ، و هو متأخر في الطور عن الموجة الواردة إلى n .

- تنعكس الإشارة عن النهاية المقيدة أو عن النهاية الطليقة بسرعة الانتشار نفسها و التوتر نفسه و بالسعة نفسها

– عند إهمال الضياع في الطاقة – و ينشأ فرق في الطور $\overline{\varphi`}$ بين الموجة الواردة و الموجة المنعكسة في الوسط (الوتر):

١- إذا كانت النهاية مقيدة فإن جهة الإشارة المنعكسة تعاكس جهة الإشارة الواردة أي يتولد بالانعكاس فرق طور $\overline{\varphi`} = \pi\, rad$ (تعاكس بالطور).

٢- إذا كانت النهاية طليقة ، فإن جهة الإشارة المنعكسة نفسها للإشارة الواردة أي فرق الطور $\overline{\varphi} = 0\, rad$ (توافق بالطور)

- تتشكل الأمواج المستقرة العرضية نتيجة التداخل بين موجة جيبية واردة مع موجة جيبية منعكسة على نهاية مقيدة تعاكسها بجهة الانتشار و لها التواتر نفسه و السعة نفسها ، و ينتج عن تداخلها :

① نقاط تهتز بسعة عظمى تسمى بطون الاهتزاز ، يرمز لها بـ A ، حيث تلتقي فيها الأمواج الواردة و المنعكسة على توافق دائم.

② نقاط تنعدم فيها سعة الاهتزاز تسمى عقد الاهتزاز ، يرمز لها بـ N ، حيث تلتقي فيها الأمواج الواردة و المنعكسة على تعاكس دائم.

- تكون المسافة الفاصلة بين كل عقدتين متتاليتين $\frac{\lambda}{2}$ ، و يشكل الاهتزاز ما بين عقدتين متجاورتين ما يشبه المغزل ، و تهتز جميع نقاط المغزل الواحد على توافق بالطور فيما بينها، بينما تهتز نقاط مغزلين متجاورين على تعاكس بالطور فيما بينها، و تبدو الموجة و كأنها تهتز مراوحة في مكانها ، فتأخذ شكلاً ثابتاً ، لذلك سميت بالأمواج المستقرة .
- **الموجة المستقرة :** هي نمط اهتزاز مستقر تحتوي على عقد بينها بطون تنشأ نتيجة التداخل بين موجتين متساويتين في التواتر و السعة و تنتشران في اتجاهين متعاكسين.

الدراسة النظرية للأمواج المستقرة العرضية:

يمكن استنتاج المطال المحصل لاهتزاز النقطة n التي تخضع لتأثير الموجتين الواردة و المنعكسة معاً بجمع المعادلتين (١) مع (٢) فيصبح مطالها المحصل $\bar{y}_{n(t)}$: $\bar{y}_{n(t)} = \bar{y}_{1(t)} + \bar{y}_{2(t)}$

$$\bar{y}_{n(t)} = Y_{max}\left[\cos(\omega\, t - \frac{2\pi}{\lambda}\,\bar{x}\,) + \cos\,(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}\,\bar{x} + \overline{\varphi'}\,)\right]$$

و بما أن : $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

نجد:

$$\bar{y}_{n(t)} = 2Y_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + \frac{\varphi'}{2}\right)\cos(\omega t + \frac{\varphi'}{2})$$

الأمواج المستقرة العرضية المنعكسة على نهاية مقيدة:

في الانعكاس على نهاية مقيدة يكون فرق الطور $\varphi' = \pi\, rad$

نعوض:

$$\bar{y}_{n(t)} = 2Y_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + \frac{\pi}{2}\right)\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

و بما أن: $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -sin\theta$

تصبح العلاقة: $\bar{y}_{n(t)} = 2Y_{max}\sin\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x}\,\sin\,(\omega t)$

$$\bar{y}_{n(t)} = Y_{max/n}\sin(\omega t)$$

باعتبار $Y_{max/n}$ سعة الموجة المستقرة في النقطة n :

$$Y_{max/n} = 2Y_{max}\left|\sin\frac{2\pi}{\lambda}\,\bar{x}\right|$$

عقد الاهتزاز N: نقاط سعة اهتزازها معدومة دوماً ، تحدد أبعادها $\bar{x}$ عن النهاية المقيدة بالعلاقة :

$$Y_{max/n} = 0 \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{\lambda}x = 0$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi$$

$x = n\frac{\lambda}{2}$ حيث: **n = 0,1.2.3....**

أي أن النقاط التي تبعد عن النهاية المقيدة ـ التي يحصل عندها انعكاس وحيد ـ أعداد صحيحة موجبة من نصف طول الموجة ، يصلها اهتزاز وارد و اهتزاز منعكس على تعاكس دائم

، فتكون ساكنة دوماً ، و تؤلف عقد اهتزاز N، و تكون المسافة بين كل عقدتين متتاليتين $\frac{\lambda}{2}$.

بطون الاهتزاز A: نقاط سعة اهتزازها عظمى دوماً ، تحدد أبعادها $\overline{x}$ عن النهاية المقيدة بالعلاقة :

$$Y_{max/n} = 2Y_{max} \Rightarrow \left|\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 1$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$ حيث n = 0,1.2.3....

أي أن النقاط التي تبعد عن النهاية المقيدة – التي يحصل عندها انعكاس وحيد – أعداد فردية من ربع طول الموجة ، يصلها اهتزاز وارد و اهتزاز منعكس على توافق دائم ، فتكون سعة الاهتزاز فيها عظمى دوماً ، و تؤلف بطون اهتزاز A، و تكون المسافة بين كل بطنين متتاليتين $\frac{\lambda}{2}$ و المسافة بين كل عقدة و بطن يليه $\frac{\lambda}{4}$.

الاهتزازات الحرة في وتر مرن :

- عندما نزيح الوتر المرن المشدود من منتصفه و نتركه ، فإنه يهتز اهتزازات حرة بتواتره الخاص f_1 مولداً موجة مستقرة نتيجة انعكاسها بالنقطتين و يتشكل مغزلاً واحداً ، و نسمي الصوت الناتج بالصوت الأساسي f_1
- عندما ننقر الوتر المرن المشدود من ربعه و ألمس منتصفه لرأس قلم يهتز الوتر مغزلين.
- الوتر المرن المثبت من طرفيه يمكن أن يؤلف هزازة ذات تواترات خاصة متعددة ، تعطى بالعلاقة : $f = nf1$
  n عدد صحيح موجب .... $n = 1,2,3,4$.. فنلاحظ أن : $L = n\frac{\lambda}{2}$ وبالتالي: $L = n\frac{v}{2f}$ أي $f = n\frac{v}{2L}$
- **تولد الاهتزاز العرضي بإزاحة الوتر عن وضع توازنه ويكون ذلك:**
  بالنقر بالريشة (كالعود) أو بالأصبع (كالقانون) أو بالضرب بمطرقة (كالبيانو) أو بالالتصاق بالقوس (كالكمان).
- **يمكن توليد الاهتزاز العرضي فيزيائياً:**

باستخدام سلك نحاسي مشدود بقوة شد مناسبة بأن نمرر فيه تياراً جيبياً متناوباً مناسبة ونحيط الوتر بمغناطيس نضوي خطوط حقله عمودية على السلك وفي وضع مناسب – في المنتصف مثلاً – ليهتز بالتجاوب مكوناً مغزلاً واحداً ويكون تواتر الوتر النحاسي مساوياً لتواتر التيار المتناوب.

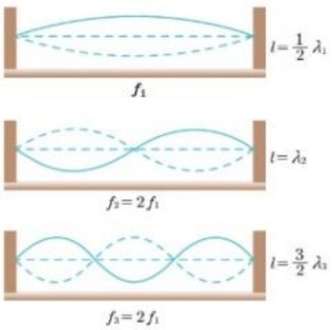
الاهتزازات القسرية في وتر مرن :

١- تجربة ملد على نهاية مقيدة:

- تتولد أمواج في الوتر مهما كانت قيمة تواتر الهزازة f.
- إذا كان تواتر الهزازة لا يساوي مضاعفات صحيحة للتواتر الأساسي للوتر $f \neq n\, f_1$ ، يحدث اهتزازات قسرية في الوتر بسعة اهتزازات صغيرة نسبياً من رتبة سعة اهتزاز الهزازة Y_{max}.
- اذا كان تواتر الهزازة يساوي إلى مضاعفات صحيحة للتواتر الأساسي للوتر $f=nf_1$، فلإن الوتر يكون بحالة تجاوب (طنين) ، و تكون سعة الاهتزاز عند البطون أكبر بكثير من السعة العظمى للهزازة ، و في هذه الحالة تتكون الأمواج المستقرة. و يكون طول الوتر عدداً صحيحاً من نصف طول الموجه $L = n\frac{\lambda}{2}$.
- يحدث التجاوب عندما يكون تواتر الهزازة مساوياً مضاعفات صحيحة للتواتر الأساسي للوتر $f=nf_1$.

الدراسة النظرية:

يتلقى الوتر اهتزازات قسرية فرضت عليه من الهزازة ، فتتكون على طوله أمواج مستقرة عرضية متجاوبة في مغزل ، و يحدث التجاوب بين الهزازة كجملة محرضة ، و الوتر كجملة مجاوبة إذا تحقق الشرط
$f = nf_1$:



و بدراسة مماثلة لدراسة الأمواج المستقرة العرضية المنعكسة على نهاية مقيدة نجد:

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$
$$\lambda = \frac{v}{f}$$
$$L = n\frac{v}{2f}$$
$$f = n\frac{v}{2L}$$

حيث : n عدد صحيح موجب ......n= 1,2,3,4

- يسمى أول تواتر يولد مغزلاً واحداً : التواتر الأساسي. $n = 1 \Rightarrow f_1 = \frac{v}{2L}$ المدرج الأول (الأساسي).
- و تسمى بقية التواترات من أجل .....$n=1,2,3,4$
- تواترات المدروجات $f = n\frac{v}{2L} = nf_1$

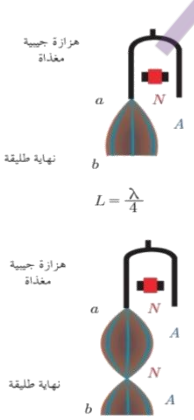
٢- تجربة ملد مع نهاية طليقة :

تحدد المدروجات انطلاقاً من العلاقة المحددة لطول الوتر:
$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = (2n-1)\frac{v}{4f}$.

- تحدد التواترات الخاصة من العلاقة
- $f = (2n-1)\frac{v}{4L}$

حيث : n عدد صحيح موجب .....$n=1,2,3,4$
و يمثل $(2n-1)$ مدروج الصوت الصادر.

$$L = 3\frac{\lambda}{4}$$



تطبيقات الأمواج المستقرة :

- الوتر المشدود : هو جسم صلب مرن أسطواني طوله كبير بالنسبة لنصف قطر مقطعه, مشدود بين نقطتين ثابتتين عقدتي اهتزاز في جملة أمواج مستقرة عرضية.
- يحدث التجاوب عندما يكون تواتر الهزازة المعلوم f: مساويا" التواتر الأساسي للوتر المهتز f_1 ويسمى الصوت الناتج أساسي أو يكون التواتر مساوياً مضاعفات صحيحة منه $f = nf_1$ والأصوات الناتجة مدروجات
- يزداد عدد المغازل عندما يزداد طول الوتر أو عندما يزداد تواتر الاهتزاز، و ينقص بزيادة قوة الشد.
- تدل نتائج التجارب المختلفة على أن سرعة انتشار الاهتزاز العرضي في الوتر المهتز تتناسب:
  ١- طرداً مع الجذر التربيعي لقوة الشد F_T.
  ٢- عكساً مع الجذر التربيعي لكتلة وحدة الطول من الوتر المتجانس ، و تسمى الكتلة الخطية μ.

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

حيث أن الكتلة الخطية للوتر: $\mu = \frac{m(Kg)}{L(m)}$ و واحدتها في الجملة $Kg.m^{-1}$

- نعوض عن سرعة انتشار الاهتزاز في الوتر، و عن الكتلة الخطية للوتر في علاقة تواتر الوتر المشدود فنجد:

$$f = n\frac{v}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T L}{m}}$$

f تواتر الصوت البسيط الصادر عن الوتر ، و يقدر بالهرتز Hz.

F_T قوة شد الوتر، و تقدر بالنيوتن N.

L طول الوتر ، و تقدر بالمتر m.

μ الكتلة الخطية للوتر ، و تقدر بـ $\mathrm{Kg.m^{-1}}$.

n عدد صحيح يمثل عدد المغازل المتكونة في الوتر أو رتبة الصوت الصادر عنه (المدروج).

- إذا فرضنا أن وتراً طوله L ، كتلته m، و مساحة مقطعه s و كتلته الحجمية (ρ) فتكون كتلته الخطية μ:

وبما أن $m = \rho.V$ فيكون $\rho = \frac{m}{V}$

فإن $V = S.L$ $m = \rho.s.L$

فتصبح العلاقة $\mu = \frac{\rho.S.L}{L}$

$$\mu = \rho.S = \rho.\pi.r^2$$

مراجعة لجميع القوانين اللازمة لحل مسائل الأوتار المهتزة :

$L = n\frac{\lambda}{2}$ ، $\lambda = \frac{v}{f}$ ، $L = n\frac{v}{2f}$

، $f = n\frac{v}{2L}$

حيث : n عدد صحيح موجب ......n= 1,2,3,4

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$$f = n\frac{v}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T L}{m}}$$

- حيث الكتلة الخطية للوتر
- $\mu = \frac{m(Kg)}{L(m)}$
- إذا فرضنا أن وتراً طوله L ، كتلته m، و مساحة مقطعه s و كتلته الحجمية (ρ) فتكون كتلته الخطية μ:

وبما أن $m = \rho.V$ فيكون $\rho = \frac{m}{V}$

فإن $V = S.L$ $m = \rho.s.L$

فتصبح العلاقة $\mu = \frac{\rho.S.L}{L}$

$$\mu = \rho.S = \rho.\pi.r^2$$

****لحساب سعة اهتزاز نقطة من وتر مرن

$$Y_{max/n} = 2Y_{max}\left|\sin\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x}\right|$$

**** لحساب ابعاد العقد عن النهاية المقيدة :

$x = n\frac{\lambda}{2}$ حيث $n = 0,1,2, ...$

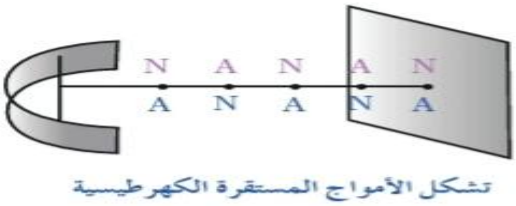
**** لحساب ابعاد البطون عن النهاية :

$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ حيث $n = 0,1,2,$

**** عدد أطوال الموجة التي يحويها وتر:

عدد أطوال الموجة $= \frac{L}{\lambda}$

الأمواج الكهرطيسية المستقرة:

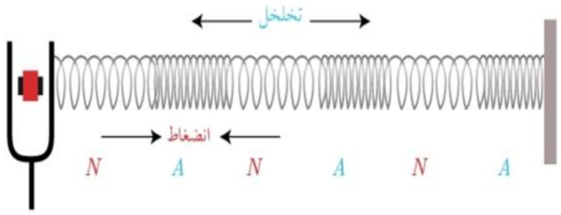


تتولد الأمواج الكهرطيسية المستوية بوساطة هوائي مرسل يوضع في محرق عاكس بشكل قطع مكافئ دوراني.

- تتألف الموجة الكهرطيسية المستوية من حقلين متعامدين: حقل كهربائي $\vec{E}$ و حقل مغناطيسي $\vec{B}$
- عندما تلاقي الأمواج الكهرطيسية الواردة حاجزاً معدنياً ناقلاً مستوياً عمودياً على منحى الانتشار، و يبعد عن الهوائي المرسل بعداً مناسباً ، تنعكس عنه و تتداخل الأمواج الكهرطيسية الواردة مع الأمواج الكهرطيسية المنعكسة لتؤلف أمواجاً كهرطيسية مستقرة.
- نكشف عن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ بواسطة هوائي مستقبل نضعه موازياً للهوائي المرسل ، يمكن تغيير طوله ، و عند وصل طرفي الهوائي المستقبل براسم اهتزاز مهبطي ، و تغيير طول الهوائي حتى يرتسم على شاشة راسم الاهتزاز خط بياني بسعة عظمى فيكون أصغر طول للهوائي المستقبل مساوياً $\frac{\lambda}{2}$.
- نكشف عن الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ بواسطة حلقة نحاسية عمودية على $\vec{B}$ فيولد توتراً نتيجة تغير التدفق المغناطيسي الذي يجتازها.
- عندما ننقل كلاً من الكاشفين بين الهوائي المرسل و الحاجز نجد الآتي :
  ١- توالي مستويات N يدل فيها الكاشف على دلالة صغرى و مستويات للبطون A يدل فيها الكاشف على دلالة عظمى متساوية الأبعاد عن بعضها ، قيمتها $\frac{\lambda}{2}$ بين كل مستويين لهما الحالة الاهتزازية نفسها.
  ٢- مستويات عقد الحقل الكهربائي هي مستويات بطون للحقل المغناطيسي و بالعكس.
  ٣- الحاجز الناقل المستوي عقدة للحقل الكهربائي و بطن للحقل المغناطيسي.
- تتمتع هذه الأمواج بطيف واسع من التواترات يشمل الأمواج الطويلة مثل الأمواج الراديوية و الرادارية و المكروية إلى الأمواج القصيرة مثل الضوء المرئي والأشعة السينية وأشعة غاما والأشعة الكونية.
- والأشعة السينية وأشعة غاما والأشعة الكونية.

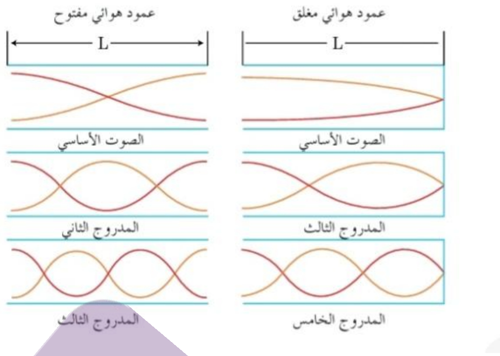
الأمواج المستقرة الطولية

الأمواج المستقرة الطولية في نابض:



- عندما تعمل الهزازة تنتشر الأمواج الطولية الواردة من المنبع (الرنانة) وفق استقامة النابض لتصل إلى النهاية الثابتة و تنعكس عنها ، فتتداخل الأمواج الطولية المنعكسة مع الأمواج الطولية الواردة ، و نشاهد على طول النابض حلقات تبدو ساكنة و حلقات أخرى تهتز بسعات متفاوتة فلا تتضح معالمها.
- نسمي الحلقات الساكنة عقد اهتزاز Nodes حيث تكون سعة الاهتزاز معدومة، و تصلها الموجة الطولية الواردة و الموجة الطولية المنعكسة على تعاكس دائم، بينما الحلقات الأوسع اهتزاز تسمى بطون الاهتزاز Antinodes حيث تكون سعة الاهتزاز عظمى، و تصلها الموجة الطولية الواردة و الموجة الطولية المنعكسة على توافق دائم.
- نسمي الموجة الناتجة عن تداخل الأمواج الطولية الواردة و الأمواج الطولية المنعكسة : الأمواج المستقرة الطولية.
- إن بطن الاهتزاز و الحلقات المجاورة له تترافق دوماً في الاهتزاز إلى إحدى الجهتين– تكاد تبدو المسافات بينها ثابتة— فلا نلاحظ تضاغطاً بين حلقات النابض أو تخلخلاً فيها أي يبقى الضغط ثابتاً، أي أن بطون الاهتزاز هي عقد للضغط.
- إن عقد الاهتزاز تبقى في مكانها – تتحرك الحلقات المجاورة على الجانبين في جهتين متعاكستين دوماً – فتتقارب خلال نصف دور ثم تتباعد خلال نصف الدور الآخر، و بذلك نلاحظ تضاغطاً يليه تخلخل، أي أن عقد الاهتزاز التي عندها تغير في الضغط هي بطون للضغط.
- المسافة بين عقدتي اهتزاز متتاليتين أو بطني اهتزاز متتاليين يساوي نصف طول الموجة $\frac{\lambda}{2}$ والمسافة بين عقدة اهتزاز وبطن اهتزاز تالٍ يساوي ربع طول الموجة $\frac{\lambda}{4}$.

الأعمدة الهوائية المفتوحة و المغلقة:



- يحدث تضخيم و تقوية للصوت في أثناء انتقاله عبر الأنابيب نتيجة حدوث انعكاسات متكررة داخله، فيتولد عنها أمواج مستقرة ذات نغمات صوتية واضحة، و تزداد وضوحاً في الأنابيب الضيقة.
- تتولد أمواج مستقرة طولية في هواء الأنبوب و نسمع صوتاً شديداً عالياً عندما يكون تواتر الرنانة يساوي تواتر الهواء في عمود الأنبوب.
- تتكون عقدة اهتزاز عند سطح الماء الساكن لأنه يمنع الحركة الطولية للهواء (حيث يعتبر نهاية مغلقة)، و بطن اهتزاز تقريباً عند فوهة الأنبوب (نهاية مفتوحة).
- طول أقصر عمود هوائي فوق سطح الماء يحدث عنده التجاوب (الرنين الأول) يساوي $L_1 = \frac{\lambda}{4}$.
- طول العمود الهوائي فوق سطح الماء يحدث عنده التجاوب (الرنين الثاني) يساوي $L_2 = \frac{3\lambda}{4}$.
- المسافة بين مستويي الماء الموافقين للصوتين الشديدين المتتاليين $\Delta L = \frac{\lambda}{2}$.
- في العمود الهوائي مفتوح الطرفين يتشكل عند كل طرف مفتوح بطن للاهتزاز و في منتصف العمود عقدة للاهتزاز فيكون طول العمود الهوائي في هذه الحالة $L = \frac{\lambda}{2}$.
- عند استخدام رنانة تواترها كبير نحصل على عمود هوائي طوله قصير.
- يتناسب تواتر الرنانة المستخدم عكساً مع طول العمود الهوائي.
- تتشابه الأعمدة الهوائية المفتوحة بأنفاق عبور السيارات.
- تعطى سرعة الصوت في هواء الأنبوب بالعلاقة: $v = \lambda f$.
- في العمود الهوائي المغلق لا يمكن الحصول على المدرجات ذات العدد الزوجي.
- تعمل القناة السمعية في أذن الإنسان التي تنتهي بغشاء الطبل كأنها عمود هوائي مغلق في حالة رنين (تجاوب).

تعاريف: الأعمدة الهوائية المفتوحة و المغلقة:

العمود الهوائي المفتوح: هو أنبوب أسطواني الشكل ، مفتوح الطرفين و المملوء بجزيئات الهواء الساكنة يمكن تغيير طوله بإضافة أنبوب آخر قطره أقل ، و طول هذا الأنبوب عند التجاوب يساوي عدداً صحيحاً من نصف طول الموجة. $L = n\frac{\lambda}{2}$ حيث : $n = 1,2,3, ...$

العمود الهوائي المغلق: هو أنبوب أسطواني الشكل ، مفتوح من طرف و مغلق من الطرف الآخر و المملوء بجزيئات الهواء الساكنة يمكن تغيير طوله بإضافة الماء ، و طول هذا الأنبوب عند التجاوب يساوي عدداً فردياً من ربع طول الموجة.

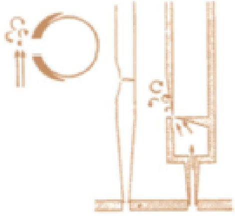
$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$ حيث: $n = 1,2,3 \dots \dots ..$

((المزمار))

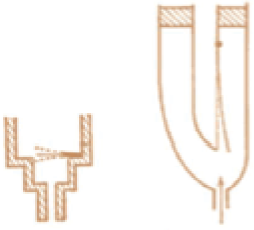
تعريف المزمار: أنبوبٌ أسطوانيٌّ أو موشوريٌّ، مقطعُه ثابتٌ وصغيرٌ بالنّسبة إلى طولِه، جدرانُه خشبيّةٌ أو معدنيّةٌ ثخينةٌ لكي لا تشارِكَ في الاهتزاز، يحتوي غازاً (الهواء غالباً)يهتزُّ بالتّجاوُبِ معَ المنبع الصّوتي للمِزمار

تُصنَّفُ المنابعُ الصَّوتيّةُ إلى نوعَين:

١- المنبعُ ذو الفم:
وهو نهايةُ غرفةٍ صغيرةٍ مفتوحةٍ يُدفَعُ فيها الهواء وينساقُ ليخرجَ من شقٍّ ضيّقٍ، ويتشكَّلُ عندَ الفم بطنُ اهتزازٍ (عقدة ضغط.)


منبع ذو فم

٢- المنبعُ ذو لِسان:
يتألّفُ من صفيحةٍ مرنةٍ تُدعَى اللّسان قابلةً للاهتزازِ، مُثبّتةً من أحدِ طرفَيها تقطعُ جريانَ الهواء، لها تواتُر المَنبع، ويتشكّلُ عندَ اللّسان عقدةُ اهتزاز(بطن ضغط.)


منبع ذو لسان

تعليلُ الأمواجِ المُستقِرَّة الطوليّة في أنبوبِ هواءِ المِزمار:
عندَما تهتزُّ طبقةُ الهواء المُجاوِرة للمنبع ينتشرُ هذا الاهتزاز طولياً في هواءِ المِزمار كلّه لينعكسَ على النهاية.
تتداخلُ الأمواجُ الواردةُ معَ الأمواجِ المُنعكِسة داخل الأنبوب لتؤلِّفَ جملةَ أمواجٍ مُستقِرَّة طولية، ويتكوَّنُ عندَ النّهاية المُغلَقة عقدةٌ للاهتزاز، أمَّا عندَ النّهاية المفتوحة يتكوَّنُ بطنٌ للاهتزاز .ونعلِّلُ ذلك :بأنّ الانضغاط الوارد إلى طبقة الهواء الأخيرة يزيحُها إلى الهواء الخارجيّ، فتُسبِّبُ انضغاطاً فيه، وتخلخُاً وراءَها يستدعي تهافُتَ هواءِ المِزمار ليملأَ الفراغ، وينتُجُ عن ذلك تخلخلٌ ينتشرُ من نهايةِ المِزمار إلى بدايته، وهو مُنعكِسُ الانضغاط الوارد.

تُقسَمُ المزاميرُ من النّاحية الاهتزازيّة إلى نوعَين:

١- **مُتشابِهةُ الطّرفَين:** منبعٌ ذو فمٍ يتشكّلُ عندَه بطن اهتزاز ونهايته مفتوحة يتشكّلُ عندَها بطن اهتزاز، أو منبع ذو لسان تتشكّلُ عندَه عقدة اهتزاز ونهايته مغلقة يتشكّلُ عندَها عقدة اهتزاز.

٢- **مُختلِفةُ الطّرفَين:** منبعٌ ذو فم يتشكّلُ عندَهُ بطنُ اهتزازٍ ونهايتُه مُغلَقة تتشكّلُ عندَها عقدةُ اهتزازٍ، أو منبعٌ ذو لسانٍ تتشكّلُ عندَه عقدةُ اهتزازٍ ونهايتُه مفتوحة يتشكّلُ عندَها بطنُ اهتزاز.

أولاً :المِزمارُ مُتشابِهُ الطَّرفَين:

يُبيّنُ الشَّكلُ عقدَ وبطونَ الاهتزاز في مزمارٍ مُتشابِهِ الطّرفَين، وفيه يكونُ طولُ المزمار L يساوي عدداً صحيحاً من نصفِ طولِ الموجة .نلاحظُ من الشكل أنّ طول المزمار L يساوي تقريباً:

$\frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}$ حيث: $n = 1,2,3 \dots \dots ..$

أي:

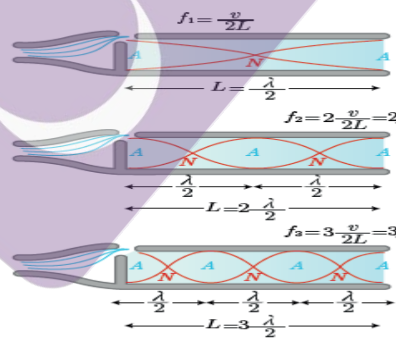
$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

$$v = \lambda f \qquad L = n\frac{v}{2f}$$

$$f = n\frac{v}{2L}$$

ولكي يُصدرَ المزمارُ مدروجاته المُختلِفة نزيدُ بفخِ الهواء فيه تدريجيّاً،

كما يُمكِنُ إصدارُ مدروجات المِزمار ذي اللّسان بتغيير طولِ اللّسان



ثانياً : المزمار مختلف الطرفين:

يُبيّن الشكل عقداً وبطونَ الاهتزاز في مزمار مختلف الطرفين، وفيه يكونُ طول المزمار Lيساوي عدداً فردياً من ربع طول الموجة.

نلاحظ من الشكل أنّ طول المزمار L يساوي تقريبا:

$\frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}$

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

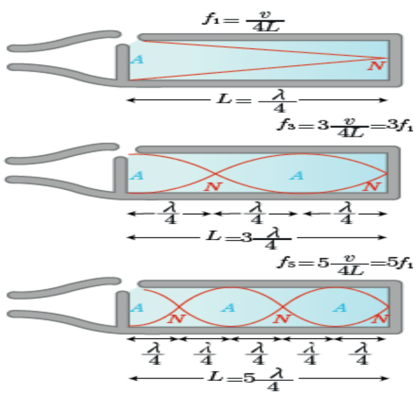
لكن

$$v = \lambda f$$

$$L = (2n-1)\frac{v}{4f}$$

$$f = (2n-1)\frac{v}{4L}$$

$(2n-1)$ يمثل رتبة صوت المزمار (مدروجات الصوت)



ملاحظات:

١- تواتُرُ الصَّوت الأساسيّ الذي يُصدِرُه مِزمارٌ يتناسبُ طرداً معَ سرعةِ انتشارِ الصَّوتِ في غازِ المِزمار .ويُمكِنُ تغييرُ هذه السّرعة بزيادةِ درجةِ حرارةِ الغاز أو تغيير طبيعتِه.

٢- تدلُ التَّجاربُ على أنّ سرعةَ انتشارِ صوتٍ في الغازات:

a- تتناسبُ سرعةُ انتشارِ الصَّوتِ في غازٍ مُعيَّنٍ طرداً معَ الجذرِ التّربيعيّ لدرجةِ حرارتِه المُطلَقة(T كلفن):

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

حيث: $T(K) = 273 + t(^\circ C)$

b- تتناسبُ سرعتا انتشارِ الصَّوت في غازَين مُختلِفَين عكساً مع الجذرِ التّربيعي لكثافتَيهما بالنّسبةD1,D2 للهواء، إذا كانَ الغازان في درجةِ حرارةٍ واحدة، ولهما رتبةٌ ذريّةٌ واحدة(أي عددُ الذّرَّات الّتي تُؤلّفُ جُزيْئته هي نفسُها .) أي : $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{D_2}}{\sqrt{D_1}} = \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}}$:

M: الكتلة الموليّة للغاز (الكتلة الجزيئيّة الغراميّة)

تُعطى كثافةُ غازٍ بالنّسبةِ للهواء بالعلاقة: $D = \frac{M}{29}$

أجب عن الأسئلة الآتية:

١- كيف نجعل مزماراً ذا لسان مختلف الطرفين من الناحية الاهتزازية؟

نجعل مزمار ذا لسان مختلف الطرفين من الناحية الاهتزازية بجعل نهايته مفتوحة.

٢- علل ما يأتي:

a. **لا يحدث انتقال للطاقة في الأمواج المستقرة كما في الأمواج المنتشرة؟**

لإن الأمواج الواردة والأمواج المنعكسة تنقل الطاقة في اتجاهين متعاكسين

b. تسمى الأمواج المستقرة بهذا الاسم؟

لأن نقاط الوسط تهتز مراوحة في مكانها فتأخذ شكلاً ثابتاً وتظهر ساكنة.

٣- في الأمواج المستقرة العرضية، هل يهتز البطن الأول والبطن الثالث على توافق أم على تعاكس فيما بينهما.

يهتزان على توافق فيما بينهما لإن فرق المسير بينهما ($\Delta = \lambda$).

ملاحظات:

١- تتناسب سرعة انتشار الصوت في غاز معين طرداً مع الجذر التربيعي لدرجة حرارته المطلقة

$$\frac{v}{v`} = \sqrt{\frac{T}{T`}} \quad \text{حيث} \quad T = t(c) + 273$$

٢- تتناسب سرعتا انتشار الصوت في غازين مختلفين عكساً مع الجذر التربيعي لكثافتيهما بالنسبة للهواء، إذا كان الغازان في درجة حرارة واحدة ولهما رتبة ذرية واحدة

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

حيث $D = \frac{M}{29}$ حيث (D) كثافة الغاز بالنسبة للهواء و (M) الكتلة المولية للغاز

٣- عندما نذكر عبارة صوت مواقت أو يصدر نفس الصوت.

$(f' = f)$

٤- عندما نذكر عبارة نفس درجة الحرارة (أي درجة الحرارة لم تتغير) $(v = v')$ ***الا: إذا غيرنا الغاز***

٥- لحساب عدد أطوال الموجه $= \frac{L}{\lambda}$

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- الإجابة الصحيحة: $b) \ \frac{\lambda}{2}$

٢- الإجابة الصحيحة:(d $\varphi = \pi$

٣- الإجابة الصحيحة: $a) \ 4L$

توضيح اختيار الإجابة:

$$L=(2n-1)\frac{\lambda}{4} = (2 \times 1 - 1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 4L$$

٤- الإجابة الصحيحة: $c) \ 2V$

توضيح اختيار الإجابة:

$$v = \sqrt{\frac{F_t}{\mu}} \text{ ، } V' = \sqrt{\frac{4F_T}{\mu}} = 2\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = 2v$$

٥- الإجابة الصحيحة: $b) \ \mu$

توضيح اختيار الإجابة:

$$\mu = \frac{m}{L} \text{ ، } \mu' = \frac{\frac{m}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{m}{L} = \mu$$

٦- الإجابة الصحيحة: $c) \ 200cm$

توضيح اختيار الإجابة :

$$L = 3\frac{\lambda}{4} = 150 \Rightarrow \lambda = 200cm$$

٧- الإجابة الصحيحة: $b) \quad L = \frac{\lambda}{2}$

توضيح اختيار الإجابة:

$$L = n\frac{\lambda}{2} = 1 \times \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

٨- الإجابة الصحيحة: $a) \quad L = \frac{\lambda}{4}$

توضيح اختيار الإجابة :

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = (2 \times 1 - 1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4}$$

٩- الإجابة الصحيحة: $b) \quad v_1 = 2v_2$

توضيح اختيار الإجابة:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\frac{F_T}{\mu_1}}{\frac{F_T}{\mu_2}}} \qquad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\rho.\pi r_2^2}{\rho.\pi r_1^2}} \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$r_2 = 2r_1 \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

١٠- الإجابة الصحيحة:

١١- $a) \quad f = \frac{v}{2L}$

توضيح اختيار الإجابة:

$$L = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{v}{2f} \Rightarrow f = n\frac{v}{2L} \text{ ،}$$

$$n = 1 \Rightarrow f = \frac{v}{2L}$$

الإجابة الصحيحة: (b بطن اهتزاز

الإجابة الصحيحة: $b) \quad L = 2L'$

توضيح اختيار الإجابة:

$f_1 = \frac{v}{2L}$ متشابه الطرفين ،

$f'_1 = \frac{v'}{4L}$ مختلف الطرفين

الشروط نفسها أي $v' = v$ و منه:

$$2L = 4L' \Rightarrow L = 2L'$$

١٢- الإجابة الصحيحة: $d) \ 1305\ Hz$

توضيح اختيار الإجابة:

$$f = (2n-1)\frac{v}{4L} = (2n-1)f_1$$

$$f = (2 \times 2 - 1) \times 435 = 1305\ Hz$$

١٣- الإجابة الصحيحة: $a) \ 435$

توضيح اختيار الإجابة:

$$L = k\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2 = 4\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 1\ m$$

١٤- الإجابة الصحيحة:(b

$$v_1 = 4v_2$$

توضيح اختيار الإجابة:

$$\frac{vH_2}{vO_2}=\frac{\sqrt{Do_2}}{\sqrt{D_{H_2}}}=\frac{\sqrt{\frac{M_{O_2}}{29}}}{\sqrt{\frac{M_{H_2}}{29}}}=\frac{\sqrt{\frac{32}{29}}}{\sqrt{\frac{2}{29}}}=$$

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\frac{4}{1}$$

$$v_{H_2}=4v_{O_2}$$

الإجابة الصحيحة: $b)$ مثلي المسافة بين بطنين متتاليين أو عقدتين متتاليتين.

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية (١+٢)

٣- نُثبت بإحدى شعبتي رنانة كهربائية تواترها f طرف وتر طوله مناسب ومشدود بثقل مناسب كتلته m لتتكون أمواج مستقرة عرضية بثلاثة مغازل ولكي نحصل على مغزلين نجري التجربتين الآتيتين:

a). نستبدل الرنانة السابقة برنانة أخرى تواترها $\grave{f}$ مع الكتلة السابقة نفسها m استنتج العلاقة بين التواترين f ، $\grave{f}$

b). نستبدل الكتلة السابقة m بكتلة أخرى $\acute{m}$ مع الرنانة السابقة نفسها f استنتج العلاقة بين الكتلتين m ، $\acute{m}$.

$$(a-\quad \frac{f}{f`}=\frac{\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}{\frac{n`}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}\qquad \frac{f}{f`}=\frac{n}{n`}$$

$$\frac{f}{f`}=\frac{3}{2}\Longrightarrow f`=\frac{2f}{3}$$

$$(b\quad \frac{f}{f}=\frac{\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}{\frac{n`}{2L}\sqrt{\frac{F`_T}{\mu}}}$$

$$1=\frac{n.\sqrt{m.g}}{n`.\sqrt{m`.g}}$$

نربع $1=\frac{3.\sqrt{m}}{2.\sqrt{m`}}$

$$1=\frac{9.m}{4.m`}\Longrightarrow m`=\frac{9.m}{4}$$

٤- نكشف عن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ بهوائي مستقبل نضعه موازياً للهوائي المرسل

و يتم ذلك بوصل طرفي الهوائي المستقبل براسم اهتزاز مهبطي و تغيير طول الهوائي حتى يرسم على الشاشة خط بياني بسعة عظمى فيكون أصغر طول للهوائي المستقبل مساوياً $\frac{\lambda}{4}$

نكشف عن الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ بحلقة نحاسية عمودية على $\vec{B}$ فيولد فيها توتراً نتيجة تغير التدفق المغناطيسي الذي يجتازها.

٥- عدد المغازل يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لقوة شد الوتر $n\sqrt{F_T}=const$

$$n'\sqrt{F`_T}=const$$

$$\frac{n}{n'}=\frac{\sqrt{F`_T}}{\sqrt{F_T}}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{\sqrt{F`_T}}{\sqrt{F_T}}\Rightarrow\frac{9}{25}=\frac{F`_T}{F_T}\Rightarrow F`_T=\frac{9}{25}F_T$$

أي يجب أن ننقص قوة الشد

تطبيق:

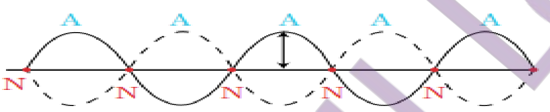
وتر مشدود طوله $L=1m$ كتلته $m=6g$ مشدود بقوة F_T يهتز بالتجاوب مع رنانة تواترها $f=50HZ$ مكوناً خمسة مغازل المطلوب حساب:

1: الكتلة الخطية للوتر.

2: قوة شد الوتر F_T المطبقة على الوتر.

3: سرعة انتشار الاهتزاز العرضي على طول الوتر.

4: عدد أطوال الموجة المتكونة.



الحل: 1

$$\mu=\frac{m}{L}=\frac{6\times10^{-3}}{1}=6\times10^{-3}kgm^{-1}$$

2 عندما يهتز الوتر بالتجاوب يكون:

$$f=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$$F_T=\frac{4L^2F^2\mu}{n^2}=\frac{4\times(1)^2\times(50)^2\times6\times10^{-3}}{(5)^2}$$

$$F_T=2.4N$$

$$v=\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}=\sqrt{\frac{2.4}{6\times10^{-3}}}\quad 3$$

4

عدد أطوال الموجة $=\frac{L}{\lambda}=\frac{L\,f}{v}=\frac{1\times50}{20}=2.5$

المسألة الأولى: إذا كانت سرعة انتشار الصوت في الهواء $v = 331\ ms^{-1}$ ، بدرجة 0^0C احسب سرعة انتشارالصوت في الدرجة $t = 27^0\ C$

$v` = ?\ , t` = 27^0C$

$$\frac{v`}{v} = \sqrt{\frac{T`}{T}} = \sqrt{\frac{t`+273}{t+273}} = \sqrt{\frac{27+273}{0+273}}$$

$$\frac{v`}{331} = \sqrt{\frac{300}{273}} \Rightarrow v` = 331 \times 1.048$$

$$v` = 347\ m.s^{-1}$$

المسألة الثانية: يُصدر أنبوب صوتي مختلف الطرفين صوتاً أساسياً تواتره $f = 435HZ$ فما تواترات الأصوات الثلاثة التي تليه؟

الحل:أنبوب صوتي مختلف الطرفين:

صوت أساسي: $f = 435\ Hz\ , n = 1$

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} \longrightarrow L = (2n-1)\frac{v}{4f}$$

$$f = (2n-1)\frac{v}{4L}$$

صوت أساسي (مدروج أول) $n = 1 \Leftarrow$

$$f_1 = (2\times 1-1)\frac{v}{4L} \Rightarrow f_1 = \frac{v}{4L} = 435\ Hz$$

$$f = (2n-1)f_1 \Rightarrow f = (2n-1)\times 435$$

$$n = 1,2,3,4 \dots\dots$$

$$n = 2 \ \Rightarrow f_2 = (2\times 2-1)\times 435$$

$f_2 = 3\times 435 = 1305\ Hz$ (المدروج الثالث)

$$n = 3 \ \Rightarrow f_3 = (2\times 3-1)\times 435$$

$f_3 = 5\times 435 = 2175\ Hz$ (المدروج الخامس)

$$n = 4 \ \Rightarrow f_4 = (2\times 4-1)\times 435$$

$f_4 = 7\times 435 = 3045\ Hz$ (المدروج السابع)

المسألة الثالثة: يُصدر وتر صوتاً أساسياً تواتره $250Hz$ ننقص طول الوتر حتى النصف $(\acute{L} = \frac{L}{2})$ ونزيد قوة الشد حتى مثليها $(\acute{F}_T = 2F_T)$ كم يصبح تواتر صوته الأساسي ؟

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad \Leftarrow \quad n = 1$$

$$f` = \frac{1}{2L`}\sqrt{\frac{F_T`}{\mu}} = \frac{1}{2\times\frac{L}{2}}\sqrt{\frac{2F_T}{\mu}}$$

$$f` = 2\sqrt{2}\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \Rightarrow f` = 2\sqrt{2}f$$

$$f` = 2\sqrt{2}\times 250 = 500\sqrt{2} = 707\ Hz$$

المسألة الرابعة: تهتّز رنّانة تواترها $f = 340\ HZ$ فوق عمود هوائي مغلق ، حدّد البعد الذي يحدث عنده الرنين الأول عندما تكون درجة حرارة الهواء $t = 20^0C$ ، حيث سرعة انتشار الصوّت في هذه الحالة $v = 340\ m.s^{-1}$

الحل:

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

$$n = 1 \ \Rightarrow L_1 = \frac{\lambda}{4} = \frac{v}{4f}$$

$$L_1 = \frac{340}{4\times 440} = \frac{34}{4\times 44} = 0.19\ m$$

المسألة الخامسة: استعملت رنانة تواترها $f = 445HZ$ فوق عمود رنين مغلق لتحديد سرعة انتشار الصوت في غاز الهيليوم. فإذا كان البُعد بين صوتين شديدين متتاليين (رنينين مُتعاقبين) $L = 110cm$ احسب سرعة انتشار الصوت في غازالهيليوم.

الحل:

البعد بين صوتين شديدين متتالين $= \frac{\lambda}{2}$

$$\Rightarrow L = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} \Rightarrow v = 2fL$$

$$v = 2\times 445\times 1.1 = 979\ m.s^{-1}$$

المسألة السادسة: وتر طوله $L = 0.7m$ وكتلته $m = 7\ g$ شد بقوة قدرها $F_T = 49N$ والمطلوب حساب تواتر صوته الأساسي ؟

الحل:

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{m}{L} \Rightarrow \mu = \frac{7\times 10^{-3}}{7\times 10^{-1}} = 10^{-2}\ kg.m^{-1}$$

$$f = \frac{1}{2\times 7\times 10^{-1}}\sqrt{\frac{49}{10^{-2}}} = \frac{100}{2} = 50\ Hz$$

المسألة السابعة: تهتز شعبتا رنانة كهربائية بتواتر $f = 30HZ$ نصل إحدى الشعبتين بخيط مرن طوله $L = 2m$

① يشد الخيط بقوة شدتها $F_T = 7.2N$ فيهتز مكوناً مغزلاً واحداً. استنتج كتلة الخيط.

② : احسب قوتي الشد التي تجعل الخيط يهتز بمغزلين ثم بثلاث مغازل

الحل:

-١

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\frac{m}{L}}} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T\,L}{m}}$$

$$f^2 = \frac{n^2}{4L^2}\times\frac{F_T\,L}{m} \Rightarrow m = \frac{n^2\times F_T}{4L\times f^2}$$

$$m=\frac{1\times 7.2}{4\times 2\times 900}=10^{-3}\text{kg}$$

2-الرنانة لم تتغير أي $f = const$

$$f=\frac{n}{2n}\sqrt{\frac{F_T\times L}{m}}$$

$$n=2\Rightarrow 30=\frac{2}{2\times 2}\sqrt{\frac{F_T\times 2}{10^{-3}}}=1.8\text{ N}$$

$$n=3\Rightarrow 30=\frac{3}{2\times 2}\sqrt{\frac{F_T\times 2}{10^{-3}}}=0.8\text{ N}$$

المسألة الثامنة:

احسب سرعة انتشار اهتزاز عرضي في وتر قطر مقطعه $0.1mm$ وكثافة مادته 0.8 ، مشدود بقوة شدتها $F_T=100\pi N$

الحل:

$$\text{الكثافة } D=\frac{\rho_{\text{مادة}}}{\rho_{\text{ماء}}}$$

$$\rho_{\text{مادة}}=D\times\rho_{\text{ماء}}=0.8\times 1000$$
$$=800\text{ kg}.m^{-3}$$

$$\mu=\rho s=\rho\pi r^2=2\pi\times 10^{-6}\text{ kg}.m^2$$

$$v=\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}=\sqrt{\frac{100\pi}{2\pi\times 10^{-6}}}=5000\sqrt{2}\,m.s^{-1}$$

المسألة التاسعة:

إذا كانت سرعة انتشار الصوت في الهواء $(v=330\,m.s^{-1})$ والمطلوب :

١ – أحسب تواتر الصّوت الأساسي الذي يصدره عمود هوائي طوله $(L=2m)$ إذا كان مغلقاً" ، ثم إذا كان مفتوحاً"

٢ – أحسب تواتر المدروج الثالث في كل حالة

الحل:

الحالة الأولى: العمود النهائي مغلق (مختلف الطرفين)

$$L=(2n-1)\frac{\lambda}{4}=(2n-1)\frac{v}{4f}$$

$$\Rightarrow f=(2n-1)\frac{v}{4L}$$

١- صوت أساسي $n=1 \Leftarrow$

$$f=(2\times 1-1)\frac{330}{4\times 2}=41.25\text{ Hz}$$

2- المدروج الثالث: $(2n-1)=3 \Leftarrow$

$$f=3\times\frac{330}{4\times 2}=123.75\text{ Hz}$$

الحالة الثانية: العمود الهوائي مفتوح (متشابه الطرفين)

$$L=\frac{n\lambda}{2}=n\frac{v}{2f}\Rightarrow f=\frac{nv}{2L}$$

١- صوت أساسي $n=1 \Leftarrow$

$$f=\frac{1\times 330}{2\times 2}=82.5\text{ Hz}$$

2- المدروج الثالث: $n=3 \Leftarrow$

$$f=\frac{3\times 330}{2\times 2}=247.5\text{ Hz}$$

المسألة العاشرة:

وتر آلة موسيقية طوله $L=1m$ وكتلته $m=20g$ مثبت من طرفيه ومشدود بقوة $F_T=2N$

المطلوب:

1 - سرعة انتشار الاهتزاز على طول الوتر.

2 - تواتر الصوت الأساسي الذي يمكن أن يصدر عنه.

3 - التواترات الخاصة لمدروجاته الثلاثة الأولى.

الحل:

١- $v=\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$

$$\mu=\frac{m}{L}=\frac{2\times 10^{-2}}{1}=2\times 10^{-2}\text{ kg}.m^{-1}$$

$$v=\sqrt{\frac{2}{2\times 10^{-2}}}=10\text{ m}.s^{-1}$$

٢- $f=\frac{nv}{2L}$

تواتر الصوت الأساسي: $n=1$ (المدروج الأول)

$$f_1=\frac{1\times 10}{2\times 1}=5Hz$$

٣- التواترات الخاصة لمدروجاته الثلاثة الأولى:

المدروج الأول: $f=5\text{ Hz}$

المدروج الثاني: $n=2$

$$f_2=2\frac{v}{2L}=2f_1=2\times 5=10\text{ Hz}$$

المدروج الثالث: $n=3$

$$f_2=3\frac{v}{2L}=3f_1=3\times 5=15\text{ Hz}$$

المسألة الحادية عشر:

مزمار متشابه الطرفين L=1m يصدر صوتاً تواتره $f=170HZ$ يحوي هواء في درجة حرارة معينة حيث سرعة انتشار الصوت $v=340m.s^{-1}$

المطلوب:

1- احسب عدد أطوال الموجة التي يحويها المزمار.

2- احسب طول مزمار آخر مختلف الطرفين يحوي الهواء يصدر صوتاً أساسياً موافقاً للصوت السابق في درجة الحرارة نفسها.

الحل:

١- $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{340}{170}=2\text{ m}$

$$\text{عدد أطوال الموجة}=\frac{L}{\lambda}=\frac{1}{2}$$

٢- صوت أساسي $2n`-1=1$

موافقاً للصوت السابق له نفس التواتر.

في درجة الحرارة نفسها لها نفس السرعة.

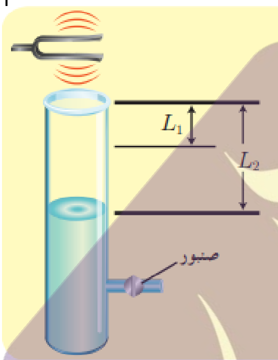
متشابهة $f = f$ مختلف

$$(2n` - 1)\frac{v}{4L`} = f \text{ متشابهة}$$

$$L` = \frac{1}{2}\ \text{m}$$

المسألة 27 عامة:

أنبوب أسطواني مملوء بالماء وله صنبور عند قاعدته تهتز رنانة فوق طرفه العلوي المفتوح وعند إنقاص مستوى الماء في الأنبوب سُمع صوت شديد يبعد مستوى الماء فيه عن طرفه العلوي بمقدار $L_1 = 17cm$ وباستمرار إنقاص مستوى الماء سُمع صوت شديد ثانٍ يبعد مستوى الماء فيه عن طرفه العلوي $L_2 = 49cm$ فإذا علمت أن سرعة انتشار الصوت في شروط التجربة $v = 340 m.s^{-1}$ احسب تواتر الرنانة المستخدمة.



الحل:

(عمود هوائي مختلف الطرفين) $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$

$$n = 1 \implies L_1 = \frac{\lambda}{4}$$

$$n = 2 \implies L_2 = 3\frac{\lambda}{4}$$

$$\Delta L = 3\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2} \implies \lambda = 2\Delta L = 2(49-17)$$

$$\lambda = 64\ \text{cm} = 0.64\ m$$

$$v = f\lambda \implies f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0.64} = 531.25\ \text{Hz}$$

المسألة 28 عامة:

مزمار ذو فم نهايته مفتوحة طوله L=3m فيه هواء درجة حرارته 0°C حيث سرعة انتشار الصوت فيه $v = 330 m.s^{-1}$ وتواتر الصوت الصادر F=110Hz

المطلوب:

1. احسب البعد بين بطنين متتاليين ثم استنتج رتبة الصوت.

2. نسخن المزمار إلى الدرجة t=819°C استنتج طول الموجة المتكونة ليصدر المزمار الصوت السابق.

3. احسب طول مزمار آخر ذي فم نهايته مغلقة يحوي الهواء في الدرجة 0°C تواتر مدروجه الثالث يساوي تواتر الصوت الصادر عن المزمار السابق (في الدرجة 0°C)

الحل:

١- $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{110} = 3\ \text{m}$

البعد بين بطنين متتاليين: $\frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2} = 1.5\ \text{m}$

استنتاج رتبة الصوت:

المزمار متشابه الطرفين أي n هي رتبة الصوت.

$$L = n\frac{\lambda}{2} \implies n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2(3)}{3} = 2$$

المدروج الثاني

٢- المزمار عند الدرجة: $t_1 = 0^0\text{C}$

$$T_1 = t_1 + 273 = 0 + 273 = 273^0\text{K}$$

المزمار عند الدرجة: $t_2 = 819^0\text{C}$

$$T_2 = t_2 + 273 = 819 + 273 = 1092^0\text{K}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \implies \frac{\lambda_1 f}{\lambda_2 f} = \sqrt{\frac{273}{1092}} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2} \implies \lambda_2 = 2\lambda_1 = 2(3) = 6\ \text{m}$$

٣- مزمار ذو فم A ونهايته مغلقة N أي المزمار مختلف الطرفين

$$t = 0^0\text{C} \implies \text{v} = 330\ m.s^{-1}$$

له نفس تواتر الصوت السابق $f = 110$ Hz

المدروج الثالث: $(2n` - 1) = 3$

متشابهة $f = f$

$$(2n` - 1)\frac{v}{4L`} = f \text{ متشابهة}$$

نعوض:

$$3 \times \frac{330}{4L`} = 110$$

$$L` = \frac{9}{4} = 2.25\ \text{m}$$

المسألة 29 عامة:

خيط مرن أفقي طوله $L = 1m$ وكتلته $m = 10g$ نربط أحد طرفيه برنانة كهربائية شعبتاها أفقيتان تواترها $f = 50HZ$ ونشد الخيط على محز بكرة بثقل مناسب لتكون نهايته مقيدة فإذا علمت أن طول الموجة المتكونة $40cm$ المطلوب:

1- ما عدد المغازل المتكونة على طول الخيط؟

2- احسب السعة بنقطة تبعد 20cm ثم بنقطة تبعد 30cm عن النهاية المقيدة للخيط إذا كانت سعة اهتزاز المنبع $Y_{max} = 1cm$

3- احسب الكتلة الخطية للخيط واحسب قوة شد هذا الخيط وسرعة انتشار الاهتزاز فيه.

4- احسب قوة شد الخيط التي تجعله يهتز بمغزلين وحدد أبعاد العقد ولبطون عن النهاية المقيدة في هذه الحالة.

١- نجعل طول الوتر نصف ما كان عليه هل تتغير كتلته الخطية باعتبار أنه متجانس.

الحل:

١- مغازل $L = n\frac{\lambda}{2} \implies n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2(1)}{0.4} = 5$

٢- $Y_{max} = 1\ \text{cm} = 0.01\ \text{m}$

لنقطة تبعد عن النهاية المقيدة $x_1 = 0.2\ \text{m}$

لنقطة تبعد عن النهاية المقيدة $x_2 = 0.3\ \text{m}$

$$Y_{max/n} = 2Y_{max}\left|\sin\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x}\right|$$

$x_1 = 0.2\ \text{m}$, منبع $Y_{max} = 0.01\ \text{m}$

$$Y_{max/n1} = 2\times10^{-2}\left|\sin\frac{2\pi}{0.4}\times0.2\right|$$

$$Y_{max/n1} = 2\times10^{-2}\sin\pi$$

$$Y_{max/n1} = 0$$

$$x_2 = 0.3\ \text{m}$$

أي n_1 عقدة اهتزاز.

$$Y_{max/n2} = 2\times10^{-2}\left|\sin\frac{2\pi}{0.4}\times0.3\right|$$

$$Y_{max/n2} = 2\times10^{-2}\left|\sin\frac{3\pi}{2}\right| = 2\times10^{-2}\ \text{m}$$

أي n_2 بطن اهتزاز.

٣- حساب الكتلة الخطيّة:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{10^{-2}}{1} = 10^{-2}\ \text{kg}.m^{-1}$$

نربع $f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$

$$f^2 = \frac{n^2}{4L^2}\cdot\frac{F_T}{\mu} \Rightarrow F_T = \frac{f^2\mu\,4L^2}{n^2}$$

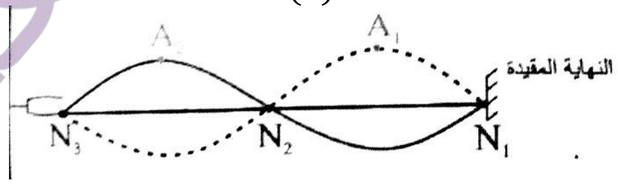
$$F_T = \frac{(50)^2\times10^{-2}\times4\times(1)^2}{(5)^2} = 4\ \text{N}$$

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{4}{0.01}} = 20\ \text{m}.s^{-1}$$

٤- التي تجعل الوتر يهتز بمغزلين $\Leftarrow n = 2$

$$F_T` = \frac{f^2\mu\,4L^2}{n^2}$$

$$F_T = \frac{(50)^2\times10^{-2}\times4\times(1)^2}{(2)^2} = 25\ \text{N}$$



فائدة: من الرسم نلاحظ:

- ثلاث عقد أي نعطي ثلاث قيم لـ n.
- بطنان أي نعطي قيمتين لـ n.

$$L = n\frac{\lambda`}{2} = 2\frac{\lambda`}{2} \Rightarrow \lambda` = 1\ \text{m}$$

لحساب أبعاد العقد N عن النهاية المقيدة:

$$x = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = \frac{n}{2}$$

العقدة الأولى: $n = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ \text{m}$

العقدة الثانية: $n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\ \text{m}$

العقدة الثالثة: $n = 2 \Rightarrow x_3 = 1\ \text{m}$

لحساب أبعاد البطون A عن النهاية المقيدة:

$$x = (2n+1)\frac{\lambda`}{4} = (2n+1)\frac{1}{4}$$

البطن الأول: $n = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}\ \text{m}$

البطن الثاني: $n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}\ \text{m}$

٥- نجعل طول الوتر نصف ما كان عليه:

$$\mu` = \frac{m`}{L`} = \frac{\frac{m}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{m}{L} = \mu$$

$$\mu = \mu` = 10^{-2}\ \text{kg}.m^{-1}$$

إذاً لا تتغير الكتلة الخطيّة للوتر عندما ننقص طوله.

المسألة 30 عامة:

وتر طوله $L = 1.5m$ وكتلته $m = 15g$ نجعله يهتز بالتجاوب بواسطة هزازة تواترها $f = 100HZ$ يتشكل فيه ثلاث مغازل. المطلوب:

1. حساب موجة الاهتزاز. ٢. الكتلة الخطية للوتر.
3. سرعة انتشار الاهتزاز في الوتر.
4. مقدار قوة الشد المطبقة على الوتر.
5. بعد أماكن عقد وبطون الاهتزاز عن نهايته المقيدة.

الحل:

١- $L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2\times1.5}{3} = 1\ \text{m}$

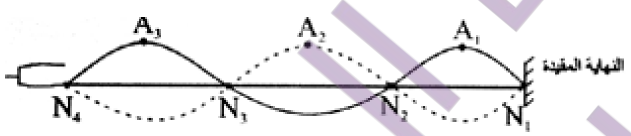
٢- $\mu = \frac{m}{L} = \frac{15\times10^{-3}}{1.5} = 10^{-2}\ \text{kg}.m^{-1}$

٣- $v = f\lambda = 100\times1 = 100\ \text{m}.s^{-1}$

٤- $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \Rightarrow F_T = \mu v^2 = 10^{-2}\times(100)^2$

$$F_T = 100\ \text{N}$$

٥-



فائدة من الرسم نلاحظ وجود:

- أربع عقد لذلك نعطي أربع قيم لـ n.
- ثلاثة بطون لذلك نعطي ثلاث قيم لـ n.

لحساب أبعاد العقد N عن النهاية المقيدة:

$$x = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = \frac{n}{2}$$

العقدة الأولى: $n = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ \text{m}$

العقدة الثانية: $n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\ \text{m}$

العقدة الثالثة: $n = 2 \Rightarrow x_3 = 1\ \text{m}$

العقدة الرابعة: $n = 3 \Rightarrow x_4 = \frac{3}{2}\ \text{m}$

لحساب أبعاد البطون A عن النهاية المقيدة:

$$x = (2n+1)\frac{\lambda`}{4} = (2n+1)\frac{1}{4}$$

البطن الأول: $n = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}\ \text{m}$

البطن الثاني: $n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}\ \text{m}$

البطن الثالث: $n = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{5}{4}\ \text{m}$

المسألة **31** عامة:

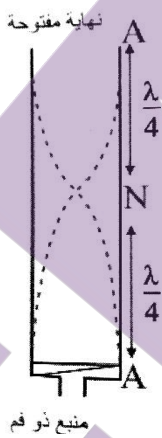
مزمار ذو فم نهايته مفتوحة طوله L=3.4m مملوء بالهواء يصدر صوتاً تواتره f=1000Hz حيث سرعة انتشار الصوت في هواء المزمار $v = 340 m.s^{-1}$ في درجة حرارة التجربة:

1- احسب عدد أطوال الموجة التي يحويها المزمار.

2- إذا تكونت داخله عقدة واحدة فقط في منتصف المزمار في الدرجة نفسها من الحرارة فاحسب تواتر الصوت البسيط عندئذ.

3 - إذا كانت سرعة انتشار الصوت في الهواء $v = 340 m.s^{-1}$ في الدرجة 0°C فاحسب درجة حرارة التجربة.

الحل:



١- $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{1000} = 0.34$ m

عدد أطوال الموجة $= \frac{L}{\lambda} = \frac{3.4}{0.34} = 10$

من الرسم نستنتج:

$$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

$$3.4 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = 2 \times 3.4 = 6.8 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{6.8} = 50 \text{ Hz}$$

٢-عندما تكون السرعة $v_2 = 340 \text{ m}.s^{-1}$

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{273+t_2}{273+t_1}}$$

$$\frac{340}{333} = \sqrt{\frac{273+t_2}{273+0}} \Rightarrow t_2 = 15^0\text{C}$$

المسألة 32عامة:

يصدر مزمار ذو فم نهايته مفتوحة صوتاً بإمرار هواء بدرجة $t = 15°C$ فيتكون داخله عقدتان للاهتزاز البعد بينهما $50cm$

المطلوب:

١- طول موجة صوت البسيط الصادر عن المزمار.

٢- طول المزمار.

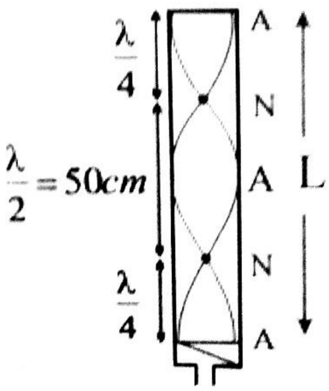
٣- تواتر الصوت البسيط الصادر عن المزمار.

٤- طول المزمار آخر ذي فم نهايته مغلقة يعطي في الدرجة t=15°C صوتاً أساسياً مواقتاً للصوت الصادر عن المزمار السابق.

سرعة انتشار الصوت في الهواء بالدرجة t=0°C تساوي $v = 331m.s^{-1}$

الحل:

١- مزمار ذو فم A ونهايته مغلقة N أي المزمار مختلف الطرفين



يتكون د: عقدتان تبعدان عن بعضهما 50 cm

علماً أنّ

$v` = 331 \text{ m}.s^{-1}$

عند الدرجة $t` = 0^0$C

من عقدة إلى عقدة تليها

$$\frac{\lambda}{2} = 50 \text{ cm}$$

$$\lambda = 100 \text{ cm} = 1\, m$$

٢- من الشكل:

$$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} = \lambda = 1 \text{ m}$$

طريقة ثانية: $L = n\frac{\lambda}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$ m

٣- عند الدرجة $t = 15^0$C

$$\frac{v}{v`} = \sqrt{\frac{T}{T`}} = \sqrt{\frac{273+t}{273+t`}} = \sqrt{\frac{273+15}{273+0}}$$

$$\frac{v}{331} = \sqrt{\frac{288}{273}} \Rightarrow v = 340 \text{ m}.s^{-1}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{1} = 340 \text{ Hz}$$

٤- مزمار ذو فم A ونهايته مفتوح N أي المزمار مختلف الطرفين:

عند الدرجة $t` = 15^0$C $\Leftarrow v = 340 \text{ m}.s^{-1}$

صوت أساسي $n = 1$

صوت مواقتاً للصوت السابق أي له نفس التواتر

$$L` = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = (2n-1)\frac{v}{4f}$$

الصوت أساسي أي $n = 1$

الصوتان متواقتان أي لهما نفس التواتر $f = 340$ Hz

$$L` = (2 \times 1 - 1) \times \frac{340}{4 \times 340} = 0.25 \text{ m}$$

المسألة 33 عامة:

1- لدينا مزمار متشابه الطرفين طوله $L = 3.32m$ يصدر صوتاً تواتره $f = 1024Hz$ وهو يحوي هواء بدرجة $t = 15°C$ بسرعة $v = 340m.s^{-1}$ احسب عدد أطوال الموجة التي يحويها المزمار.

2- نريد أن يحوي المزمار نصف عدد أطوال الموجة السابقة وهو يصدر الصوت السابق نفسه بتغيير درجة حرارة هوائه فقط لتصبح $\grave{t}$ احسب قيمة $\grave{t}$

3- إذا تكوّن في طرفي المزمار بطنان للاهتزاز وعقدة واحدة فقط في منتصفه بدرجة الحرارة t=15°C بتغيير قوة النفخ عند منبعه الصوتي. احسب تواتر الصوت الصادر عنه حينئذ

الحل:

١- عدد أطوال الموجة التي يحويها المزمار= $\frac{L}{\lambda}$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{1024} = 0.332 \text{ m}$$

عدد أطوال الموجة: $\frac{L}{\lambda} = \frac{3.32}{0.332} = 10$

٢- عدد أطوال الموجة الجديدة = 5

نفس الصوت أي نفس التواتر

بتغير درجة الحرارة $t`$ أي تتغير السرعة $v`$

$$\lambda` = \frac{L}{\text{عدد أطوال الموجة الجديدة}} = \frac{3.32}{5} = 0.664 \text{ m}$$

$$\frac{v`}{v} = \sqrt{\frac{T`}{T}} = \sqrt{\frac{273 + t`}{273 + t}}$$

$$\frac{f`\lambda`}{f\,\lambda} = \sqrt{\frac{273 + t`}{273 + 15}} \Rightarrow \frac{0.664}{0.332} = \sqrt{\frac{t` + 273}{288}}$$

$$4 = \frac{t` + 273}{288} \Rightarrow 4 \times 288 = t` + 273$$

$$t` = 1152 - 273 = 879^0\text{C}$$

٣- تكون في الطرفان بطنان للاهتزاز أي المزمار ذو فم نهاية مفتوحةعقدة واحدة في منتصفه $n = 1$

عند الدرجة $t = 15^0\text{C}$ أي $v = 340 \text{ m}.s^{-1}$

تغير قوة النفخ أي تغير التواتر

$$L = n\frac{\ddot{\lambda}}{2} \Rightarrow \ddot{\lambda} = \frac{2L}{n}$$

عقدة واحدة في منتصفه $n = 1$

$$\ddot{\lambda} = \frac{2 \times 3.22}{1} = 6.64 \text{ m}$$

$$v = f`\ddot{\lambda} \Rightarrow f` = \frac{v}{\ddot{\lambda}} = \frac{340}{6.64} = 51.2 \text{ Hz}$$

المسألة 34 عامة:

استعمل عمود هوائي مغلق لقياس سرعة انتشار الصوت بوساطة رنانة تواترها $f = 392Hz$ فسُمع أول صوت شديد عندما كان طول عمود الهواء مساوياً $L_1 = 23.15cm$ وسُمع الصوت الشديد الثاني عندما كان طول عمود الهواء مساوياً $L_2 = 66.3cm$ احسب سرعة انتشار الصوت في هذه الحالة. هل درجة الحرارة في العمود الهوائي أكبر أم أصغر من درجة حرارة الغرفة؟ (والتي تساوي $t = 20°C$)

الحل:

عمود هوائي مغلق

$f = 392Hz$ $\quad L_1 = 21cm$

احسب سرعة انتشار الصوت $\quad L_2 = 65.3cm$

- عند سماع أول صوت شديد $L_1 = \frac{\lambda}{4}$

- عند سماع ثاني صوت شديد $L_2 = 3\frac{\lambda}{4}$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 3\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\rightarrow \Delta L = 65.3 - 21 = 44.3cm$$

$$\Delta L = 0.443m$$

لكن $\Delta L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$

$$\lambda = 2 \times 0.443 = 0.886m$$

$$v = \lambda.f = 0.886 \times 392 = 347.3$$

سرعة انتشار الصوت في الدرجة $20°$ هي تقريباً $340m.s^{-1}$

$$t_{\text{في العمود}} > t_{\text{في الغرفة}} \Leftarrow v_{\text{في العمود}} > v_{\text{في الغرفة}}$$

درجة الحرارة في العمود الهوائي أكبر من درجة حرارة الغرفة لإنّ سرعة انتشار الصوت في الهواء عند الدرجة $t = 20^0\text{C}$ أي $v = 343 \text{ m}.s^{-1}$

المسألة 35 عامة:

مزمار ذو فم نهايته مغلقة يحوي غاز الأكسجين سرعة

انتشار الصوت فيه $v = 324m.s^{-1}$ يصدر صوتاً أساسياً وتواتره $f = 162Hz$

1- احسب طول هذا المزمار.

2- نستبدل بغاز الأكسجين في المزمار غاز الهيدروجين في درجة الحرارة نفسها احسب تواتر الصوت الأساسي الذي يصدره هذا المزمار في هذه الحالة.

الحل:

١- $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = (2n-1)\frac{v}{4f}$

$$L = (2\times 1-1)\times\frac{324}{4\times 162} = 0.5 \text{ m}$$

٢- $\frac{v_{H_2}}{v_{O_2}} = \sqrt{\frac{D_{O_2}}{D_{H_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{M_{O_2}}{29}}{\frac{M_{H_2}}{29}}} = \sqrt{\frac{M_{O_2}}{M_{H_2}}}$

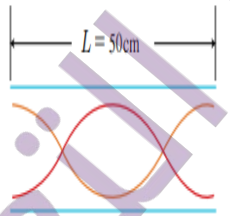
$$\frac{v_{H_2}}{v_{O_2}} = \sqrt{\frac{16\times 2}{1\times 2}} = 4$$

$$v_{H_2} = 4\, v_{O_2} = 4\times 324 = 1296 \text{ m}.s^{-1}$$

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = (2n-1)\frac{v_{H_2}}{4f_{H_2}}$$

$$f_{H_2} = (2n-1)\frac{v_{H_2}}{4L}$$

$$f_{H_2} = [2(1)-1]\frac{1296}{4(0.5)} = 648 \text{ Hz}$$



تطبيق:

أنبوب هوائي مفتوح الطرفين طوله $L = 50cm$ يُصدر الرنين الثاني باستخدام رنانة تواترها غير معلوم. فإذا كانت سرعة انتشار الصوت في شروط التجربة $v = 340m.s^{-1}$ احسب تواتر الرنانة.

الحل:

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

$$0.5 = 2\frac{\lambda}{2} = \lambda = 0.5m$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0.5} = 680HZ$$

تطبيق:

1- يبلغ طول القناة السمعية في الأذن البشرية $L = 3cm$ والتي تؤدي إلى غشاء الطبل وهي عبارة عن عمود هوائي مغلق، فإذا علمت أن سرعة انتشار الصوت في القناة $v = 348m.s^{-1}$ أوجد قيمة أصغر تواتر يحدث عنده التجاوب (الرنين الأول).

2- إذا علمت أن الضغط الناتج عن محادثة عادية $P = 0.02Pa$ ومساحة غشاء الطبل $S = 0.50cm^2$ أوجد القوة الضاغطة المؤثرة في غشاء الطبل.

الحل:

1- القناة السمعية هي أنبوب مغلق

$$v = 348m.s^{-1}$$

رنين أول $\Leftarrow$ $L = \frac{\lambda}{4}$

$$\lambda = 4L = 4\times 0.03 = 0.12m$$

-2

$$v = \lambda\, f \Longrightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{348}{0.12} = 2900HZ$$

$$F = P.S = 0.02\times 0.5\times 10^{-4} = 10^{-6}N$$

سيتبع أوراق عمل مع شرح طريقة حلها