مراجعة عامة:

- **تقسم المقادير الفيزيائية إلى قسمين:**

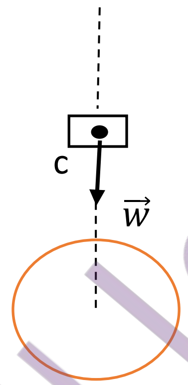
مقادير عددية (سُلمية):
هي المقادير التي تتحدد بقيمتها مع الواحدة
أمثلة: الكتلة: (m) واحدتها (kg)
المسافة: (d) واحدتها (m)
شدة التيار: I واحدتها (A)

مقادير شعاعية:
هي المقادير التي تتحدد باتجاهها أيضاً بالإضافة إلى القيمة والواحدة
أمثلة: القوة: $\vec{F}$
السرعة: $\vec{v}$
التسارع: $\vec{a}$

الشعاع يتحدد بأربع عناصر: 1) نقطة التأثير 3) الجهة
2) الحامل 4) الشدة

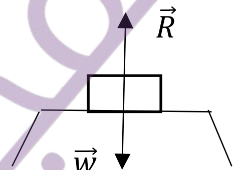
- **قوة ثقل الجسم:** هي قوة جذب الأرض لهذا الجسم.

عناصرها:
1) نقطة التأثير: هو مركز عطالة الجسم
2) الجهة: نحو مركز الأرض
3) الحامل: الشاقول المار من مركز عطالة الجسم
4) الشدة: $w = mg$



- **مبدأ العطالة (قانون نيوتن الأول):**

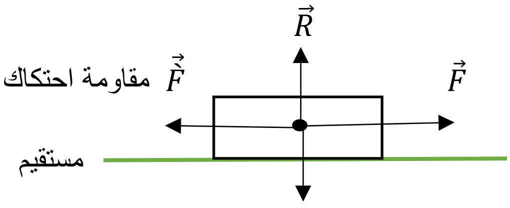
الجسم الساكن يبقى ساكن والجسم المتحرك ستكون حركته مستقيمة منتظمة إذا لم تؤثر عليه قوى خارجية



$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

شرط التوازن الانسحابي

شعاع صفري



$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

يستخدم إذا كان الجسم ساكن أو متحرك بحركة مستقيمة منتظمة.

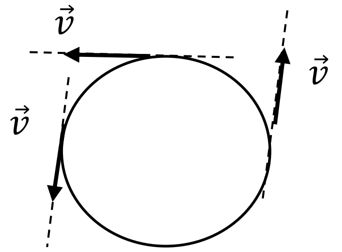
أما إذا كان الجسم يتحرك بتسارع:

نستخدم العلاقة المعبرة عن قانون نيوتن الثاني:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

وهي العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي

سما المجد التعليمية



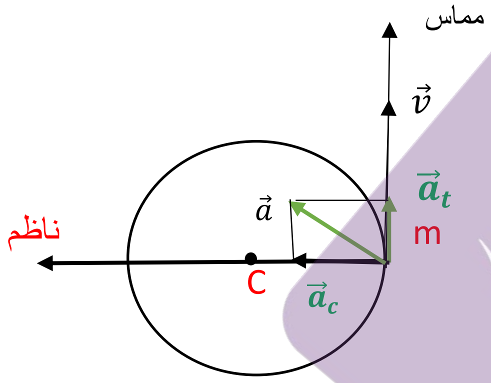
في الحركة الدائرية شعاع السرعة محمول على المماس

فهو ليس ثابت حاملاً وجهةً

أما:

في الحركة المستقيمة

شعاع السرعة ثابت حاملاً وجهةً



- يتحلل شعاع التسارع إلى شعاعين:

① شعاع التسارع المماسي $\vec{a}_t$ حامله المماس.

② شعاع التسارع الناظمي $\vec{a}_c$ حامله الناظم وجهته نحو مركز المسار

$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$ وقيمته تُحسب من: $a^2 = a_c^2 + a_t^2$

$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$

1- شعاع التسارع المماسي: $\overrightarrow{a_t}$

يُعبر عن تغير القيمة الجبرية لشعاع السرعة بتغير الزمن.

$\boldsymbol{a_t = (v)'_t}$

انعدامه | وجوده

- الحركة منتظمة: $v = const$ سرعتها ثابتة $\boldsymbol{(v)'_t = 0}$ $\boldsymbol{a_t = 0}$
- الجسم الساكن: $v = 0$ ، $a_t = 0$
- حركة متغيرة بانتظام: $a_t = const \neq 0$
- متغيرة بلا انتظام: $a_t \neq const \neq 0$

(كل حركة منتظمة يكون فيها a_t معدوم)، التسارع المماسي يحدد لنا طبيعة الحركة

2- شعاع التسارع الناظمي ($\overrightarrow{a_c}$)

يُعبر عن تغير حامل شعاع السرعة بتغير الزمن.

يعطى بالعلاقة $\boldsymbol{a_c = \dfrac{v^2}{r}}$

- وجوده فقط في الحركات الدائرية والمنحنية.
- انعدامه في الحركة المستقيمة.

(كل حركة مستقيمة يكون فيها a_c معدوم) ، التسارع الناظمي يحدد لنا شكل المسار.

أولاً: الحركة المستقيمة المنتظمة:

$a_c = 0$ سرعتها ثابتة

$a_t = 0$

$\Longrightarrow a = 0$

تابعها الزمني: هو تابع من الدرجة الأولى بالنسبة للزمن

$$\boldsymbol{x = vt + x_0}$$

x : فاصلة في اللحظة t

x_0 : فاصلة ابتدائية (في اللحظة $t = 0$)

v, x_0 ثوابت

ثانياً: الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام:

$$a_c = 0 \qquad a_t = (v)'_t = const$$

$$a = a_t = (v)'_t$$

تابعها الزمني من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن:

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}$$

x : فاصلة في اللحظة t

x_0: فاصلة ابتدائية (موضع الجسم في لحظة البدء)

تمرين: متحرك بحركة مستقيمة تابعها الزمني : $\boldsymbol{x = 2t^2 + 3t - 1}$

1- ما نوع الحركة ولماذا وحدد قيم الثوابت.

بما أن التابع الزمني من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن فهي حركة مستقيمة متغيرة بانتظام

$$x = 2t^2 + 3t - 1$$

بالموازنة مع الشكل العام:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

نجد:

$$\frac{1}{2}a = 2 \implies a = 4m.s^{-2}$$

$$v_0 = 3m.s^{-1}$$

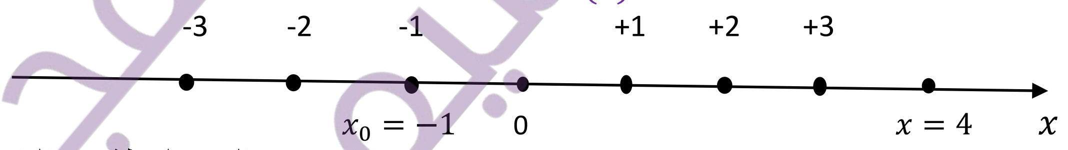
$$x_0 = -1$$

2- حدد موضع الجسم (فاصلة الجسم) في اللحظات التالية:

لحظة البدء $t = 0 \implies x = -1m$

$t = 1(s) \Rightarrow x = 2(1)^2 + 3(1) - 1 = 4m$

$t = 2(s) \Rightarrow x = 8 + 6 - 1 = 13m$



هي نفسها موضع الجسم لحظة بدء الدارسة

ثالثاً: الحركة الجيبية الانسحابية:

تابعها الزمني من الشكل:

$$x = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ثوابت الحركة

تذكرة رياضية: الاشتقاق:

قواعد اشتقاق:

1 مشتق العدد الثابت = الصفر

مثال:

$$(5)'_t = 0$$

② $(At)'_t = A$

مثال: $(5t)'_t = 5$

③ $(At^n)'_t = nAt^{n-1}$

مثال:

$(3t^2)'_t = 6t$

④ $[cos(\text{مقدار})]'_t = -\text{مشتق المقدار}\ \sin(\text{المقدار})$

أمثلة:

$[cos(5t)]'_t = -5\sin(5t)$

$[cos(3t^2)]'_t = -6t\sin(3t^2)$

تمرين: أوجد $(x)'_t$: حيث:

A) $\boldsymbol{x = 0.1.\cos(\frac{\pi}{2}t + \pi)}$

$(x)'_t = -0.1\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\frac{\pi}{2}t + \pi)$

B) $\boldsymbol{x = \cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})}$

$(x)'_t = -\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$

C) $\boldsymbol{x = 0.05\cos(2\pi t)}$

$(x)'_t = -0.05(2\pi)\sin(2\pi t)$

D) $\boldsymbol{x = 0.01\cos(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3})}$

$(x)'_t = -0.01(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3})$

⑤ $[sin(\text{مقدار})]'_t = \text{مشتق المقدار}\ \cos(\text{المقدار})$

مثال: $[\sin(5t)]' = 5\cos(5t)$

تمرين 1: أوجد $(x)''_t$: حيث: $x = 0.1cos(\pi t)$

الحل:

$(x)'_t = -0.1\pi\sin(\pi t)$

$(x)''_t = -0.1\pi^2\cos(\pi t)$

$(x)''_t = -\cos(\pi t)$

حيث: $\pi^2 \simeq 10$

تمرين 2: أوجد $(x)''_t$: حيث: $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

حيث X_{max} , φ , ω_0 ثوابت

$(x)'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$

$(x)''_t = -\omega_0^2 X_{max}cos(\omega_0 t + \varphi)$

الجسم المرن: هو كل جسم يتغير شكله بتأثير قوى خارجية ويعود إلى شكله الأصلي بعد زوال القوى.

مثال: النابض

لكل نابض ثابت صلابة خاص فيه رمزه $\boldsymbol{k}$

يتوقف على: 1) طول النابض. 2) عدد حلقاته. 3) قطر الحلقة. 4) نوع المادة المصنوع منها النابض

تؤثر في النابض قوة شد $\vec{F'_S}$

تسبب الاستطالة x_0

فينشأ قوة تدعى قوة توتر النابض

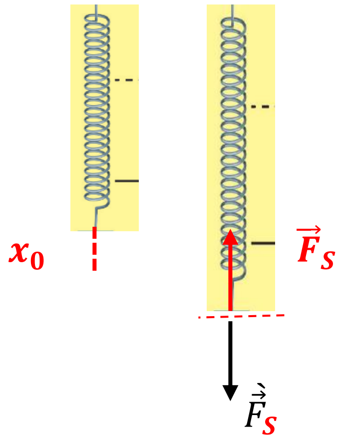
$\vec{F_S}$ حيث:

$$F'_S = F_S = kx_0$$

$N : F_S$

$m : x_0$

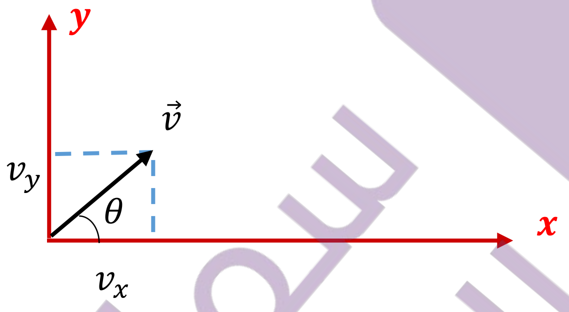
$N.m^{-1} : K$



- عندما يتغير طول النابض فإنه يختزن طاقة كامنة مرونية E_P تعطى بالعلاقة $E_P = \frac{1}{2}kx^2$

مسقط شعاع على محور:

- عندما نستخدم العلاقة الشعاعية $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ أو $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ يجب تحويلها إلى علاقة جبرية وذلك من الاسقاط على محور.



من الشكل :

$v_x = v\ cos\theta$

$v_y = v\ sin\theta$

قواعد الاسقاط:

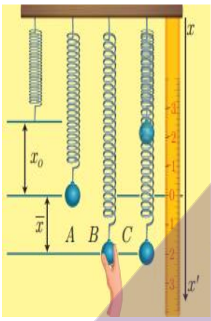
1. كل شعاع عمودي على محور مسقطه معدوم.
2. كل شعاع منطبق على محور أو يوازيه وبجهته مسقطه = + قيمته.
3. كل شعاع منطبق على محور أو يوازيه وبعكس الجهة مسقطه = - قيمته.

سما المجد التعليمية

الحركة التوافقية البسيطة

النواس المرن: جسم صلب معلق بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة يهتز بحركة اهتزازية حول مركز الاهتزاز.

- نعلق كرة كتلتها m بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت صلابته k



نلاحظ: أن الكرة تتوازن بعد أن يستطيل النابض مسافة x_0 تدعى الاستطالة السكونية.

- نشد الكرة نحو الأسفل مسافة مناسبة رمزها X_{max} ونتركها دون سرعة ابتدائية، فيقوم الجسم بحركة اهتزازية إلى جانبي وضع التوازن.

مصطلحات:

- **السعة:** رمزها X_{max} هي أعظم إزاحة للجسم عن وضع التوازن وتسمى المطال الأعظمي وهي مقدار موجب دوماً.
- **الدور الخاص للحركة:** هو الفترة الزمنية لإنجاز هزة كاملة. رمزه T_0

تجريبياً: الدور الخاص $= \frac{\text{زمن الهزات}}{\text{عدد الهزات}}$

بالرموز: $T_0 = \frac{t}{N}$

مثال: أنجز المتحرك 10 هزات خلال 20(S) فيكون:

$$T_0 = \frac{20}{10} = 2(S)$$

- **المطال:** هو موضع الجسم في كل لحظة رمزه $\bar{x}$ هو مقدار جبري.
- عند الاقتراب من وضع التوازن تكون الحركة متسارعة.
- عند الابتعاد عن وضع التوازن تكون الحركة متباطئة.
- يرسم المتحرك خلال حركته قطعة مستقيمة طولها L حيث

$$L = 2X_{max}$$

0

$-X_{max}$ $+X_{max}$

$L = 2X_{max}$

لا تنسَ:

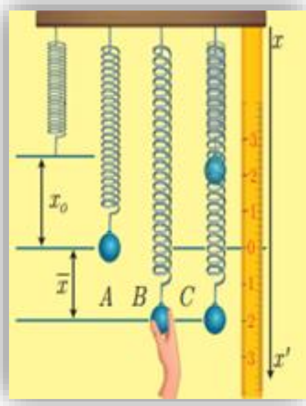
سعة الحركة X_{max} (m)

مطال $\bar{x}$ (m)

استطالة سكونية x_0 (m)

دارسة تحريكية: قوة الإرجاع: (دورة ثانية 2016)

ادرس تحريكياً النواس المرن مستنتجاً محصلة القوى الخارجية المؤثرة في الجسم المهتز، ماذا تدعى، حدد جهتها.



1- حالة السكون:

- القوى الخارجية المؤثرة على الجسم:

$\vec{w}$ ثقل الجسم

$\vec{F_{S0}}$ قوة توتر النابض

الجسم الساكن: $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$$\vec{W} + \vec{F_{S0}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$W - F_{S0} = 0$$

$$W = F_{S0}$$

تؤثر في النابض القوة $\vec{F_{S0}^{`}}$ التي تسبب له الاستطالة x_0 حيث:

$$F_{S0}^{`} = F_{S0} = Kx_0$$

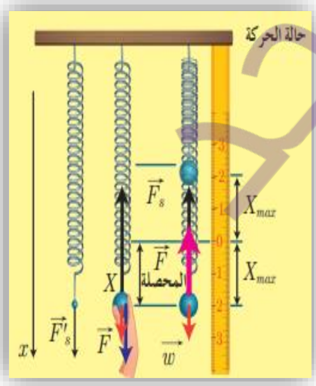
نعوض فنجد: $mg = Kx_0$

m: كتلة الجسم

x_0: **الاستطالة السكونية**

K: **ثابت صلابة النابض**

2- حالة الحركة:



الجسم في لحظة ما (t) في موضع مطاله $(\bar{x})$ تسارعه (a) القوى الخارجية المؤثرة على الجسم:

$\vec{W}$: ثقل الجسم

$\vec{F_S}$: قوة توتر النابض

العلاقة الأساسية في التحريك

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{F_S} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$w - F_S = m\bar{a}$$

- تؤثر في النابض القوة: $\vec{F_S^{`}}$ تسبب الاستطالة $(\bar{x} + x_0)$ حيث:

$$\grave{F_S} = F_S = K(\bar{x} + x_0)$$
$$mg - K(\bar{x} + x_0) = ma$$
لكن: $mg = Kx_0$

ومنه: $Kx_0 - K\bar{x} - Kx_0 = ma$
$$\Rightarrow -K\bar{x} = m\bar{a}$$
$$\Rightarrow \boxed{\bar{F} = -K\bar{x}}$$
قوة إرجاع مطال

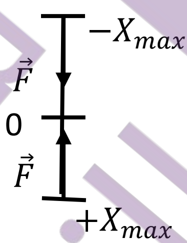
أي أن محصلة القوى الخارجية المؤثرة في مركز عطالة الجسم في كل لحظة هي قوة إرجاع لأنها تُعيد الجسم إلى مركز الاهتزاز دوماً وهي تتناسب طرداً مع المطال $\bar{x}$ وتعاكسه بالإشارة.

ملاحظة:

قوة الإرجاع: $\bar{F} = -K\bar{x}$

قوة توتر النابض في حالة السكون: $F_{S0} = Kx_0$

قوة توتر النابض في حالة الحركة: $F_S = K(\bar{x} + x_0)$



تتجه قوة الإرجاع دوماً نحو وضع التوازن (مركز الاهتزاز)

استنتاج طبيعة حركة النواس المرن: دورات

انطلاقاً من العلاقة $-K\bar{x} = m\bar{a}$ برهن أن حركة النواس المرن هي حركة جيبية انسحابيه واستنتج علاقة الدور الخاص
$$-K\bar{x} = m\bar{a}$$
لكن: $\bar{a} = (\bar{x})''_t$
$$\Rightarrow -K\bar{x} = m(\bar{x})''_t$$
$$① \ \boxed{(\bar{x})''_t = -\frac{K}{m}(\bar{x}) \dots}$$
وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل:
$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
حيث: $\bar{x}$: مطال الحركة وواحدته (m)

ثوابت الحركة:
- X_{max} : سعة الحركة (m)
- ω_0 : النبض الخاص (موجب دوماً) $rad.s^{-1}$
- φ الطور الابتدائي في اللحظة $t = 0$

$(\omega_0 t + \varphi)$ الطور في اللحظة t

للتحقق من صحة الحل نشتق الحل مرتين بالنسبة للزمن:
$$(x)'_t = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$(x)''_t = -\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\boxed{(x)''_t = -\omega_0^2\ \bar{x} \dots} \ ②$$
بالموازنة بين 1 , 2 :
$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}} > 0$$
وهذا ممكن لأن K و m موجبان دوماً.

ومنه حركة النواس المرن هي حركة جيبية انسحابية.

- علاقة الدور الخاص:
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$
ولكن : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$
$$\Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$
T_0 : الدور الخاص. (S)

m: كتلة الجسم (kg)

K: ثابت صلابة النابض ($N.m^{-1}$)

1) الدور لا يتعلق بالسعة:

سؤال دورة 2014

نواس مرن دوره الخاص T_0 سعة الاهتزاز X_{max} نضاعف سعة الاهتزاز يصبح الدور الخاص $\grave{T}_0$:

A) $\grave{T}_0 = 2T_0$ B) $\grave{T}_0 = \sqrt{2}T_0$ C) $\grave{T}_0 = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ **D) $\grave{T}_0 = T_0$**

2) الدور يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لـ m:

نواس مرن دوره T_0 ، كتلة الجسم المهتزm نستبدل الكتلة m بالكتلة $\grave{m} = 2m$ يصبح الدور الخاص:

A) $\grave{T}_0 = 2T_0$ **B) $\grave{T}_0 = \sqrt{2}T_0$** C) $\grave{T}_0 = \frac{T_0}{2}$ D) $\grave{T}_0 = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$

الحل: طريقة 1
$$\left.\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \\ \grave{T}_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{\grave{m}}{K}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{T_0}{\grave{T}_0} = \sqrt{\frac{m}{\grave{m}}}$$
$$\frac{T_0}{\grave{T}_0} = \sqrt{\frac{m}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \grave{T}_0 = \sqrt{2}T_0$$

طريقة 2: $\grave{m} = \text{مقدار}\, m \Rightarrow \grave{T}_0 = \sqrt{\text{مقدار}}\; T_0$

$$\grave{m} = 2m \Rightarrow \grave{T}_0 = \sqrt{2}T_0$$

3) الدور يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لـ K

$$\grave{K} = \text{مقدار}\, K \Rightarrow \grave{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{\text{مقدار}}}\, T_0$$

مثال: $\grave{K} = 2K \Rightarrow \grave{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, T_0$

ملاحظات مسائل:

1) التابع الزمني للمطال

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 + \varphi)$$

النبض الخاص:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

سعة الحركة X_{max}:
- تعطى بنص المسألة
- أو $X_{max} = \frac{L}{2}$

لحساب الدور الخاص:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad T_0 = \frac{1}{f_0} \quad T_0 = \frac{t}{N} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

لحساب الاستطالة السكونية:

$$mg = kx_0$$

$$\boldsymbol{\frac{m}{k} = \frac{x_0}{g}}$$

$x_0 = \frac{mg}{k}$	$x_0 = \frac{mg}{K}$	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$
نعوض ونحسب	لكن: $K = m\omega_0^2$	$\frac{m}{k} = \frac{x_0}{g}$
x_0	$x_0 = \frac{mg}{m\omega_0^2}$	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$
	$x_0 = \frac{g}{\omega_0^2}$	نربع ونعزل x_0

- لحساب شدة قوة الإرجاع: $F = |-kx|$
- لحساب m أو k

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$k = m\omega_0^2 \qquad m = \frac{k}{\omega_0^2}$$

- لحساب a

$$a = \frac{F}{m} \qquad a = (x)''_t = -\omega_0^2\bar{x}$$

- لتحديد موضع الجسم (مطال) في اللحظة $t=?$
تعوض تلك اللحظة في تابع المطال

مسألة:

يتحرك جسم حركة جيبية انسحابية والتابع الزمني للمطال

$$\boldsymbol{x = 0.1\cos(2\pi t + \pi)}$$

1) احسب الدور الخاص للحركة، وما طول القطعة التي يرسمها المتحرك.

2) بفرض أن النواس يتحرك في مكان قيمة تسارع الجاذبية فيه $g = 10m.s^{-2}$ احسب مقدار الاستطالة السكونية وهل يتغير دور النواس إذا نقلناه إلى مكان آخر تكون فيه قيمة تسارع الجاذبية ربع ما كانت عليه.

3) إذا كانت كتلة الجسم المهتز $m = 1kg$ احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $-X_{max}$ واحسب التسارع عندئذ.

4) حدد موضع الجسم في اللحظة $t = 0(s)$

الحل: 1)

$$x = \underbrace{0.1}_{X_{max}}\cos(\underbrace{2\pi}_{\omega_0} t + \underbrace{\pi}_{\varphi})$$

$$\omega_0 = 2\pi rad.s^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} =$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1(s)$$

$$L = 2X_{max} = 2 \times 0.1 = 0.2m$$

2)

$$\frac{m}{k} = \frac{x_0}{g}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

نربع:

$$T_0^2 = 4\pi^2\frac{x_0}{g}$$

$$x_0 = \frac{T_0^2 . g}{4\pi^2}$$

$$x_0 = \frac{1\times10}{4\times10} = \frac{1}{4}m$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

تغير g ⇐ تغيير في قيمة x_0

ويبقى T_0 ثابت أي أن دور نواس المرن لا يتعلق بـ (g) مهما غيرنا مكان النواس سيبقى T_0 نفسه

3) $F = |-kx|$

نحسب k:

$$k = m\omega_0^2 = 1\times(2\pi)^2 = 40N.m^{-1}$$

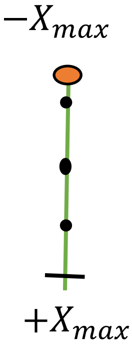
$$x = -X_{max} = -0.1m \qquad F = |-40(-0.1)|$$

$$F = 4N$$

Type equation here.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4}{1} = 4m.s^{-2}$$

4) تحديد موضع الجسم (مطال) في اللحظة $t = 0(s)$



$$x = 0.1\cos(2\pi t + \pi)$$
$$t = 0(s) \Rightarrow x = 0.1\cos(0 + \pi)$$
$$x = 0.1\cos(\pi)$$
$$x = 0.1[-1]$$
$$\boldsymbol{x = -0.1m}$$

أي أن: الجسم في لحظة البدء كان في مطاله الأعظمي السالب

تطبيق 1: نواس مرن مؤلف من جسم ونابض مرن تابعه الزمني $x = 0.1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ وكتلة الجسم المهتز $m = 1kg$ والمطلوب حساب:

1- الدور الخاص للحركة.

2- قيمة ثابت صلابة النابض K.

3- موضع الجسم في لحظة بدء الزمن:

طريقة الحل: بالموازنة مع $x = 0.1\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

الشكل العام:

نجد: $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

$$X_{max} = 0.1m \quad , \quad \omega_0 = \pi rad.s^{-1} \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{2} rad$$

1- حساب الدور الخاص:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = 2(S)$$

2- حساب K:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow K = m\omega_0^2$$
$$= 1(\pi)^2 = 10N.m^{-1}$$

3- في لحظة بدء الزمن:

$$t = 0 \Rightarrow x = 0.1\cos(\pi(0) + \frac{\pi}{2})$$
$$= 0.1\cos(+\frac{\pi}{2})$$
$$\boldsymbol{x = 0}$$

أي أن الجسم في لحظة البدء كان ماراً من مركز الاهتزاز.

تطبيق 2: نواس مرن مؤلف من جسم صلب ونابض مرن تابعه الزمني: $x = 0.05\cos(\frac{\pi}{2}t)$ وبفرض قيمة ثابت صلابة النابض $10Nm^{-1}$ والمطلوب حساب:

1 - كتلة الجسم المهتز.

2- شدة قوة الارجاع في موضع مطاله 2cm .

3- تسارع حركة الجسم .

الحل:

.1
$$m = \frac{K}{\omega_0^2}$$
$$= \frac{10}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{10}{\frac{10}{4}} = 4kg$$

-2
$$F = |-Kx|$$
$$= |-(10)(2 \times 10^{-2})|$$
$$= 2 \times 10^{-1}N$$

.3
$$a = \frac{F}{m}$$
$$a = \frac{2\times10^{-1}}{4}$$
$$a = 5 \times 10^{-2}m.s^{-2}$$

توابع الحركة:

اكتب التابع الزمني للمطال بالشكل العام ثم استنتج التابع الزمني للمطال بالشكل المختزل باعتبار مبدأ الزمن والجسم في مطاله الأعظمي الموجب وارسم الخط البياني لتغيرات المطال خلال دور كامل. وناقش متى يكون معدوم ومتى يكون أعظمي.

أولاً: تابع المطال:

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

لحظة البدء الجسم في مطاله الأعظمي الموجب

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x = +X_{max} \end{matrix}\right\} \quad X_{max} = X_{max}\cos(\varphi)$$
$$\Rightarrow \cos(\varphi) = 1$$
$$\Rightarrow \varphi = 0$$

ومنه: $x = X_{max}\cos(\omega_0 t)$

وبدلالة الدور يكون : $\boldsymbol{x = X_{max}\cos(\frac{2\pi}{T_0}t)}$ وهو التابع الزمني للمطال بالشكل المختزل.

مناقشة:

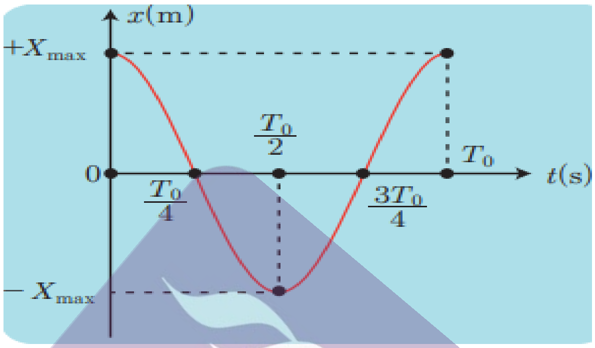
$x = 0$	$x = \mp X_{max}$
عندما: $\cos(\omega_0 t) = 0$	عندما: $\cos(\omega_0 t) = \mp1$
ينعدم المطال عند مرور الجسم في مركز الاهتزاز	يبلغ المطال قيمة عظمى عند مرور الجسم في الوضعين الجانبين

❖ $t = 0 \Rightarrow x = X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}(0)\right) = X_{max}$

$$t = \frac{T_0}{4} \Rightarrow x = X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\frac{T_0}{4}\right) = 0$$
$$t = \frac{T_0}{2} \Rightarrow x = X_{max}\cos(\pi) = -X_{max}$$
$$t = \frac{3T_0}{4} \Rightarrow x = 0$$
$$t = T_0 \Rightarrow x = +X_{max}$$

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$

الرسم البياني لتغيرات المطال بدلالة الزمن



- حدد موضع الجسم في اللحظة $t = \frac{3T_0}{2}$

الحل:

$$x = X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

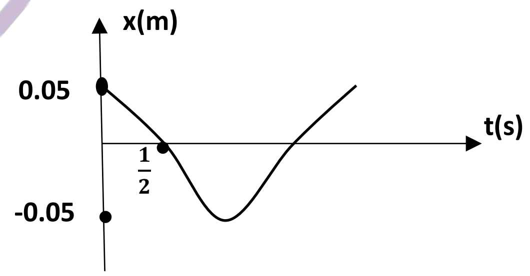
$$t = \frac{3T_0}{2} \Rightarrow x = X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\frac{3T_0}{2}\right)$$

$$x = X_{max}\cos(3\pi) = X_{max}(-1)$$

$$x = -X_{max}$$

أي أن الجسم في هذه اللحظة كان في المطال الأعظمي السالب.

تمرين: متحرك بحركة جيبية انسحابية والخط البياني لتغيرات المطال خلال دور كامل



المطلوب:

1 - احسب النبض الخاص للحركة واحدته $rad.s^{-1}$

2- استنتج التابع الزمني لمطال الحركة:

الحل 1: $\frac{1}{4}T_0 = \frac{1}{2}$ ، $X_{max} = 0.05m$

$$\Rightarrow T_0 = 2(S)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi rad.s^{-1}$$

2: $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

من الخط البياني: $\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x = +X_{max} \end{matrix}\right\}$

$$X_{max} = X_{max}\cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = 1$$

$$\Rightarrow \varphi = 0rad$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 0.05\cos(\pi t) \quad (m)$$

ثانيا: تابع السرعة: هو المشتق الأول لتابع المطال بالنسبة للزمن.

- انطلاقاً من التابع الزمني للمطال بالشكل المختزل استنتج التابع الزمني للسرعة وحدد متى تكون السرعة عظمى ومتى تكون معدومة وارسم الخط البياني لتغيرات السرعة بدلالة الزمن خلال دور كامل. (دورات)

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t)$$

$$v = (x)'_t = (X_{max}\cos(\omega_0 t))'_t$$

$$\bar{v} = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$v = -\omega_0 X_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ وهو التابع الزمني للسرعة بدلالة الدور الخاص

مناقشة:

$v = 0$ عندما $x = \mp X_{max}$

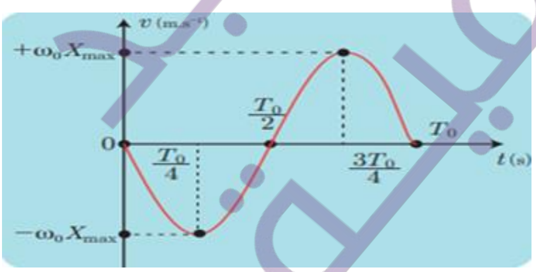
تنعدم السرعة في الوضعين الجانبين

$v_{max} = \mp\omega_0 X_{max}$ عندما $x = 0$

تبلغ قيمة عظمى عند المرور في مركز الاهتزاز

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$
v	0	$-\omega_0 X_{max}$	0	$+\omega_0 X_{max}$	0

الخط البياني لتغيرات السرعة بدلالة الزمن:



الجسم يتحرك بالاتجاه السالب

$$v_{max} = \mp\omega_0 X_{max}$$

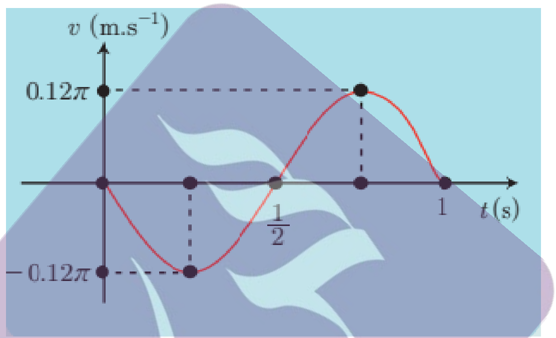
الجسم متحرك بالاتجاه الموجب للمحور

ملاحظة: عندما يُطلب استنتاج تابع زمني لمطال أو لسرعة انطلاقاً من شكله العام:

أ) نكتب الشكل العام.

ب) نوجد قيم الثوابت ونعوضها في الشكل العام.

تمرين: يمثل الرسم البياني جانباً تغيرات السرعة مع الزمن لجسم مرتبط بنابض مرن يتحرك بحركة توافقية بسيطة:



1- إيجاد سعة الحركة: $v_{max}=0.12\pi m.s^{-1}$

كذلك $\frac{1}{2}T_0=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow T_0=1(S)$

نحسب ω_0: $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{1}=2\pi rad.s^{-1}$

$v_{max}=\omega_0 X_{max}$

$0.12\pi=2\pi X_{max}$

$\Rightarrow X_{max}=0.06m$

2- كيف نوجد التابع الزمني للسرعة انطلاقاً من الشكل العام.

حساب φ : $v=-\omega_0 X_{max} sin(\omega_0 t+\varphi)$

من الرسم البياني $\left.\begin{matrix}t=0\\ v=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 0=-\omega_0 X_{max}\sin(\varphi)$

$\Rightarrow sin\varphi=0\Rightarrow\varphi$ → 0 rad ، π rad

نختار قيمة لـ φ تجعل السرعة سالبة في اللحظة $\frac{T_0}{4}$

$v=-\omega_0 X_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{T_0}{4}\right)+0\right)$

$\varphi=0\Rightarrow v<0$ (محققة)

$v=-\omega_0 X_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\left(\frac{T_0}{4}\right)+\pi\right)$

$\varphi=\pi\ rad \Rightarrow v>0$ مرفوض

$\Rightarrow v=-\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t)$

$v=-0.12\pi\sin(2\pi t)\qquad m.s^{-1}$

ثالثاً: تابع التسارع: هو المشتق الثاني لتابع المطال بالنسبة للزمن. **(دورات)**

انطلاقاً من التابع الزمني للمطال بالشكل المختزل استنتج التابع الزمني للتسارع. ناقش أوضاع التسارع متى تكون قيمته معدومة ومتى تكون عظمى.

$x=X_{max}\cos(\omega_0 t)$

$a=(x)''_t=(X_{max}\cos(\omega_0 t))''_t$

$\boldsymbol{a=-\omega_0^2 X_{max}\cos(\omega_0 t)}$

$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

$\boldsymbol{a=-\omega_0^2 X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)}$

و هو التابع الزمني للتسارع بدلالة الدور الخاص

$$a=-\omega_0^2\underbrace{X_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)}_{x}$$

$\Rightarrow\ \bar{a}=-\omega_0^2\,\bar{x}$

التسارع يتناسب طرداً مع المطال ويخالفه بالإشارة

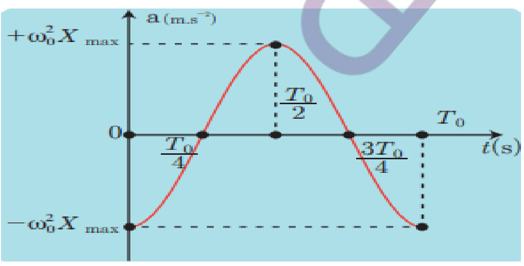
$a=-\omega_0^2 x$

a =0 عندما x =0 ينعدم عند المرور في مركز الاهتزاز

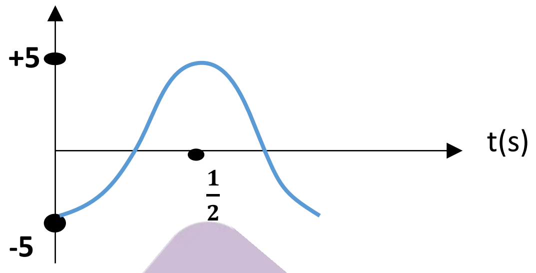
$\boldsymbol{a_{max}=\pm\omega_0^2 X_{max}}$ عندما $x=\mp X_{max}$ يبلغ قيمة عظمى عند المرور في الوضعين الجانبين

تغيرات التسارع خلال دور كامل.

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x	$+X_{max}$	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}$
a	$-\omega_0^2X_{max}$	0	$+\omega_0^2X_{max}$	0	$-\omega_0^2X_{max}$



تطبيق: يمثل الرسم البياني التالي تغيرات التسارع بدلالة الزمن لجسم يتحرك حركة جيبية انسحابية.



1- احسب سعة الحركة مقدرة بالمتر:

2-استنتج التابع الزمني للتسارع:

الحل:

1) من معطيات الخط البياني:

$$a_{max} = 5m.s^{-2}$$

$$\frac{T_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow T_0 = 1(s)$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi rad.s^{-1}$$

لكن: $\boldsymbol{a_{max} = \omega_0^2 X_{max}}$

$$5 = (2\pi)^2 X_{max}$$

$$5 = 40\ X_{max}$$

$$X_{max} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}m$$

2) $a = -\omega_0^2 X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

تعيين الثوابت:

$$\omega_0 = 2\pi rad.s^{-1}$$

$$\omega_0^2 X_{max} = 5$$

حساب φ :

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ a = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -5 = -5\cos(\varphi)$$

$$cos\varphi = 1$$

$$\varphi = 0$$

$$\Rightarrow a = -5\cos(2\pi t) .m.s^{-2}$$

ملاحظة: $\vec{F} = m\vec{a}$

$m > 0 \Leftarrow$ $\vec{a}$,$\vec{F}$ بجهة واحدة دوماً نحو وضع التوازن.

الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة: (دورات)

استنتج علاقة الطاقة الكلية في الهزازة الجيبية الانسحابية (النواس المرن) وبين أنها مقدار ثابت وارسم الخط البياني لتغيرات الطاقة الكامنة.

الطاقة الكلية هي مجموع طاقة كامنة مرونية وحركية.

$$E_{t0t} = E_P + E_K$$

طاقة حركية ← E_K ، طاقة كامنة مرونية ← E_P

$$E_P = \frac{1}{2}K\,x^2$$

-1 $\boldsymbol{E_P = \frac{1}{2}K X_{max}^2 cos^2(\omega_0 t + \varphi)}$

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_K = \frac{1}{2}m(-\omega_0\, X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi))^2$$

$$E_K = \frac{1}{2}m\omega_0^2\, X_{max}^2\, sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

لكن: $\boldsymbol{K = m\omega_0^2}$

-2 $\boldsymbol{E_K = \frac{1}{2}K X_{max}^2 sin^2(\omega_0 t + \varphi)}$

نعوض 1 و 2 في

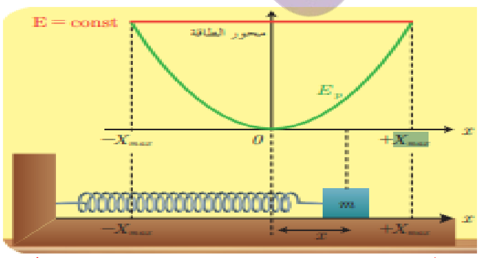
$$E_{t0t} = \frac{1}{2}K\,X_{max}^2\{cos^2(\omega_0 t + \varphi) + sin^2(\omega_0 t + \varphi)\}$$

$$E_{t0t} = \frac{1}{2}K\,X_{max}^2 \quad (1)$$

$$\boldsymbol{E_{tot} = \frac{1}{2}K X_{max}^2 = const}$$

- الطاقة الكلية هي مقدار ثابت وتتناسب طرداً مع مربع سعة الاهتزاز.

	تزداد x تزداد E_P / تنقص v تنقص E_K	تنقص x تنقص E_P / تزداد v تزداد E_K
$x = -X_{max}$	$x = 0$	$x = +X_{max}$
$E_K = 0$	$E_P = 0$	$E_K = 0$
$E_{t0t} = E_P$	$E_{t0t} = E_K$	$E_{tot} = E_P$
كامنة فقط	حركية فقط	كامنة فقط



تمثل الطاقة الكلية بخط مستقيم يوازي محور المطالات لأنها مقدار ثابت

انتبه:

- الطاقة الميكانيكية: $E = \frac{1}{2}KX_{max}^2$
- الطاقة الكامنة: $E_P = \frac{1}{2}Kx^2$
- الطاقة الحركية: $E_K = E - E_P$

$$= \frac{1}{2}KX_{max}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\boldsymbol{E_K = \frac{1}{2}K[X_{max}^2 - x^2]}$$

أسئلة:

- **نواس مرن طاقته الكلية E في موضع مطاله (x) حيث تكون: $x = \mp\frac{X_{max}}{2}$**

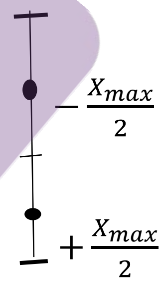
a) $E_K = E$ b) $E_K = \frac{3}{4}E$ c) $E_K = \frac{1}{2}E$ d) $E_K = \frac{1}{4}E$

$$E_K = \frac{1}{2}K\left[X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}KX_{max}^2\left[1 - \frac{1}{4}\right]$$

$$E_K = \frac{3}{4}E$$

$$E_P = \frac{1}{4}E$$



- **نواس مرن طاقته الكلية E في موضع مطاله تكون: $x = \mp\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$**

a) $E_K = E$ b) $E_K = \frac{3}{4}E$ c) $E_K = \frac{1}{2}E$ d) $E_K = \frac{1}{4}E$

$$E_K = \frac{1}{2}K\left[X_{max}^2 - \frac{X_{max}^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}KX_{max}^2\left[1 - \frac{1}{2}\right]$$

$$E_K = E\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$E_K = \frac{1}{2}E \quad \Rightarrow E_P = \frac{1}{2}E$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E_K = E_P}$$

- **برهن أنه عندما تتساوى E_P مع E_K تكون $x = \mp\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$**

الحل:

$$E = E_K + E_P$$

$$E_K = E_P \Rightarrow \quad E = 2E_P$$

$$\frac{1}{2}KX_{max}^2 = 2 \times \frac{1}{2}Kx^2$$

$$x^2 = \frac{X_{max}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \mp\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$$

- **برهن أنه عندما تتساوى E_K مع E_P تكون $v = \mp\frac{\omega_0 X_{max}}{\sqrt{2}}$**

الحل:

$$E = 2E_K$$

$$\frac{1}{2}KX_{max}^2 = 2 \times \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{KX_{max}^2}{2m}$$

$$v^2 = \frac{\omega_0^2 X_{max}^2}{2}$$

$$\boldsymbol{v = \mp\frac{\omega_0 X_{max}}{\sqrt{2}}}$$

ملاحظات مسائل (هام جداً):

1: يُطلب في جميع المسائل استنتاج التابع الزمني لكل من المطال ، السرعة ، التسارع

الحل: أ) نكتب الشكل العام للتابع.

ب) نحدد (نحسب) قيم الثوابت من نص المسألة أو: من معطيات الخط البياني

ج) نعوض تلك الثوابت في الشكل العام.

2: يُطلب حساب السرعة ونميز:

1- لحساب السرعة عندما يعطى مطال (x) **الحل:** $E_K = E - E_P$ $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K[X_{max}^2 - x^2]$ $v^2 = \frac{K}{m}[X_{max}^2 - x^2]$ نعوض أرقام المسألة ونجد $v^2 = \mp$ ونميز ما يلي: إذا كان الجسم $v > 0$ يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور إذا كان الجسم $v < 0$ يتحرك بالاتجاه السالب	**2** - إذا طلب حساب السرعة العظمى (طويلة) $v_{max} = \lvert\omega_0 X_{max}\rvert$	**3-** احسب السرعة في لحظة ما (t) من التابع الزمني: $v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$ نعوض كل من الثوابت واللحظة (t) في التابع ونجد v وإما $v > 0$ أو $v < 0$ حسب اتجاه الحركة

-3 لحساب التسارع

$$a = \frac{F}{m} \qquad \bar{a} = -\omega_0^2\bar{x}$$

لحساب K

$$K = m\omega_0^2$$

من علاقة الدور

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

4- حساب الاستطالة السكونية:

$$w = F_{S0} \Rightarrow mg = Kx_0$$

إذا لم تكن لدينا قيم m و K :

1) $x_0 = \dfrac{mg}{k}$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{mg}{m\omega_0^2} = \frac{g}{\omega_0^2}$$

2) $\dfrac{m}{K} = \dfrac{x_0}{g} \ldots\ldots \boxed{1}$ ولكن $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

نعوض 1 في علاقة الدور: $\Rightarrow$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{x_0}{g}$$

$$x_0 = \frac{T_0^2 . g}{4\pi 2}$$

لا ننسى: $T_0 = \dfrac{t}{N}$

- لإيجاد لحظة المرور في وضع التوازن:

1 نعوض في تابع المطال $x = 0$

2 $\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$

$$\omega_0 t + \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi K$$

لحظة المرور الأول: $K = 0 \Rightarrow \omega_0 t + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

ونجد t ما سبق

لحظة المرور الثاني $K = 1 \Rightarrow \omega_0 t + \varphi = \dfrac{3\pi}{2}$

نجد t وهكذا

حالات إيجاد φ : (شروط البدء)

1- الجسم في مطاله الأعظمي الموجب:

$$\left.\begin{array}{l} t = o \\ x = +X_{max} \end{array}\right\} \Rightarrow X_{max} = X_{max}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = 1$$

$$\Rightarrow \varphi = 0$$

2- الجسم في لحظة البدء ماراً من نقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ متحرك بالاتجاه السالب:

$-X_{max}$

0

$v < 0 \uparrow$ $\quad \frac{X_{max}}{2}$

$+X_{max}$

$$\left.\begin{array}{l} t = o \\ x = +\frac{X_{max}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{X_{max}}{2} = X_{max}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi \begin{cases} \frac{\pi}{3} rad \\ -\frac{\pi}{3} rad \end{cases}$$

نختار قيم لـ φ تجعل السرعة سالبة في اللحظة t=0

$$v = -\omega_0 X_{max} \sin(\varphi)$$

مقبول $\varphi = \frac{\pi}{3} rad \Rightarrow \sin\varphi > 0 \Rightarrow v < 0$

مرفوض $\varphi = -\frac{\pi}{3} rad \Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow v > 0$

3- الجسم في لحظة البدء ماراً من وضع التوازن:

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = X_{max}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi \begin{cases} \frac{\pi}{2} rad \\ -\frac{\pi}{2} rad \end{cases}$$

نفس المناقشة من أجل اختيار φ حسب اتجاه الحركة.

$-X_{max}$

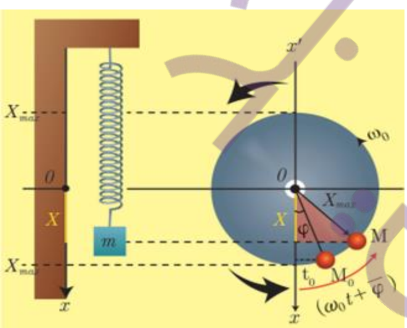
$0 \quad \uparrow v < 0$

$v > 0 \downarrow$

$+X_{max}$

العلاقة بين الحركة الدائرية المنتظمة والحركة التوافقية البسيطة (تمثيل فرينل)

في الشكل المجاور تدور نقطة مادية كتلتها m بحركة دائرية منتظمة سرعتها الزاوية ω_0 وشعاع الموضع (شعاع نصف القطر) $\overrightarrow{OM}$ طويلته X_{max}



1- الطور الابتدائي للحركة $\bar{\varphi}$ هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x'x}$ في اللحظة t=0.

2- طور الحركة $(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ هو الزاوية بين الشعاع $\overrightarrow{OM}$ والمحور $\overrightarrow{x'x}$ في t.

3- سعة الحركة X_{max} هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الثابتة عند الدوران.

4- النبض الخاص للحركة ω_0 يقابل السرعة الزاوية الثابت لتي تدور بها النقطة M.

5- مطال الحركة $\bar{x}$ هو مسقط الشعاع $\overrightarrow{OM}$ على المحور $\overrightarrow{x'x}$ وهو متغير بتغير الزمن.

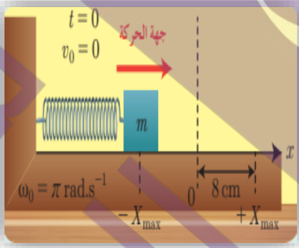
6- النسبة : $\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi}) = \frac{\bar{x}}{X_{max}}$

7- التابع الزمني لحركة المسقط تابع جيبي من الشكل: $\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$ تسمى الحركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة).

اختبر نفسي

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1- تابع المطال الذي يصف حركة الهزّازة الجيبية في الشكل المجاور هو:



A. $\bar{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)$

B. $\bar{x} = 8\cos(\pi t - \pi)$

C. $\bar{x} = 0.08\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$

D. $\bar{x} = 0.8\cos(\pi t)$

الجواب هو:

$$\bar{x} = 0.08\cos(\pi t + \pi)$$

طريقة الحل:

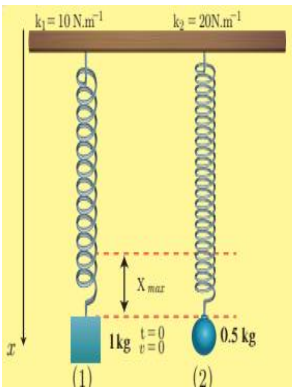
$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x = -X_{max} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -X_{max} = X_{max}\cos(\varphi)$$

$$\cos\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi rad$$

من الشكل: $X_{max} = 8cm = 0.08m$

$$\Rightarrow x = 0.08\cos(\pi t + \pi)$$

2- يمثّل الشكلُ المجاورُ هزّازتان توافقيتان (1) و (2) تنطلقان من الموضع نفسه، وفي اللحظة نفسها، فإنهما بعد مضي 3s من بدء حركتهما:



A. تلتقيان في مركز الاهتزاز.

B. تلتقيان في الموضع $+X_{max}$

C. لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $+X_{max}$ ومطال الثانية $-X_{max}$

D. لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $-X_{max}$ ومطال الثانية $+X_{max}$

الجواب هو:

لا تلتقيان لأنّ مطال الأولى $-X_{max}$ ومطال الثانية $+X_{max}$

طريقة الحل:

$$T_{01} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2(S)$$

$$x_1 = X_{max}\cos(\pi t)$$

وبعد 3(S) ⟸ نعوض t=3(S)

ومنه $x_1 = X_{max}\cos(3\pi)$

$$\boldsymbol{x_1 = -X_{max}}$$

$$T_{02} = 2\pi\sqrt{\frac{m2}{K_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{20}} = 1(S)$$

$$\Rightarrow \omega_{02} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rads^{-1}$$

$$x_2 = X_{max}\cos(2\pi t)$$

$$t = 3(S) \Rightarrow x_2 = X_{max}\cos(6\pi) = +X_{max}$$

$$\boldsymbol{x_2 = +X_{max}}$$

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1- في الحركة التوافقية يكون:

a. $v = \omega_0^2\,[X_{max}^2 - x^2]$

b. $v = \omega_0^2\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

c. $v = \omega_0^2\,\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

d. $v = \omega_0\,\sqrt{X_{max}^2 - x^2}$

الحل:

$$E_K = E - E$$

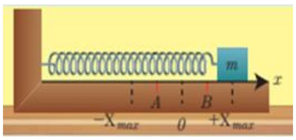
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}KX_{xma}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

$$v^2 = \frac{K}{m}\,[X_{max}^2 - x^2]$$

$$v = \sqrt{\frac{K}{m}[X_{max}^2 - x^2]}$$

$$v = \omega_0\sqrt{(X_{max}^2 - x^2)}$$

2- نابض مرن مهمل الكتلة حلقاتهُ متباعدة ثابت صلابته k مثبت من أحد طرفيه، ويُربط بطرفه الآخر جسم صلب كتلته m يمكنه أن يتحرك على سطح أفقي أملسٍ، كما في الشكل المجاور، نشدّ الجسم مسافة أفقيّة مناسبة، ونتركه دون سرعةٍ ابتدائية.



المطلوب:

a. ادرس حركة الجسم، واستنتج التابع الزمني.

1) في الحركة التوافقية البسيطة وفي موضع مطاله تكون: $x = -\frac{X_{max}}{2}$

A) $E_K = \frac{3}{8}KX^2_{max}$ B) $E_K = \frac{1}{8}KX^2_{max}$

C) $E_K = \frac{3}{8}KX_{max}$ D) $E_K = \frac{3}{8}K^2X^2_{max}$

2) في الحركة التوافقية البسيطة وفي موضع مطاله تكون: $x = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$

A) $E_K = \frac{1}{4}KX^2_{max}$ B) $E_K = \frac{1}{2}KX^2_{max}$

C) $E_K = \frac{1}{3}KX^2_{max}$ D) $E_K = \frac{KX^2_{max}}{\sqrt{2}}$

طريقة الحل:

a. دارسة حركة الجسم:

جملة المقارنة: خارجية.

الجملة المدروسة: النواس المرن.

القوى الخارجية المؤثرة على الجسم:

$\vec{F_S}$ قوة توتر النابض، $\vec{w}$ ثقل الجسم، $\vec{R}$ قوة رد فعل السطح

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{F_S} + \vec{R} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور أفقي موجه كما في الشكل:

$$0 - F_S + 0 = m\bar{a} \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

تؤثر في النابض القوة $\vec{F_S}`$ التي تسبب الاستطالة (x) حيث:

$$F_S` = F_S = K\bar{x}$$

نعوض في 1 $-K\bar{x} = m\bar{a}$

$$-K\bar{x} = m(\bar{x})''_t \Rightarrow (\bar{x})''_t = -\frac{K}{m}(\bar{x})$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل:

$$\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

b. سؤال اختيار 1:

طريقة الحل:

$$x_A = -\frac{X_{max}}{2}$$

$$E_K = \frac{1}{2}K[X^2_{max} - x_A^2] = \frac{1}{2}K[X^2_{max} - \frac{X^2_{max}}{4}]$$

$$E_K = \frac{1}{2}KX^2_{max}\left[1 - \frac{1}{4}\right] \Rightarrow E_K = \frac{3}{8}KX^2_{max}$$

b. سؤال اختيار 2:

طريقة الحل:

$$x_B = -\frac{X_{xmax}}{\sqrt{2}}$$

$$E_K = \frac{1}{2}K\left[X^2_{max} - \frac{X^2_{max}}{2}\right] = \frac{1}{2}KX^2_{max}\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$E_K = \frac{1}{4}KX^2_{max}$$

3) **-1 جسم معلق بنابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة يهتز بدوره الخاص، إن نوع حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض عند مروره في مركز الاهتزاز وهو يتحرك بالاتجاه السالب هي:**

a. قذف شاقولي نحو الأعلى.

b. سقوط حر.

c. قذف شاقولي نحو الأسفل.

d. قذف أفقي.

طريقة الحل:

في هذه الحالة الجسم يخضع لقوة ثقله فقط وهو يملك سرعة نحو الأعلى فحركته **قذف شاقولي نحو الأعلى**.

-2 جسم معلق بنابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة يهتز بدوره الخاص، إن نوع حركة الجسم بعد انفصاله عن النابض عند مروره في المطال الأعظمي الموجب:

a. سقوط حر.

b. قذف شاقولي نحو الأعلى.

c. قذف شاقولي نحو الأسفل.

d. يبقى ساكن.

طريقة الحل:

الجسم يخضع لقوة ثقله فقط وسرعته معدومة فالحركة **سقوط حر**.

ثالثاً: حل المسائل الآتية:

(وفي جميع المسائل $4\pi = 12.5$, $\pi^2 = 10$, $g = 10m.s^{-2}$)

المسألة الأولى:

تتألف هزازة جيبية من نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 10N.m^{-1}$ مثبت من أحد طرفيه، ويحمل في طرفه الأخر جسماً كتلته m ويعطى التابع الزمني لمطال حركتها بالعلاقة

$$\bar{x} = 0.1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

المطلوب:

1- أوجد قيم ثوابت الحركة ودورها الخاص.

2- احسب كتلة الجسم m.

3- احسب قيمة السرعة في موضع مطاله $x = 6cm$ والجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور.

4- حدد موضع الجسم وجهة حركته لحظة بدء الزمن.

الحل:

1) $x = 0.1\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

بالموازنة مع الشكل العام:

$$x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

سعة الحركة $X_{max} = 0.1m$

النبض الخاص $\omega_0 = \pi rad.s^{-1}$

الطور الابتدائي $\varphi = \frac{\pi}{2} rad$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2(s)$$

(2
$$m = \frac{k}{\omega_0^2}$$
$$= \frac{10}{\pi^2} = 1kg$$

(3
$$E_K = E - E_P$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k[X_{max}^2 - x^2]$$
$$v^2 = \frac{k}{m}[X_{max}^2 - x^2]$$

حيث: $x = 6cm \Longrightarrow x = \frac{6}{100}m$

$$v^2 = \frac{10}{1}\left[\frac{1}{100} - \frac{36}{10000}\right]$$
$$= 10\left[\frac{64}{10000}\right]$$
$$v = \mp 8\pi \times 10^{-2} m.s^{-1}$$

وبما أن الجسم يتحرك بالاتجاه الموجب للمحور:

$$v = 8\pi \times 10^{-2} m.s^{-1}$$

(4 لحظة البدء هي : $t = 0$

نعوض في تابع المطال:

$$x = 0.1\cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x = 0$$

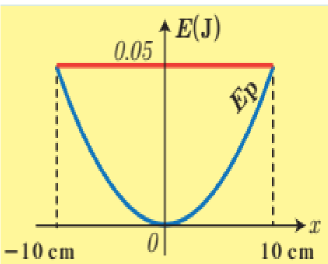
أي أن الجسم كان مار من مركز الاهتزاز

لتحديد جهة الحركة نستعين بتابع السرعة:

$$v = (x)'_t = -0.1\pi \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$t = 0 \Longrightarrow v = -0.1\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$v = -0.1\pi m.s^{-1} < 0$$

أي أن الجسم في لحظة البدء كان متحركاً بالاتجاه السالب.

المسألة الثانية:



يوضح الرسم البياني المجاور تغيرات الطاقة الكامنة المرونية بتغير الموضع لهزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته k معلق به جسم كتلته $0.4kg$

المطلوب:

1- استنتج قيمة ثابت صلابة النابض k.

2- احسب الدور الخاص للحركة.

3- احسب قيمة السرعة عند المرور في مركز الاهتزاز.

الحل:

$$m = 0.4kg$$

من معطيات الرسم البياني

$$E = 0.05 J \quad ، \quad X_{max} = 0.1m$$

(1
$$E = \frac{1}{2}KX_{max}^2$$
$$k = \frac{2E}{X_{max}^2} = \frac{2 \times 0.05}{(0.1)^2}$$
$$k = 10Nm^{-1}$$

(2
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{10}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{4}{100}} = 2\pi \times \frac{2}{10}$$
$$T_0 = 4\pi \times 10^{-1}$$
$$T_0 = 12.5 \times 10^{-1}$$
$$T_0 = 1.25(s)$$

(3 طريقة 1

في مركز الاهتزاز

$$x = 0 \Rightarrow E_P = 0$$
$$E = E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v^2 = \frac{2E}{m}$$
$$v^2 = \frac{2 \times 0.05}{0.4}$$
$$v^2 = \frac{1}{4}$$
$$\boldsymbol{v = \mp\frac{1}{2} m.s^{-1}}$$

طريقة 2 السرعة في مركز الاهتزاز :

$$v_{max} = \mp\omega_0 X_{max}$$
$$= \mp\frac{2\pi}{T_0}X_{max}$$
$$= \mp\frac{2\pi}{0.4\pi} \times 0.1$$
$$\boldsymbol{v_{max} = \mp\frac{1}{2} m.s^{-1}}$$

المسألة الثالثة:

تشكل هزازة توافقية بسيطة من جسم كتلته $m = 1kg$ معلق بطرف نابض مرن شاقولي مهمل الكتلة حلقاه متباعدة فينجز 10 هزات في $10S$ ويرسم أثناء حركته قطعة مستقيمة طولها $16\ cm$

المطلوب:

1- استنتج علاقة الاستطالة السكونية لهذا النابض، ثم احسب قيمتها.

2- احسب قيمة السرعة العظمى (طويلة).

3- احسب قيمة التسارع في المطال $x = 6\ cm$

4- احسب الطاقة الكامنة المرونية في موضع مطاله $x = -4\ cm$ ، واحسب الطاقة الحركية عندئذ.

الحل:

$$m = 1kg$$

10 هزات خلال 10(s)

$$L = 16cm = 16 \times 10^{-2}m$$

1)
$$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{w} + \overrightarrow{F_{so}} = \vec{0}$$

بالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل:

$$w - F_{so} = 0$$

$$\Rightarrow w = F_{so}$$

$$mg = Kx_0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{mg}{K}$$

$$x_0 = \frac{g}{\omega_0^2}$$

حساب ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

نحسب:

$$T_0 = \frac{t}{N} = \frac{10}{10} = 1(s)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$$

$$x_0 = \frac{10}{(2\pi)^2} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}m$$

2)
$$v_{max} = |\mp\omega_0 X_{max}|$$

نحسب X_{max} : $X_{max} = \frac{L}{2} = 8 \times 10^{-2}m$

$$= |\mp 2\pi \times 8 \times 10^{-2}|$$

$$= 16\pi \times 10^{-2}$$

$$v_{max} = 5 \times 10^{-1}m.s^{-1}$$

حيث: $16\pi \simeq 50$

3)
$$a = -\omega_0^2 x$$

$$= -(2\pi)^2(6 \times 10^{-2})$$

$$= -40 \times 6 \times 10^{-2} = -24 \times 10^{-1}m.s^{-2}$$

$$= -2.4m.s^{-2}$$

4) حساب E_P في موضع مطاله $x = -4cm$

$$E_P = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$K = m\omega_0^2$$

$$E_P = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times (2\pi)^2(-4 \times 10^{-2})^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 40 \times 16 \times 10^{-4}$$

$$E_P = 32 \times 10^{-3}\text{J}$$

حساب E_k :

$$E_k = E - E_P$$

نحسب E :

$$E = \frac{1}{2}KX_{max}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_{max}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 40 \times 64 \times 10^{-4}$$

$$E = 128 \times 10^{-3}\text{J}$$

$$E_K = 128 \times 10^{-3} - 32 \times 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{E_K = 96 \times 10^{-3}\text{J}}$$

المسألة الرابعة:

تهتز كرة معدنية كتلتها m بمرونة نابض شاقولي مهمل الكتلة، حلقاته متباعدة، ثابت صلابته $k = 16N.m^{-1}$ بحركة توافقية بسيطة دورها الخاص 1 s ، وبسعة اهتزاز $X_{max} = 0.1m$ ، وبفرض مبدأ الزمن لحظة مرور الكرة بنقطة مطالها $\frac{X_{max}}{2}$ وهي تتحرك بالاتجاه السالب.

المطلوب:

1 - استنتج التابع الزمني لمطال حركة الكرة انطلاقاً من شكله العام.

2 - عيّن لحظتي المرور الأول والثالث للكرة في موضع التوازن.

3 - احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها $x = +0.1m$

4 - احسب كتلة الكرة.

الحل:

$$K = 16Nm^{-1}$$
$$X_{max} = 0.1m$$
$$T_0 = 1(s)$$
$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = \frac{X_{max}}{2} \\ v < 0 \end{array}\right\}$$

(1 $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

نحسب الثوابت

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$$

حساب φ:

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = \frac{X_{max}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{X_{max}}{2} = X_{max}cos\varphi$$

$$cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{3}rad$$
$$\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{3}rad$$

فنختار قيمة لـ φ تجعل السرعة سالبة في اللحظة $t = 0$:

$$v = -\omega_0 X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$t = 0 \Rightarrow v = -\omega_0 X_{max}\sin(\varphi)$$

مقبول $\varphi = \frac{\pi}{3}rad \Rightarrow sin\varphi > 0 \Rightarrow v < 0$

مرفوض $\varphi = -\frac{\pi}{3}rad \Rightarrow sin\varphi < 0 \Rightarrow v > 0$

نعوض قيم الثوابت في الشكل العام فنجد:

$$\boldsymbol{x = 0.1\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)}$$

(2 في مركز الاهتزاز $x = 0$

$$\Rightarrow \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi K}$$

أول مرة: $K = 0$

$$\Rightarrow 2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{12}(s)$$

ثالث مرة: $K = 2$

$$2\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

$$2\pi t = \frac{\pi}{6} + 2\pi$$

$$2\pi t = \frac{13\pi}{6}$$

$$t = \frac{13}{12}(s)$$

(3 $F = |-kx|$

$$F = |-16 \times 0.1|$$
$$= 1.6N$$

(4 $m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{16}{(2\pi)^2}$

$$= \frac{16}{4\pi^2}$$

$$\boldsymbol{m = 0.4kg}$$

مسألة عامة: (1)

نشكل هزازة توافقية بسيطة مؤلفة من نابض مرن شاقول مهمل الكتلة حلقاته متباعدة ثابت صلابته $k = 10N.m^{-1}$ مثبت من إحدى نهايتيه إلى نقطة ثابتة ويحمل في نهايته الثانية جسماً كتلته $m = 0.1kg$ فإذا علمت أن مبدأ الزمن لحظة مرور الجسم في مركز الاهتزاز وهو يتحرك بالاتجاه السالب بسرعة $v = -3m.s^{-1}$

المطلوب:

1. **احسب نبض الحركة.**
2. **استنتج التابع الزمني لمطال الحركة.**
3. **احسب شدة قوة الإرجاع في نقطة مطالها 3cm .**

الحل:

$$m = 0.1kg$$
$$K = 10N.m^{-1}$$

شروط البدء: $\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \\ v = -3m.s^{-1} \end{array}\right\}$

(1 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$= \sqrt{\frac{10}{0.1}} = 10rad.s^{-1}$$

(2 $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = 10rads^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = X_{max}\cos(\varphi)$$

$$\cos\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \varphi \begin{cases} \frac{\pi}{2}rad \\ -\frac{\pi}{2}rad \end{cases}$$

نختار قيمة لـ φ تجعل السرعة سالبة في اللحظة $t=0$

$$v=-\omega_0 X_{max} sin\varphi$$

مقبول $\varphi=\frac{\pi}{2}rad \Rightarrow sin\varphi>0 \Rightarrow v<0$

مرفوض $\varphi=-\frac{\pi}{2}rad \Rightarrow sin\varphi<0 \Rightarrow v>0$

حساب X_{max}: $-3=-10X_{max}sin\frac{\pi}{2}$

$$X_{max}=0.3m$$

$$\boldsymbol{x=0.3\cos\left(10t+\frac{\pi}{2}\right)m}$$

(3

$$F=|-kx|$$
$$=|-10(0.03)|$$
$$F=0.3N$$

مسألة عامة (2):

تهتز نقطة مادية كتلتها $0.5kg$ بحركة توافقية بسيطة بمرونة نابض مهمل الكتلة حلقاته متباعدة شاقولي وبدور خاص 4s وبسعة اهتزاز $X_{max}=8cm$ فإذا علمت أن النقطة كانت في موضع مطاله $\frac{X_{max}}{2}$ في بدء الزمن وهي متحركة بالاتجاه السالب.

المطلوب:

1. استنتج التابع الزمني لمطال حركة هذه النقطة بعد تعيين قيمة الثوابت.

2. عين لحظتي المرور الأول والثالث في وضع التوازن.

3. عين المواضع التي تكون فيها شدة محصلة القوى عظمى واحسب قيمتها وحدد موضعاً تنعدم فيه شدة هذه المحصلة.

4. احسب قيمة ثابت صلابة النابض وهل تتغير هذه القيمة باستبدال الكتلة المعلقة؟

5. احسب الكتلة التي تجعل الدور الخاص 1s.

الحل:

$$m=0.5kg$$
$$X_{max}=0.08m$$
$$T_0=4(s)$$

شروط البدء $\left.\begin{array}{l} t=0 \\ x=\frac{X_{max}}{2} \\ v<0 \end{array}\right\}$

(1

$$x=X_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$$
$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}rads^{-1}$$
$$\left.\begin{array}{l} t=0 \\ x=\frac{X_{max}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{X_{max}}{2}=X_{max}cos\varphi$$
$$cos\varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi \begin{cases} \frac{\pi}{3}rad \\ -\frac{\pi}{3}rad \end{cases}$$
$$v=-\omega_0 X_{max}\sin(\varphi)$$

مقبول $\varphi=\frac{\pi}{3}rad \Rightarrow sin\varphi>0 \Rightarrow v<0$

مرفوض $\varphi=-\frac{\pi}{3}rad \Rightarrow sin\varphi<0 \Rightarrow v>0$

$$x=0.08\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)\ m$$

(2

$$x=0$$
$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)=0$$
$$\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi K$$

أول مرة: $k=0$

$$\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\pi}{2}t=\frac{\pi}{6} \Rightarrow t=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}s$$

ثالث مرة: $k=2$

$$\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi$$
$$\frac{\pi}{2}t=\frac{\pi}{6}+2\pi$$
$$\frac{\pi}{2}t=\frac{13\pi}{6}$$
$$t=\frac{\frac{13}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}s$$

(3

$$F=-Kx$$
$$F_{max}=\mp KX_{max}$$
$$F_{max}=\mp m\omega_0^2 X_{max}$$

F عظمى عندما $x=\mp X_{max}$ تبلغ قيمة عظمى عند مرور الجسم في الوضعتين الجانبيين:

$$F_{max}=\mp 0.5\times\frac{\pi^2}{4}\times 0.08$$

$$F_{max} = \mp 0.1N$$

$F = 0$ عندما $x = 0$ تنعدم عند مرور الجسم في مركز الاهتزاز

4) $$K = m\omega_0^2$$

$$= 0.5(\frac{\pi}{2})^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{10}{4} = \frac{10}{8}$$

$$= 1.25N.m^{-1}$$

لا تتغير قيمة k باستبدال الكتلة المعلقة.

5) $$T_0 = 1(s)$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\grave{m}}{K}}$$

$$1 = 2\pi\sqrt{\frac{\grave{m}}{1.25}}$$

$$1 = 4\pi^2\frac{\grave{m}}{1.25}$$

$$\grave{m} = \frac{1.25}{40}$$

$$\grave{m} = 31.25 \times 10^{-3}kg$$

انتهى البحث الأول

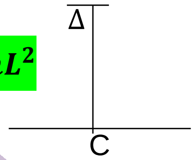
الاهتزازات الجيبية الدورانية

نواس الفتل غير المتخامد:

تذكرة من الحادي عشر:

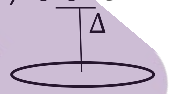
عزم عطالة:

ساق بالنسبة لمحور دوران (Δ) عمودي على الساق ومار من منتصفها (c) هو: كتلتها m وطولها L



$I_{C/\Delta}=\frac{1}{12}mL^2$ (تعطى بنص المسألة كعلاقة أو قيمة)

قرص بالنسبة لمحور دوران (Δ) عمودي على مستويه ومار من مركزه (c) هو: كتلته m ونصف قطره r

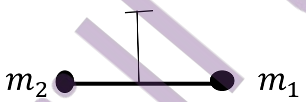


$I_{C/\Delta}=\frac{1}{2}mr^2$ (تعطى بنص المسألة كعلاقة أو قيمة)

كتلة نقطية (m) تبعد عن محور دوران (Δ) مسافة r هو:

$I_{C/\Delta}=mr^2$ (كتلة النقطة)

جملة مادية مكونة من ساق ومثبت على طرفي الساق كتلتين نقطتين $m_2=m_1$



$$I_{\Delta/\text{جملة}}=I_{\Delta/\text{ساق}}+I_{\Delta/m_1}+I_{\Delta/m_2}$$

حيث $\left.\begin{matrix} r_1=r_2=\frac{L}{2} \\ m_1=m_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$I_{\Delta/\text{جملة}}=\frac{1}{12}mL^2+m_1r_1^2+m_2r_2^2$$

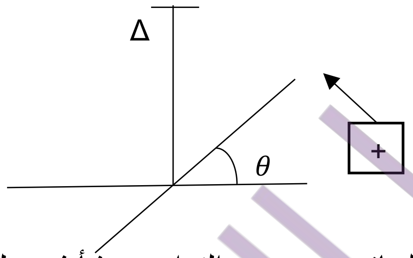
$$I_{\Delta/\text{جملة}}=\frac{1}{12}mL^2+2m_1(\frac{L}{2})^2$$

وإذا كانت الساق مهملة الكتلة يكون: $I_{\Delta/\text{ساق}}=0$

ومنه: $I_{\Delta/\text{جملة}}=2m_1(\frac{L}{2})^2$

	الحركة الجيبية الانسحابية (مرن)	الحركة الجيبية الدورانية (فتل)
شرط التوازن	$\Sigma\vec{F}=\vec{0}$	$\Sigma\,\Gamma_{\vec{F}/\Delta}=0$
العلاقة الأساسية في التحريك	$\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$	$\Sigma\,\Gamma_{\vec{F}/\Delta}=I_\Delta.\propto$

التسارع	$\bar{a}=(\bar{v})'_t$	$\bar{\propto}=(\omega)'_t$ تسارع زاوي
السرعة	$\bar{v}=(\bar{x})'_t$	$\omega=(\bar{\theta})'_t$ سرعة زاوية
المطال	$\bar{x}$	$\bar{\theta}$ مطال زاوي
الطاقة الميكانيكية	$E=\frac{1}{2}KX^2_{max}$	$E=\frac{1}{2}K\theta^2_{ma}$
الطاقة الكامنة	$E_P=\frac{1}{2}Kx^2$	$E_P=\frac{1}{2}K\theta^2$
الطاقة الحركية	$E_K=\frac{1}{2}mv^2$	$E_K=\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$
الارجاع	قوة $\bar{F}=-K\bar{x}$ الارجاع، K ثابت صلابة النابض	$\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta}=-K\theta$ عزم مزدوجة الفتل، K ثابت فتل السلك
المعادلة التفاضلية	$(x)''_t=-\frac{k}{m}(x)$	$(\theta)''_t=-\frac{K}{I_\Delta}(\theta)$



- عند تدوير الساق عن وضع التوازن ينشأ في سلك الفتل مزدوجة فتل $\vec{\eta}$ عزمها عزم إرجاع $\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta}=-K\bar{\theta}$ حيث K ثابت فتل السلك ونلاحظ من الدراسة التجريبية:

1- عند إضافة كتل على الساق فإن الدور يزداد.

2- عند تقصير سلك الفتل فإن الدور ينقص.

دراسة حركة الساق:

ساق أفقية متجانسة قابلة للاهتزاز في مستوٍ أفقي حول سلك فتل شاقولي مار من منتصفها نزيح الساق عن وضع توازنها الأفقي بزاوي θ ونتركها دون سرعة ابتدائية. ادرس حركة الساق مستنتجاً طبيعة الحركة.

الحل:

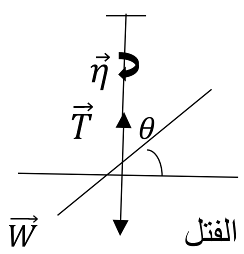
الجملة المدروسة: الساق

القوى الخارجية المؤثرة:

$\vec{W}$ ثقل الساق

$\vec{T}$ توتر السلك

$\vec{\eta}$ مزدوجة الفتل تنشأ في سلك الفتل



$$\Sigma\Gamma_{\vec{F}/\Delta} = I_\Delta \propto$$
$$\Gamma_{\vec{W}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} + \Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = I_\Delta.\bar{\propto}$$
$$0 \quad + \quad 0 \quad - \quad K\bar{\theta} = I_\Delta(\theta)''_t$$

حيث:

K ثابت فتل السلك

$\Gamma_{\vec{T}/\Delta} = \Gamma_{\vec{W}/\Delta} = 0$ لأن حامل كل منهما منطبق على محور الدوران

$$(\theta)''_t = -\frac{K}{I_\Delta}(\bar{\theta}) \dots\dots\dots\dots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

$\bar{\theta}$: المطال الزاوي

θ_{max} : السعة الزاوية

ω_0 : النبض الخاص وواحدته $rad.s^{-1}$

$\bar{\varphi}$: الطور الابتدائي (rad)

للتأكد من صحة الحل نشتق مرتين بالنسبة للزمن

$$(\bar{\theta})'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$
$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \dots\dots\dots\dots (2)$$

بالموازنة بين (1) و (2) :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} > 0$$

ومنه حركة نواس الفتل هي حركة جيبية دورانية.

- علاقة الدور الخاص:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}} = \frac{2\pi}{T_0}$$
$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

T_0 : الدور الخاص (S)

I_Δ : عزم عطالة النواس $(kg.m^2)$

K : ثابت فتل السلك $m.N rad^{-1}$

1- الدور لا يتعلق بالسعة الزاوية θ_{max}

لا تتغير قيمة الدور مهما غيرنا السعة.

2- الدور يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لعزم عطالة النواس:

$$I_{C/\Delta} = \frac{1}{12}mL^2 \qquad I_{جملة/\Delta} = I_{ساق} + 2\,I_{m_1/\Delta}$$

إضافة كتل على الساق تؤدي إلى زيادة عزم العطالة فيزداد الدور.

1) تقريب الكتل من محور الدوران (سلك الفتل) بالمقدار نفسه يؤدي إلى نقصان عزم العطالة فتزداد السرعة الزاوية فينقص الدور.

2) لحساب الدور الجديد بدلالة الدور القديم عند إضافة كتل على الساق.

قبل إضافة الكتل $T_0 = \sqrt{\frac{I_{ساق/\Delta}}{K}}$

بعد إضافة الكتل $T'_0 = \sqrt{\frac{I_{جملة/\Delta}}{K}}$

K نفسه لأن السلك نفسه

$$\frac{T_0}{T'_0} = \sqrt{\frac{I_{ساق/\Delta}}{I_{جملة/\Delta}}}$$

سؤال:

نواس فتل دوره T_0 عزم عطالته I_Δ نجعل عزم عطالته أربعة أمثال ما كانت عليه يصبح دوره الجديد:

A) $T'_0 = \frac{T_0}{4}$ B) $T'_0 = 4T_0$

C) $T'_0 = 2T_0$ D) $T'_0 = \frac{T_0}{2}$

الحل:

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \\ T'_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{I'_\Delta}{K}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{T_0}{T'_0} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{I'_\Delta}}$$

$$\frac{T_0}{T'_0} = \sqrt{\frac{I_\Delta}{4I_\Delta}}$$

$$T'_0 = 2T_0$$

3- الدور يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لثابت فتل السلك K

حيث:

$$K = K'\frac{(2r)^4}{\ell}$$

$(2r)$: قطر السلك

ℓ: طول السلك

K': ثابت يتعلق بنوع مادة السلك

ماذا يحدث للدور عند تقصير السلك؟

نقصان ℓ ⇐ زيادة K ⇐ نقصان T_0

يتغير الدور بتغير

- عزم العطالة عند إضافة كتل أو إزالة كتل (عندما نلعب بالساق) (يبقى K ثابت)
- بتغير K (عندما نلعب بالسلك) (يبقى I_Δ ثابت)

لحساب الدور الجديد بدلالة الدور القديم عندما يتغير طول السلك:

$$T_{0_1} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_1}}$$

$$T_{0_2} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_2}} \qquad I_\Delta \text{ ثابت}$$

$$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} = \sqrt{\frac{\grave{K}\frac{(2r)^4}{\ell_2}}{\grave{K}\frac{(2r)^4}{\ell_1}}}$$

$$\boxed{\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}}$$

سؤال:

نواس فتل دوره T_{0_1} طول سلكه ℓ_1 نجعل طول السلك ربع ما كان عليه يصبح الدور الجديد:

A) $T_{0_2} = \frac{T_{0_1}}{\sqrt{2}}$ B) $T_{0_2} = 2T_{0_1}$

C) $T_{0_2} = \frac{T_{0_1}}{2}$ D) $T_{0_2} = \sqrt{2}\,T_{0_1}$

الحل:

$$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\frac{1}{4}\ell_1}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$$

$$T_{0_2} = \frac{T_{0_1}}{2}$$

سؤال:

نواس فتل دوره T_{0_1} طول سلكه ℓ_1 ، نحذف من طول السلك ربعه ونعلق الساق بالسلك الباقي يصبح دوره:

A) $T_{0_2} = \frac{3}{2}T_{0_1}$ B) $T_{0_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}T_{0_1}$

C) $T_{0_2} = \frac{2}{3}T_{0_1}$ D) $T_{0_2} = \frac{\sqrt{2}}{3}T_{0_1}$

الحل: $\ell_2 = \frac{3}{4}\ell_1$

$$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$$

$$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\frac{3}{4}\ell_1}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$T_{0_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}T_{0_1}$$

ملاحظة:

نقصان طول السلك إلى النصف يؤدي إلى زيادة K إلى الضعف

$$\ell_1 = \frac{1}{2}\ell \Rightarrow K_1 = 2K$$

ملاحظات مسائل:

1) التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

نحدد قيم الثوابت:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I_\Delta}}$$

حساب $\bar{\varphi}$, θ_{max} :

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ \omega = 0 \\ \theta = \theta_{max} = ? \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta_{max} = \theta_{max}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = 1$$

$$\varphi = 0\,rad$$

ممكن أن تكون شروط البدء في نص المسألة على الشكل التالي:

① الجسم في مطاله الأعظمي السالب:

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ \theta = -\theta_{max} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -\theta_{max} = \theta_{max}\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = -1$$

$$\varphi = \pi$$

② الجسم ماراً من مركز الاهتزاز ومتحرك بالاتجاه السالب

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ \theta = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = \theta_{max}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = 0$$

$$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}rad \quad , \quad \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}rad$$

مقبول $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\varphi > 0 \Rightarrow \omega < 0$

مرفوض $\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow \omega > 0$

نعوض الثوابت في الشكل العام

2) التابع الزمني للسرعة الزاوية:

$$\omega = (\theta)'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

حساب السرعة الزاوية

- عندما يعطى (t) نعوض في تابع السرعة
- السرعة العظمى (طويلة) $\omega_{max} = |\mp\,\omega_0\,\theta_{max}|$

عندما يطلب حساب ω (السرعة الزاوية) عند المرور في موضع مطاله (θ)

$$E_K = E - E_P$$

$$\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 = \frac{1}{2}k[\theta_{max}^2 - \theta^2]$$

$$\omega^2 = \frac{k}{I_\Delta}[\theta_{max}^2 - \theta^2]$$

3) لحساب لحظة المرور في مركز الاهتزاز:

$$\theta = 0$$

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

$$\omega_0 t + \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi k - \varphi}{\omega_0}$$

مرور أول: $k = 0$

مرور ثاني: $k = 1$

4) حساب التسارع الزاوي:

$$\propto = -\omega_0^2\,\theta$$

تعوض θ بالراديان

5) عزم مزدوجة الفتل:

$$\Gamma\vec{\varepsilon}_{/\Delta} = -K\bar{\theta}$$

6) دور النواس الفتل:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

7) الطاقة الميكانيكية:

$$E = \frac{1}{2}K\theta_{max}^2$$

8) الطاقة الكامنة:

$$E_P = \frac{1}{2}K\theta^2$$

9) الطاقة الحركية:

$$E_K = E - E_P \quad \text{أو} \quad E_K = \frac{1}{2}\,I_\Delta\omega^2$$

10) لحساب K

$K = I_\Delta\,\omega_0^2$ — من علاقة الدور (نعزل K)

ملاحظة تتعلق بعمل الميقاتية لنواس الفتل:

إذا قال لنا:

1 الميقاتية تؤخر المقصود بذلك دورها كبير ويجب تصغير الدور.

لتصغير الدور (لتصحيح التأخير)

- انقاص I_Δ
  - إزالة كتل معلقة على الساق
  - تقريب الكتل من محور الدوران بالمقدار نفسه
- أ) انقاص طول السلك
- ب) تبديل السلك بسلك (قطره أكبر)

2 الميقاتية تُقدم ⟸ دورها صغير ويجب تكبيره

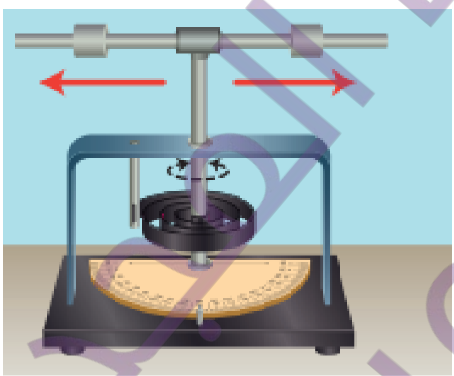
لتكبير الدور (لتصحيح التقدم)

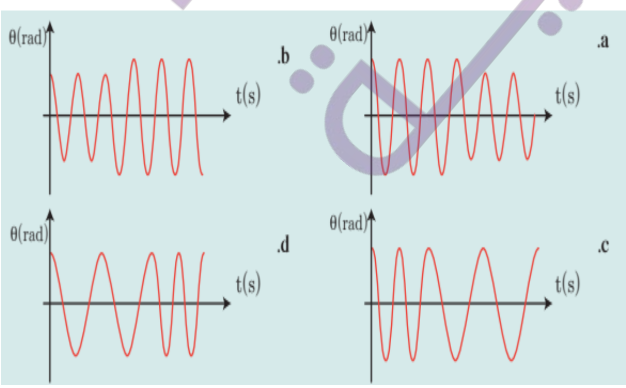
- زيادة I_Δ
  - إضافة كتل
  - ابعاد الكتل عن محور الدوران
- أ) زيادة طول السلك
- ب) تبديل السلك بسلك (قطره أصغر)

اختبر نفسي :

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1- يهتز نواس فتل بدور خاص T_0، في لحظة ما أثناء حركته ابتعدت الكتلتان عن محور الدوران بالمقدار نفسه كما هو موضح فالرسم البياني الذي يعبّر عن تغير المطال الزاوي مع الزمن في هذه الحالة هو:





الجواب هو : C

الحل: عند ابتعاد الكتل يزداد I_Δ فيزداد الدور .

2- ميقاتية تعتمد في عملها على نواس فتل كما في الشكل المجاور، ولتصحيح التأخير الحاصل بالوقت فيها، قدم الطلاب مقترحاتهم، فإن الاقتراح الصحيح هو:

a. زيادة طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

b. زيادة كتلة القرص مع المحافظة على قطره.

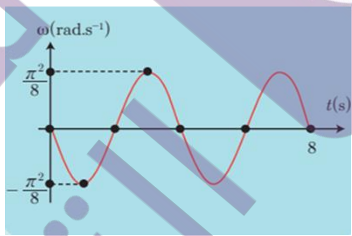
c. إنقاص طول سلك الفتل بمقدار ضئيل.

d. زيادة قطر القرص مع المحافظة على كتلته.

الحل:

يجب إنقاص الدور لتصحيح التأخير لذلك ننقص طول السلك.

3- يمثل الرسم البياني المجاور تغيرات السرعة الزاوية لنواس فتل بتغير الزمن، فإن تابع السرعة الزاوية الذي يمثله هذا المنحني هو:



a. $\bar{\omega} = \frac{\pi^2}{8} sin 3\pi t$

b. $\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8} sin 2\pi t$

c. $\bar{\omega} = +\frac{\pi^2}{8} sin \frac{\pi}{2} t$

d. $\bar{\omega} = -\frac{\pi^2}{8} sin \frac{\pi}{2} t$

الجواب هو: d

التعليل: من الخط البياني : $2T_0 = 8$

$$\Rightarrow T_0 = 4(s) \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} rad.s^{-1}$$

من الخط البياني: $\omega_0 \theta_{max} = \frac{\pi^2}{8} rad.s^{-1}$

ثانياً: أجب عن السؤال التالي:

نعلق ساقين متماثلتين بسلكي فتل متماثلين طول الأول l_1 وطول الثاني l_2 فإذا علمت أن $T_{0_1} = 2T_{0_2}$ تكون العلاقة بين طولي السلكين.

A) $\ell_1 = 4\ell_2$ B) $\ell_2 = 4\ell_1$

C) $\ell_1 = 2\ell_2$ D) $\ell_2 = 2\ell_1$

الجواب هو: **A**

طريقة الحل:

$$\left.\begin{aligned} T_{0_1} &= 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_1}} \\ T_{0_2} &= 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} = \sqrt{\frac{\acute{K}\frac{(2r)^4}{\ell_2}}{\acute{K}\frac{(2r)^4}{\ell_1}}}$$

$$\frac{T_{0_1}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} \Rightarrow \frac{2T_{0_2}}{T_{0_2}} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$$

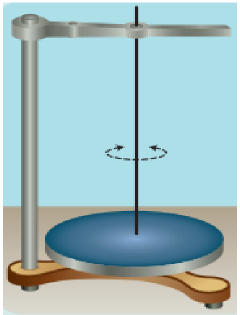
$$2 = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} \Rightarrow \boxed{\ell_1 = 4\ell_2}$$

ثالثاً: حل المسائل الآتية:

(وفي جميع المسائل $4\pi = 12.5$, $\pi^2 = 10$, $g = 10 m.s^{-2}$)

المسألة الأولى:

يتألف نواس فتل من قرص متجانس كتلته $m = 2kg$ نصف قطره $r = 4cm$ ، معلق من مركزه إلى سلك فتل ثابت فتله $k = 16 \times 10^{-3} m.N.rad^{-1}$ ،



ندير القرص في مستوٍ أفقي زاوية $\theta = +\frac{\pi}{4} rad$ عن وضع توازنه ، ونتركه دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$

المطلوب:

1. احسب الدور الخاص للنواس.
2. استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.
3. احسب الطاقة الكامنة في وضع مطاله الزاوي $\theta = \frac{\pi}{8} rad$ ، ثم احسب الطاقة الحركية عندئذٍ،

(عزم عطالة قرص حول محور عمودي على مستويه ومار من مركزه $I_{\Delta/c} = \frac{1}{2} mr^2$)

الحل:

$$K = 16 \times 10^{-3} mNrad^{-1}$$

$$m = 2kg \quad , \quad r = 4cm = 4 \times 10^{-2} m$$

شروط البدء: $\left.\begin{aligned} t &= 0 \\ \theta &= \frac{\pi}{4} \\ \omega &= 0 \end{aligned}\right\}$

1) حساب دور الخاص:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

نحسب I_Δ :

$$I_{C/\Delta} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\times 2\times 16\times 10^{-4}$$
$$= 16\times 10^{-4}kgm^2$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-4}}{16\times10^{-3}}}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}} = 2(s)$$

حيث: $\sqrt{10} = \pi$

2) $$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi rad.s^{-1}$$
$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{4}rad \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta_{max} = \theta_{max}\cos\varphi$$
$$\cos\varphi = 1$$
$$\boldsymbol{\varphi = 0}$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t)rad}$$

طلب إضافي:

احسب السرعة الزاوية للقرص في لحظة المرور الأول والثاني في مركز الاهتزاز.

$$\omega = (\theta)'_t = -\frac{\pi}{4}(\pi)\sin(\pi t)$$
$$\boldsymbol{\omega = -\frac{10}{4}\sin(\pi t)}$$

نحسب لحظة المرور في مركز الاهتزاز:

$$\theta = 0 \Longrightarrow \cos(\pi t) = 0$$
$$\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

أول مرة $\Longrightarrow k = 0 \Longrightarrow \pi t = \frac{\pi}{2}$

$$t = \frac{1}{2}(s)$$

نعوض في تابع السرعة:

$$\Longrightarrow \omega = -\frac{10}{4}\sin\left(\pi\times\frac{1}{2}\right)$$
$$\omega = -\frac{10}{4}rad.s^{-1}$$

مرور ثاني $\Longrightarrow k = 1 \Longrightarrow \pi t = \frac{3\pi}{2}$

$$t = \frac{3}{2}(s)$$

نعوض في تابع السرعة:

$$\omega = -\frac{10}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$\omega = +\frac{10}{4}rad.s^{-1}$$

3) حساب الطاقة الكامنة: $\theta = \frac{\pi}{8}rad$

$$E_P = \frac{1}{2}k\theta^2$$
$$= \frac{1}{2}\times 16\times10^{-3}\times\frac{\pi^2}{64}$$
$$E_P = \frac{1}{8}\times10^{-2}J$$

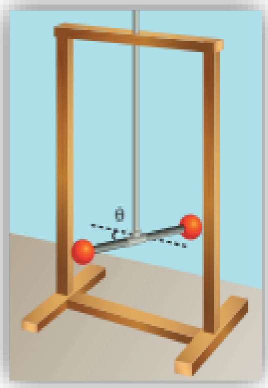
وطاقته الحركية عندئذ:

$$E_K = E - E_P$$

نحسب E:

$$E = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2$$
$$= \frac{1}{2}\times16\times10^{-3}\times\frac{\pi^2}{16}$$
$$E = \frac{1}{2}\times10^{-2}J$$
$$\Longrightarrow E_K = \frac{1}{2}\times10^{-2} - \frac{1}{8}\times10^{-2}$$
$$E_K = \frac{3}{8}\times10^{-2}J$$

المسألة الثانية:



ساق مهملة الكتلة طولها L ، تثبت في كل من طرفيها كتلة نقطية 125g ، ونعلق لجملة من منتصفها إلى سلك فتل شاقولي ثابت فتله $16\times10^{-3}m.N.rad^{-1}$ لتؤلف الجملة نواس فتل، نزيح الساق عن وضع توازنها في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = \frac{\pi}{3}rad$ وتترك دون سرعة ابتدائية لحظة بدء الزمن، فتهتز بحركة جيبية دورانية، دورها الخاص 2.5 S.

المطلوب:

1. **استنتج التابع الزمني للمطال الزاوي انطلاقاً من شكله العام.**
2. **احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الأول بوضع التوازن.**
3. **احسب طول الساق.**

الحل:

طول الساق L , الساق مهملة الكتلة

$$m_1 = m_2 = 125g = 125\times10^{-3}kg$$
$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{3}rad \\ \omega = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} T_0 = 2.5(s) \\ k = 16\times10^{-3}rads^{-1} \end{array}$$

1) $$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5} rad.s^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{r} t = 0 \\ \theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta_{max} = \theta_{max} cos\varphi$$

$$cos\varphi = 1 \quad \Longrightarrow \boldsymbol{\varphi = 0}$$

نعوض في الشكل العام:

$$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right)$$

(2

$$\omega = (\theta)'_t = -\frac{4\pi}{5}\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}t\right)$$

$$\omega = -\frac{40}{15}\sin\left(\frac{4\pi}{5}t\right)$$

نحسب لحظة المرور في مركز الاهتزاز:

$$\theta = 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{5}t\right) = 0$$

$$\frac{4\pi}{5}t = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

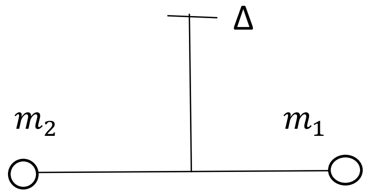
مرور أول $K = 0 \Longrightarrow \frac{4\pi}{5}t = \frac{\pi}{2}$

$$t = \frac{5}{8}(s)$$

$$\Longrightarrow \omega = -\frac{40}{15}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\,\frac{5}{8}\right)$$

$$\omega = -\frac{40}{15} rad.s^{-1} = -\frac{8}{3} rad.s^{-1}$$

(3 حساب طول الساق:



نحسب : $I_{جملة/\Delta}$

$$I_{جملة/\Delta} = I_{ساق} + 2I_{m_1/\Delta}$$

$$= 0 + 2m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= 2m_1\frac{L^2}{4} = m_1\frac{L^2}{2}$$

$$I_{جملة/\Delta} = m_1\frac{L^2}{2}$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1\frac{L^2}{2}}{K}} \\ T_0^2 = 4\pi^2\dfrac{m_1\frac{L^2}{2}}{K} \end{array}\right\}$$

$$T_0^2 = \frac{2\pi^2 m_1 L^2}{K}$$

$$L^2 = \frac{K\,T_0^2}{2\pi^2 m_1}$$

$$L = \sqrt{\frac{K\,T_0^2}{2\pi^2 m_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{16\times10^{-3}\times6.25}{2\pi^2\times125\times10^{-3}}} = 2\times10^{-1}m$$

$$\boldsymbol{L = 2\times10^{-1}m}$$

المسألة الثالثة:

ساق أفقية متجانسة طولها $L = ab = 40cm$ معلقة بسلك فتل شاقولي يمر من منتصفها.

a. ندير الساق في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta = 60°$ انطلاقاً من وضع توازنها ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة t = 0 فتهتز بحركة جيبية دورانية دورها الخاص $T_0 = 1s$ فإذا علمت أن عزم عطالة الساق بالنسبة لسلك الفتل $I_{\Delta/C} = 2\times10^{-3}kg.m^2$

المطلوب:

1. استنتج التابع الزمني الزاوي انطلاقاً من شكله العام.
2. احسب قيمة السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها الثاني بوضع التوازن.
3. احسب قيمة التسارع الزاوي للساق عندما تصنع الزاوية (-30°) مع وضع توازنها.

b. نثبت بالطرفين a, b كتلتين نقطتين $m_1 = m_2 = 75g$ استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للجملة المهتزة، ثم احسب قيمة ثابت فتل السلك.

c. قسم سلك الفتل قسمين متساويين، ونعلق الساق بعدئذٍ بنصفي السلك معاً ؛ أحدهما من الأعلى، والآخر من الأسفل ومن منتصفها، ونثبت طرف هذا السلك من الأسفل بحيث يكون شاقولياً.

استنتج قيمة الدور الخاص الجديد للساق (دون وجود كتل نقطية).

افترض $\pi^2 = 10$

الحل:

$$L = 40cm = 4\times10^{-1}m$$

$$I_{C/\Delta} = 2\times10^{-3}kgm^2$$

شروط البدء
$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{3} rad \\ \omega = 0 \end{array}\right\} \quad , \quad T_0 = 1(s)$$

(A

1
$$\theta = \theta_{max} cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi rad.s^{-1}$$
$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \theta = \theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$\theta_{max} = \theta_{max} cos\varphi$$
$$cos\varphi = 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3} \cos(2\pi t)}\ rad$$

2 حساب السرعة الزاوية:

- $$\omega = (\theta)'_t = -2\pi\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2\pi t)$$

$$\boldsymbol{\omega = -\frac{20}{3} \sin(2\pi t)}$$

- حساب لحظة المرور الثاني:

$$\theta = 0 \Longrightarrow \cos(2\pi t) = 0$$
$$2\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi K$$
$$K = 1 \Longrightarrow 2\pi t = \frac{3\pi}{2}$$
$$t = \frac{3}{4}(s)$$

نعوض في تابع السرعة:

$$\omega = -\frac{20}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$\omega = +\frac{20}{3} rad.s^{-1}$$

3
$$\boldsymbol{\propto = -\omega_0^2 \theta}$$
$$\theta = -30° = -\frac{\pi}{6} rad$$
$$\propto = -(2\pi)^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\propto = +\frac{40\,\pi}{6} rad.s^{-2}$$
$$\propto = +\frac{20\,\pi}{3} rad.s^{-2}$$

(B
$$m_1 = m_2 = 75g$$
$$= 75 \times 10^{-3} kg$$

قبل وضع الكتل: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{ساق}/\Delta}}{K}}$

بعد وضع الكتل: $\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{جملة}/\Delta}}{K}}$

$$\frac{T_0}{\grave{T}_0} = \sqrt{\frac{I_{\text{ساق}/\Delta}}{I_{\text{جملة}/\Delta}}}$$

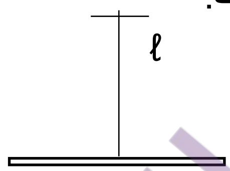
نحسب $I_{\text{جملة}/\Delta}$:

$$I_{\text{جملة}/\Delta} = I_{\text{ساق}/\Delta} + 2m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$= 2 \times 10^{-3} + 2 \times 75 \times 10^{-3}(2 \times 10^{-1})^2$$
$$= 2 \times 10^{-3} + 600 \times 10^{-5}$$
$$= 2 \times 10^{-3} + 6 \times 10^{-3}$$
$$I_{\text{جملة}/\Delta} = 8 \times 10^{-3} kgm^2$$
$$\frac{T_0}{\grave{T}_0} = \sqrt{\frac{2\times10^{-3}}{8\times10^{-3}}} = \frac{1}{2}$$
$$\grave{T}_0 = 2T_0$$
$$\grave{T}_0 = 2 \times 1 = 2(s)$$

- حساب K :

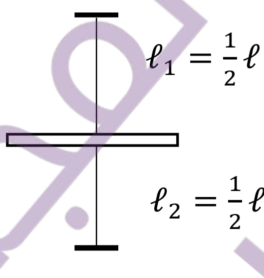
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{ساق}/\Delta}}{K}}$$
$$1 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-3}}{K}} \Longrightarrow K = 8 \times 10^{-2} mNrad^{-1}$$

(C قبل تقسيم السلك:



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

بعد:



$$\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K_1+K_2}}$$
$$\ell_1 = \frac{1}{2}\ell \Longrightarrow K_1 = 2K$$
$$\ell_2 = \frac{1}{2}\ell \Longrightarrow K_2 = 2K$$
$$\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{2K+2K}}$$
$$\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{4K}}$$

$$\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}} \times \frac{1}{2}$$

$$\grave{T}_0 = \frac{1}{2}T_0$$

$$\grave{T}_0 = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}(s)$$

مسألة عامة (3):

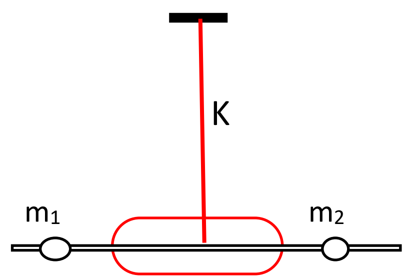
تتألّفُ ميقاتيّةٌ من قرص نحاسيٍّ كتلتُه $M_1 = 0.12\ kg$ نصفُ قطره $R = 0.05m$ مثبّتٌ عليه ساق كتلتُها $M_2 = 0.012\ kg$ طولُها $L = 0.1m$ تُحملُ الساق بكتلتين نقطيّتين $m_1 = m_2 = 0.05\ kg$ كتلتان تبعدان عن بعضهما البعض مسافةً قدرُها $2r = 0.04m$ يمكن تغييرُها بوساطة بزّال، نعلّق جملة القرص وما عليه من مركز عطالتها إلى سلكِ فتلٍ شاقوليٍّ ثابتٌ فتله $k = 8 \times 10^{-4}\ m.N.rad^{-1}$ كما في الشكل المجاور.

المطلوب:

1. احسبْ دورَ الميقاتيّة.

2. إذا أردنا للدَّور أنْ يزدادَ بمقدار $0.86s$ وذلك بزيادة البعد بين الكتلتين، فما البعدُ الجديدُ الذي يجبُ أنْ يصبحَ بينهما؟ (عزم عطالة السّاق حول محور مار من مركز عطالته $I_1 = \frac{1}{2}M_1R^2$ وعزم عطالة الساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركزها $I_2 = \frac{1}{12}M_2L^2$

، $\pi^2 \simeq 10$، $\pi = 3.14$



الحل:

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = 0.12kg \\ R = 0.05m \end{array}\right\} \text{قرص}$$

$$\left.\begin{array}{l} M_2 = 00.12kg \\ L = 0.1m \end{array}\right\} \text{ساق}$$

$$m_1 = m_2 = 0.05kg$$

$$2r = 0.04 \Longrightarrow r_1 = r_2 = 0.02m$$

$$K = 8\times10^{-4} m.Nrad^{-1}$$

1)

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{K}}$$

$$I_{\text{جملة}/\Delta} = I_{\text{قرص}} + I_{\text{ساق}/\Delta} + 2I_{\Delta/m_1}$$

$$= \frac{1}{2}M_1r^2 + \frac{1}{12}M_2L^2 + 2m_1r_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 0.12\times 25\times10^{-4} + \frac{1}{12}\times 0.012\times 10^{-2}$$

$$+2\times 0.05\times 4\times 10^{-4}$$

$$= 15\times10^{-5} + 10^{-5} + 4\times10^{-5}$$

$$= 20\times10^{-5} = 2\times10^{-4}kg.m^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times10^{-4}}{8\times10^{-4}}}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{1}{4}} = \pi(s)$$

2)

$$\grave{T}_0 = T_0 + 0.86$$

$$= 3.14 + 0.86$$

$$\grave{T}_0 = 4(s)$$

لكن:

$$\grave{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{جملة}/\Delta}}{K}}$$

K بقي نفسه لأن السلك بقي نفسه عند زيادة البعد بين الكتل.

$$I_{\text{جملة}/\Delta} = I_{\text{قرص}/\Delta} + I_{\text{ساق}/\Delta} + 2I_{\Delta/m_1}$$

$$= 15\times10^{-5} + 10^{-5} + 2m_1\grave{r}_1^2$$

$$= 15\times10^{-5} + 10^{-5} + 2\times5\times10^{-2}\grave{r}_1^2$$

$$I_{\text{جملة}/\Delta} = 16\times10^{-5} + 10^{-1}\grave{r}_1^2$$

نعوض في علاقة الدور فنجد:

$$4 = 2\pi\sqrt{\frac{16\times10^{-5}+10^{-1}\grave{r}_1^2}{8\times10^{-4}}}$$

نربع:

$$16 = 4\pi^2\frac{16\times10^{-5}+10^{-1}\grave{r}^2}{8\times10^{-4}}$$

$$128\times10^{-4} = 64\times10^{-4} + 4\grave{r}^2$$

$$64\times10^{-4} = 4\grave{r}^2$$

$$\boldsymbol{2\grave{r} = 8\times10^{-2}\ m}$$

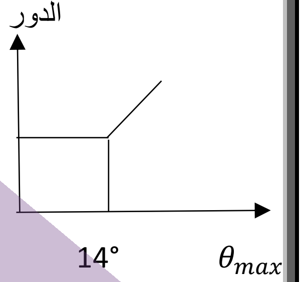
و هو البعد بين الكتلتين

انتهى البحث الثاني

الاهتزازات غير التوافقية

دورها ثابت فقط في حالة السعات الصغيرة ويزداد بزيادة السعة عندما تصبح كبيرة

هي حركة جيبية دورانية فقط في في حالة السعات الصغيرة وليست جيبية في حالة السعات الكبيرة



ملاحظة:

فهي زاوية صغيرة $\begin{cases} \theta \leq 14° \\ \text{أو} \\ \theta \leq 0.24rad \end{cases}$

وعندما تقاس بالراديان يكون: $\sin\theta \simeq \theta$

$\theta_{max} \leq 14°$ الدور ثابت

$\theta_{max} > 14°$ الدور يزداد بازدياد السعة

$$T_0^{`} = T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$$

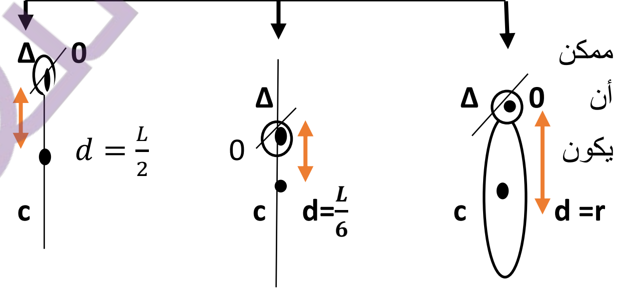
السعة (rad)

الدور في حالة السعات الصغيرة

الدور في حالة السعات الكبيرة

النواس الثقلي: ثقلي بسيط — ثقلي مركب

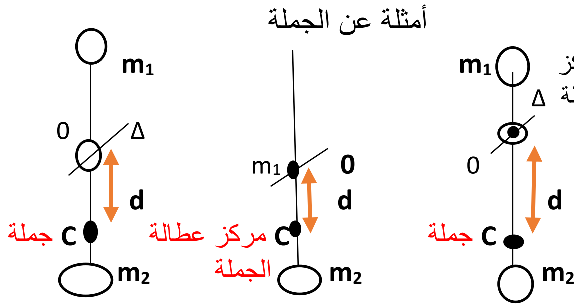
النواس الثقلي المركب هو جملة متجانسة (ساق فقط أو قرص فقط)



نعتبر كتلة الساق أو القرص متجمعة في مركزها

النواس الثقلي المركب هو جملة غير متجانسة (ساق وكتل مثبتة عليها)

أمثلة عن الجملة



دوماً: $d = 0\ C_{جملة}$ البعد بين مركز عطالة الجملة ومحور الدوران.

النواس الثقلي غيرُ المتخامد

هو كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم قوة ثقله حول محور دوران:

1- أفقي.

2- عمودي على مستويه.

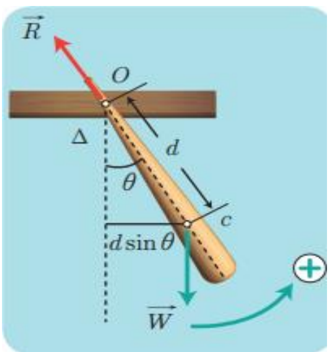
3- لا يمر من مركز عطالته.

الدارسة تحريكية للنواس الثقلي: (دورة 2021)

جسم كتلته m مركز عطالته c قابل للاهتزاز حول محور دوران أفقي عمودي على مستويه يمر من نقطة 0 تبعد مسافة d عن مركز عطالته نزيح الجسم عن وضع التوازن الشاقولي بزاوية (θ) ثم نتركه دون سرعة ابتدائية فيهتز في مستوٍ شاقولي:

1- ادرس حركة الجسم:

الحل:



القوى الخارجية المؤثرة:

$\vec{W}$ ثقل الجسم

$\vec{R}$ قوة رد فعل محور الدوران

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_\Delta . \propto$$

باختيار الجهة الموجبة للدوران عكس جهة دوران عقارب الساعة نجد:

$\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$ لأن حامل $\vec{R}$ يمر من محور الدوران.

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} = -\underbrace{(d\sin\theta)}_{\text{ذراع}} w$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{W}/\Delta} = -mgd\sin\theta$$

$$-mgd\sin\theta + 0 = I_\Delta(\theta)_t^{''}$$

$$(\theta)_t^{''} = -\frac{mgd}{I_\Delta}\sin\theta$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تحتوي $\sin\theta$ بدلاً من (θ) فحلها ليس جيبي .

لذلك حركته اهتزازية غير توافقية

1- كيف تصبح حركة النواس الثقلي من أجل السعات الزاوية الصغيرة $(\theta \leq 0.24rad)$

في هذه الحالة $\sin\theta \simeq \theta$

$$(\theta)_t^{''} = -\frac{mgd}{I_\Delta}(\theta) \ldots\ldots\ldots (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل: $\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

للتحقق من صحة الحل نشتق الحل مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\theta)'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

$$(\theta)''_t = -\omega_0^2\theta \dots\dots (2)$$

بالموازنة بين (1) و (2) :

$$\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}} > 0$$

وهذا محقق لأن جميع المقادير موجبة.
فحركة النواس الثقلي هي حركة جيبية دورانية.

استنتاج علاقة الدور الخاص في حالة السعات الصغيرة

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}}$$

$$\boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}}$$

I_Δ : عزم عطالة الجسم الصلب.

$d = 0C$ بعد مركز عطالة النواس عن محور الدوران

T_0 : دور النواس بسعة صغيرة.

النواس الثقلي البسيط

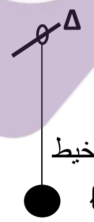
تعريفه **(دورة 2022)**

عملياً

كرة صغير كتلتها m
كثافتها النسبية كبيرة معلقة بخيط
مهمل الكتلة لا يمتط طوله ℓ
كبير بالنسبة لنصف قطر الكرة

نظرياً

نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها
على بعد **ثابت** من محور
أفقي **ثابت**



انطلاقاً من علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي المركب في حالة السعات الصغيرة استنتج العلاقة المحددة للدور الخاص للنواس الثقلي البسيط:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}} \quad \left.\begin{matrix} I_\Delta = m\ell^2 \\ d = l \end{matrix}\right\} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

1- دور النواس الثقلي البسيط في حالة السعات الصغيرة يتناسب طرداً مع الجذر التربيعي لطول الخيط.

2- دور النواس الثقلي البسيط في حالة السعات الصغيرة يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لتسارع الجاذبية الأرضية.

2- نواس ثقلي يدق الثانية ⟸ دوره يساوي 2S.

3- نواس ثقلي مواقت لنواس ثقلي آخر ⟸ يساويه بالدور.

4- النوسات صغيرة السعة متواقتة فيما بينها (لها الدور نفسه).

ملاحظات لمسائل النواس الثقلي المركب:

مهما كان شكل النواس الثقلي يُطلب ما يلي:

السعات الصغيرة $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$

1) حساب دور النواس:

السعات الكبيرة $T'_0 = T_0(1+\frac{\theta_{max}^2}{16})$

ولحساب الدور يجب حساب كل من : I_Δ ، $d = 0C$ ، M كتلة النواس

2) طول خيط النواس الثقلي البسيط المواقت للنواس المركب

مواقت ⟸ يساويه بالدور T_0 **بسيط** $= T_0$ **مركب**

3) نزيح النواس عن وضع التوازن الشاقولي بزاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية:

نميز حالتين:

الحالة الأولى: θ_{max} صغيرة:

الحركة جيبية فيكون **المطلوب:**

1 التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

2 التابع الزمني للسرعة الزاوية:

$$\omega = (\theta)'_t = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

3 السرعة الزاوية العظمى (عند الشاقول)

$$\omega = |\omega_0\theta_{max}|$$

الحالة الثانية: θ_{max} كبيرة:

الحركة ليست جيبية.
القوى الخارجية المؤثرة:

$\vec{W}$ ثقل النواس

$\vec{R}$ رد فعل محور الدوران

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين

(1) $\theta_1 = \theta_{max}$ ، $E_{K_1} = 0$

(2) $\theta_2 = 0$ في الشاقول (في جميع مسائل الكتاب)

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{R}}$$

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$E_{K_2} - 0 = Mgh + 0$$

$$E_{K_2} = Mgd(1-\cos\theta_{max})$$

المطلوب أحد ما يلي:

1- احسب الطاقة الحركية للنواس عند المرور بالشاقول:

$$E_K = Mgd(1-\cos\theta_{max})$$

-2 استنتج علاقة السرعة الزاوية للنواس عند المرور بالشاقول:

$$\frac{1}{2}I_{\Delta}\omega^2 = Mgd(1-\cos\theta_{max})$$

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{2Mgd(1-\cos\theta_{max})}{I_{\Delta}}}}$$

-3 استنتج θ_{max}

$$1-\cos\theta_{max} = \frac{E_K}{Mgd}$$

$$\boldsymbol{1-\cos\theta_{max} = \frac{\frac{1}{2}I_{\Delta}\,\omega^2}{Mgd}}$$

-5 السرعة الخطية لنقطة من النواس :

$\boldsymbol{v = \omega . r}$ ⟵ بعد النقطة عن محور الدوران

جميع النقاط لها نفس السرعة الزاوية وتختلف السرعة الخطية باختلاف r .

تذكرة في عزوم العطالة:

- عزم عطالة ساق كتلتها m وطولها L بالنسبة لمحور عمودي على مستويها ومار من منتصفها:

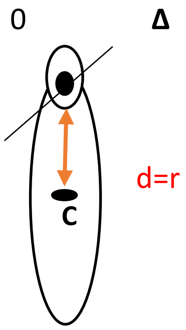
$$I_{C/\Delta} = \frac{1}{12}mL^2$$

- عزم عطالة قرص كتلته m ونصف قطره r بالنسبة لمحور عمودي على ومار من منتصفها : $I_{C/\Delta} = \frac{1}{2}mr^2$

لحساب عزم عطالة جسم صلب (ساق، قرص.....) بالنسبة لمحور لا يمر من مركز عطالته.

نستخدم هايغنز: $I_{O/\Delta} = I_{C/\Delta} + md^2$

1 القرص يهتز حول محور مار من نقطة من محيطه



$$I_{O/\Delta} = I_{C/\Delta} + md^2$$

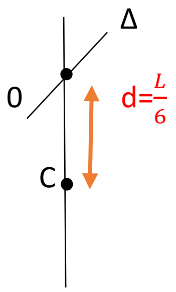
$$I_{O/\Delta} = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2$$

$$= (\frac{1}{2}+1)mr^2$$

$$\boldsymbol{I_{O/\Delta} = \frac{3}{2}mr^2}$$

---

2 الساق تهتز حول محور مار من نقطة تبعد عن $\frac{L}{6}$ منتصفها



$$I_{O/\Delta} = I_{C/\Delta} + md^2$$

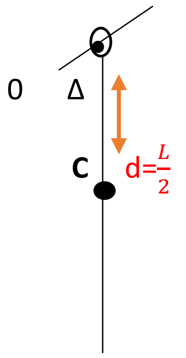
$$= \frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{L}{6})^2$$

$$I_{O/\Delta} = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{36}\right)mL^2$$

$$\boldsymbol{I_{O/\Delta} = \frac{1}{9}mL^2}$$

---

3 الساق تهتز حول محور مار من طرفها العلوي



$$I_{O/\Delta} = I_{C/\Delta} + md^2$$

$$= \frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{L}{2})^2$$

$$I_{O/\Delta} = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)mL^2$$

$$\boldsymbol{I_{O/\Delta} = \frac{1}{3}mL^2}$$

مسألة:

يتألف نواس ثقلي مركب من ساق شاقوليه كتلتها (m) وطولها $L = \frac{3}{2}m$ تهتز حول محور أفقي عمودي على مستويها ومار من طرفها العلوي عزم عطالتها حول محور مار من مركزها $I_{C/\Delta} = \frac{1}{12}mL^2$ والمطلوب:

1. انطلاقاً من العلاقة العامة لدور النواس الثقلي المركب في حالة السعات الصغيرة استنتج دور اهتزازات الساق بدلالة طولها ثم احسب قيمته.

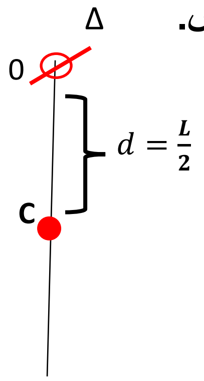
2. احسب طول خيط النواس الثقلي البسيط الموافق لهذا النواس.

3. احسب دور النواس لو اهتز (نَاس) بسعة زاوية 0.4rad

4. نزيح النواس عن وضع التوازن الشاقولي زاوية 60° ونتركه دون سرعة ابتدائية استنتج علاقة السرعة الزاوية للنواس عند المرور بالشاقول ثم احسب قيمتها. واحسب السرعة الخطية لمركز عطالة النواس.

الحل:

(1 $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{Mgd}}$



$$d = \frac{L}{2}$$

$$I_{0/\Delta} = I_{C/\Delta} + md^2$$

$$= \frac{1}{12}mL^2 + m(\frac{L}{2})^2$$

$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) mL^2$$

$$\boldsymbol{I_{0/\Delta} = \frac{1}{3}mL^2}$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg\frac{L}{2}}}$$

$$\boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}}$$

حساب T_0 :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times\frac{3}{2}}{3\times 10}} = 2(s)$$

2) T_0 بسيط $=$ T_0 مركب

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2$$

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}} = 2$$

$$\sqrt{\ell} = 1$$

$$\boldsymbol{\ell = 1m}$$

3) $\theta_{max} = 0.4rad$ (السعة كبيرة)

$$\boldsymbol{\grave{T}_0 = T_0(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16})}$$

$$= 2(1 + \frac{0.16}{16})$$

$$= 2(1 + 0.01)$$

$$= 2(1.01) = 2.02(s)$$

4) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

① $E_{K_1} = 0 \quad , \quad \theta_1 = \theta_{max}$

② عند المرور بالشاقول $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{R}}$$

$$\frac{1}{2}I_\Delta\omega^2 - 0 = mgd + 0$$

حيث :

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd(1-cos\theta_{max})}{I_\Delta}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg\frac{L}{2}(1-cos\theta_{max})}{\frac{1}{3}mL^2}}$$

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{3g(1-cos\theta_{max})}{L}}}$$

حساب ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{3\times10(1-\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sqrt{20(\frac{1}{2})} = \sqrt{10} = \pi rad.s^{-1}$$

- حساب السرعة الخطية لمركز عطالة النواس:

$$v_C = \omega.r$$

حيث: $r = d = \frac{L}{2}$

$$v_C = \pi \times \frac{L}{2} = \pi \times \frac{3}{4}$$

$$v_C = \frac{3\pi}{4}m.s^{-1}$$

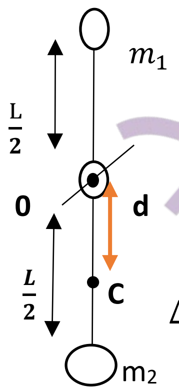
لحساب عزم عطالة جملة (ساق وكتل):

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

حالات $I_{\Delta/\text{ساق}}$:

1) الساق مهملة الكتلة:

$$I_{\Delta/\text{ساق}} = 0$$



$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

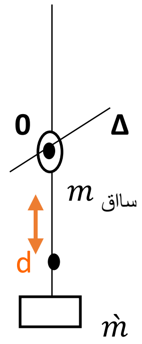
$$= 0 + m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(\frac{L}{2})^2$$

$$\boldsymbol{I_{\Delta/\text{جملة}} = (m_1 + m_2)(\frac{L}{2})^2}$$

حساب d:

$$d = \frac{m_2(\frac{L}{2}) - m_1(\frac{L}{2})}{m_2 + m_1}$$

2) الساق لها كتلة والمحور مار من منتصفها



$$I_{\Delta/\text{ساق}} = \frac{1}{12} mL^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\grave{m}}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{12} mL^2 + \grave{m}\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

إذا كانت $m \neq \grave{m}$ نعوض أرقام المسألة

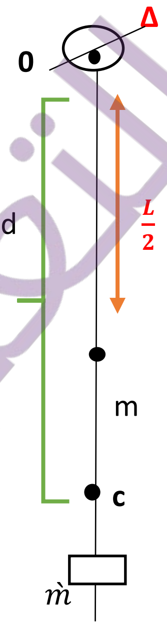
إذا كانت $m = \grave{m}$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) mL^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{3} mL^2$$

حساب d : $d = \frac{\grave{m}\frac{\ell}{2} + m(0)}{m + \grave{m}}$

3) الساق لها كتلة والمحور لا يمر من مركزها نستخدم هايغنز:



$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\grave{m}}$$

$$I_{\Delta/\text{ساق}} = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_{\Delta/\text{ساق}} = \frac{1}{3} mL^2$$

$$I_{\Delta/\grave{m}} = \grave{m} r^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{3} mL^2 + \grave{m} r^2$$

$$d = \frac{\grave{m} r + m\left(\frac{L}{2}\right)}{m + \grave{m}}$$

ملاحظة: يوجد حالات أخرى لحساب $I_{\Delta/\text{جملة}}$ على نفس النمط.

حل المسائل الآتية:

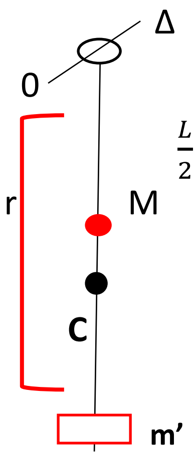
(وفي جميع المسائل $4\pi = 12.5$, $\pi^2 = 10$, $g = 10 m.s^{-1}$)

المسألة الأولى:

يتألف نواس ثقلي مركب من ساق شاقولية متجانسة كتلتها m=0.5kg طولها 1.5m يمكنها أن تتنوس حول محور أفقي مار من طرفها العلوي ومثبت عليها كتلة نقطية $\acute{m} = 0.5kg$ على بُعد 1m من هذا الطرف.

المطلوب:

1. احسب دور هذا النواس في حالة السعات الزاوية الصغيرة
2. نزيح جملة النواس عن موضع توازنه الشاقولي بزاوية $\frac{\pi}{2} rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية. احسب الطاقة الحركية للنواس لحظة مروره بالشاقول ثم احسب السرعة الخطية للكتلة $\acute{m}$ عندئذ. عزم عطالة ساق حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها $I_{\Delta/C} = \frac{1}{12} ML^2$



$$L = \frac{3}{2} m$$

$$M = \frac{1}{2} kg$$

$$\grave{m} = \frac{1}{2} kg$$

$$r_{\grave{m}} = 1m$$

الحل:

1)

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{جملة}}}{M_{\text{جملة}} g d}}$$

حساب $M_{\text{جملة}}$:

$$M_{\text{جملة}} = M + \grave{m} = 1kg$$

حساب $I_{\Delta/\text{جملة}}$:

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\Delta/\text{ساق}} + I_{\Delta/\grave{m}}$$

حيث:

$$I_{\Delta/\text{ساق}} = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_{\Delta/\text{ساق}} = \frac{1}{3} ML^2$$

ومنه:

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{3} ML^2 + \grave{m} r^2$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{7}{8} kg.m^2$$

حساب d:

$$d = \frac{M\left(\frac{L}{2}\right) + \grave{m}(r)}{M + \grave{m}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times 1}{1}$$

$$d = \frac{7}{8} m$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{8}}{1\times10\times\frac{7}{8}}}$$

$$T_0 = 2(s)$$

2) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعتين:

① $E_{K_1} = 0 \quad , \quad \theta_1 = \theta_{max}$

② $\theta_2 = 0 \quad ,$ عند المرور بالشاقول

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{R}}$$

$$E_K - 0 = M_{جملة}gh + 0$$

حيث:

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$E_K = M_{جملة}gd(1 - cos\theta_{max})$$

$$E_K = 1 \times 10 \times \frac{7}{8}(1 - 0)$$

$$E_K = \frac{70}{8}\,J$$

حساب السرعة الخطية لـ $\grave{m}$:

$$v_{\grave{m}} = \omega . r_{\grave{m}}$$

نحسب ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,E_K}{I_\Delta}} = \sqrt{\frac{2\times\frac{70}{8}}{\frac{7}{8}}} = \sqrt{20}rad.s^{-1}$$

$$v_{\grave{m}} = \sqrt{20}\times 1 = \sqrt{20}\,m.s^{-1}$$

المسألة الرابعة:

ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها $L = 1m$ ، نثبت في منتصفها كتلة نقطية $m_1 = 0.4kg$ ونثبت في طرفها السفلي كتلة نقطية $m_2 = 0.2kg$ لتؤلف الجملة نواساً ثقلياً مركباً يمكنه أن ينوس في مستوٍ شاقولي حول محور أفقي مار من الطرف العلوي للساق.

المطلوب:

1. **احسب دور نوساتها صغيرة السعة.**
2. **نزيح الجملة عن موضع توازنها بزاوية $\theta_{max} > 0.24rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الخطية لمركز عطالة جملة النواس لحظة مرورها بالشاقول $v = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}m.s^{-1}$ المطلوب:**

a. **احسب السرعة الخطية للكتلة النقطية m_2 لحظة المرور بالشاقول.**

b. **استنتج قيمة الزاوية θ_{max}**

الحل:

$$L = 1m$$

$$m_1 = 0.4kg$$

$$m_2 = 0.2kg$$

$$\boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}}$$

حساب $M_{جملة}$:

$$M_{\Delta/جملة} = m + \grave{m}$$

$$= 0.4 + 0.2 = 0.6kg$$

$$I_{\Delta/جملة} = I_{\Delta/ساق} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}$$

$$= 0 + m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(L)^2$$

$$= 0.4(\frac{1}{2})^2 + 0.2(1)^2$$

$$= 0.1 + 0.2 = 0.3kg.m^2$$

$$\boldsymbol{d = \frac{m_1\left(\frac{L}{2}\right) + m_2(L)}{m_1 + m_2}}$$

$$= \frac{0.4\times\left(\frac{1}{2}\right) + 0.2(1)}{0.6} = \frac{0.4}{0.6}$$

$$d = \frac{2}{3}m$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.3}{0.6\times10\times\frac{2}{3}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\times10}} = 2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$T_0 = \sqrt{3}\,(s)$$

2)

$$\theta_{max} > 0.24rad$$

$$v_C = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}m.s^{-1}$$

حساب السرعة الخطية لـ m_2 :

$$v_{m_2} = \omega . L$$

نحسب ω :

$$v_C = \omega . d \implies \omega = \frac{\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}rad.s^{-1}$$

نعوض:

$$\implies v_{m_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\times 1$$

$$v_{m_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}m.s^{-1}$$

استنتاج θ_{max} :

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعتين:

① $E_{K_1} = 0 \quad , \quad \theta_1 = \theta_{max}$

② $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec F}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec \omega} + W_{\vec R}$$

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 - 0 = Mgh + 0$$

حيث:

$W_{\vec R} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec R$ لا تنتقل

$$\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2 = Mgd(1 - \cos\theta_{max})$$

$$1 - \cos\theta_{max} = \frac{\frac{1}{2} I_\Delta \omega^2}{Mgh}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 0.3 \times \frac{4\pi^2}{3}}{0.6 \times 10 \times \frac{2}{3}}$$

$$1 - \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad}$$

المسألة الخامسة:

يتألف نواس ثقلي من ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها L تحمل في كل من طرفيها كتلة نقطية $\grave{m}$ نعلق الجملة بمحور دوران أفقي يبعد $\frac{L}{4}$ عن طرف الساق العلوي نزيح الجملة عن وضع توازنها الشاقولي $\frac{1}{2\pi}$ ونتركها دون سرعة ابتدائية في اللحظة t=0 فتهتز بدور خاص $T = 2.5(s)$

والمطلوب:

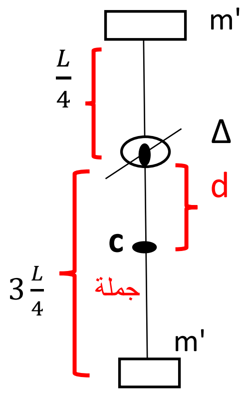
1- التابع الزمني للمطال الزاوي لحركة هذا النواس انطلاقاً من شكله العام.

2- احسب قيمة السرعة الزاوية العظمى للحركة الطويلة.

3- استنتج بالرموز العلاقة المحدد لطول الساق ثم احسب قيمته.

4- لنفرض أنه في إحدى النوسات انفصلت الكتلة السفلية عن الساق. استنتج الدور الخاص الجديد للجملة.

الحل:



طول الساق L

في طرفيها كتلتان $\grave{m}$

$$\theta_{max} = \frac{1}{2\pi} rad$$

$$T_0 = 2.5(s)$$

1) التابع الزمني للمطال الزاوي:

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2.5} = \frac{4\pi}{5} rad s^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \theta = \theta_{max} \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta_{max} = \theta_{max}\cos\varphi$$

$$\Longrightarrow \cos\varphi = 1$$

$$\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{4\pi}{5} t\right) rad}$$

2) السرعة الزاوية العظمى:

$$\omega_{max} = |\omega_0 \theta_{max}|$$

$$= \frac{4\pi}{5} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{2}{5} = 0.4 rad.s^{-1}$$

3) حساب طول الساق:

من علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}$$

$$\boldsymbol{I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\text{ساق}} + I_{\Delta/\grave{m}} + I_{\Delta/\grave{m}}}$$

$$= 0 + \grave{m}\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \grave{m}\left(\frac{3L}{4}\right)^2$$

$$= \frac{\grave{m} L^2}{16} + \frac{9\grave{m} L^2}{16}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{10\grave{m} L^2}{16}$$

$$\boldsymbol{I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{5\grave{m} L^2}{8}}$$

من الرسم نجد: $d = \frac{L}{4}$

لأن مركز عطالة الجملة بقي في منتصف الساق

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{5\grave{m} L^2}{8}}{2\grave{m}(g)\frac{L}{4}}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{5}{4}\frac{L}{g}}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{5L}{4 \times 10}$$

$$T_0^2 = 5L \Longrightarrow \boldsymbol{L = \frac{T_0^2}{5}}$$

$$L = \frac{6.25}{5}$$

$$\boldsymbol{L = 1.25 m}$$

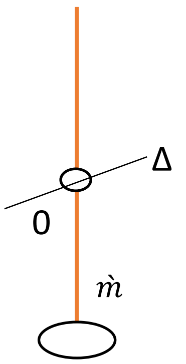
4) $$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{L}{4}}$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\text{ساق}} + I_{\Delta/\grave{m}}$$

$$= 0 + \grave{m}\left(\frac{L}{4}\right)^2$$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \grave{m}\left(\frac{L}{4}\right)^2$$



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\grave{m}(\frac{L}{4})^2}{\grave{m}(10)(\frac{L}{4})}}$$

$$T_0 = 2\sqrt{\frac{L}{4}} = \sqrt{L}$$

$$T_0 = \sqrt{1.25}\ (s)$$

المسألة 6 ـ 271:

يتألف نواس ثقلي مركب من قرص متجانس كتلته m نصف قطره $r = \frac{2}{3}m$ يمكن أن يهتز في مستوٍ شاقولي حول محور أفقي مار من نقطة على محيطه.

المطلوب:

1. انطلاقاً من العلاقة العامة لدور النواس الثقلي المركب استنتج العلاقة المحددة لدوره الخاص في حالة السعات الصغيرة ثم احسب قيمة هذا الدور.

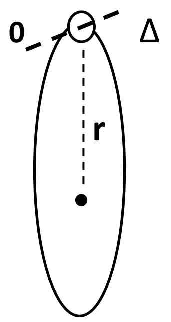
2. احسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس المركب.

3. نثبت في نقطة من محيط القرص كتلة نقطية $\acute{m} = m$ ونجعله يهتز حول محور مار من مركز القرص احسب دوره في هذه الحالة من أجل السعات الزاوية الصغيرة.

4. نزيح القرص من جديد عن وضع توازنه الشاقولي بسعة زاوية θ_{max} ونتركه دون سرعة ابتدائية فتكون السرعة الخطية للكتلة النقطية $\acute{m}$ لحظة المرور بالشاقول $\frac{2\pi}{3}m.s^{-1}$ احسب قيمة السعة الزاوية θ_{max}

إذا علمت أن: $g = 10m.s^{-2}$, $\theta_{max} > 0.24rad$ $\pi^2 = 10$ عزم عطالة القرص حول محور مار من مركزه وعمودي على مستويه $I_{\Delta/C} = \frac{1}{2}mr^2$

الحل: كتلة القرص m $\quad r = \frac{2}{3}m$



$$I_{C/\Delta} = \frac{1}{2}mr^2$$

1) $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{Mgd}}$$

حساب:

$$I_{C/\Delta} = I_{C/\Delta} + md^2$$
$$= \frac{1}{2}mr^2 + mr^2$$
$$I_{C/\Delta} = \frac{3}{2}mr^2$$

$$d = r \quad , \quad M = m$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{mgr}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}}$$

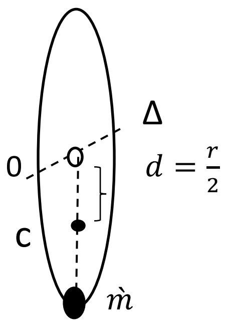
حساب T_0 :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\frac{2}{3}}{10}}$$
$$T_0 = 2(s)$$

2) $T_{0\ \text{مركب}} = T_{0\ \text{بسيط}}$

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2$$
$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}} = 2$$
$$\sqrt{\ell} = 1$$
$$\ell = 1m$$

3) $m = \grave{m}$



نحسب:

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\text{قرص}} + I_{\grave{m}}$$
$$= \frac{1}{2}mr^2 + \grave{m}r^2$$

لكن: $m = \grave{m}$

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2$$
$$I_{\Delta/\text{جملة}} = \frac{3}{2}mr^2$$

$$d = \frac{\grave{m}r + m(0)}{m + \grave{m}} = \frac{\grave{m}r}{2\grave{m}} = \frac{r}{2}$$

$$M = m + \grave{m} = 2m$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}mr^2}{2m\,g\frac{r}{2}}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r}{g}}$$

حساب T_0 :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{\frac{2}{3}}{10}}$$
$$T_0 = 2(s)$$

(4

$$\theta_{max} > 0.2rad$$

$$v_{m} = \frac{2\pi}{3} m.s^{-1}$$

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعتين:

$E_{K_1} = 0 \quad , \quad \theta_1 = \theta_{max}$ ①

$\theta_2 = 0$, عند المرور بالشاقول ②

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{R}}$$

$$\frac{1}{2} I_{\Delta}\omega^2 - 0 = Mgd(1 - cos\theta_{max}) + 0$$

حيث:

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$1 - cos\theta_{max} = \frac{\frac{1}{2} I_{\Delta}\omega^2}{Mgd}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2} mr^2)\ \frac{v^2}{r^2}}{(2m)\ g\ (\frac{r}{2})}$$

$$\Longrightarrow 1 - cos\theta_{max} = \frac{\frac{3}{4}\ v^2}{g\ \ r}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{4\pi^2}{9}}{10 \times \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad}$$

المسألة $\frac{5}{271}$ عامة:

يتألف نواس ثقلي من ساق شاقولية مهملة الكتلة طولها 1m تحمل في نهايتها العلوية كتلة نقطية $m_1 = 0.2kg$ وتحمل في نهايتها السفلية كتلة نقطية $m_2 = 0.6kg$ تهتز هذه الساق حول محور أفقي مار من منتصفها.

المطلوب:

1. احسب دور النواس في حالة السعات الصغيرة.

2. احسب طول النواس البسيط المواقت لهذا النواس.

3. احسب دور النواس لو ناس بسعة $\theta_{max} = 0.4rad$

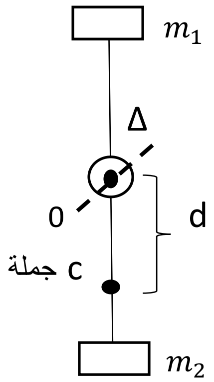
4. نزيح الساق عن وضع توازنها الشاقولي بزاوية $\theta_{max} = 60°$

a. استنتج بالرموز علاقة السرعة الزاوية لجملة النواس لحظة مرورها بشاقول محور التعليق ثم احسب قيمتها عندئذ.

b. احسب السرعة الخطية لمركز عطالة جملة النواس لحظة المرور بالشاقول.

5. نستبدل بالكتلة m_2 كتلة $m_1 = 0.2kg$ ونعلق الساق من منتصفها بسلك فتل شاقولي لنشكل بذلك نواساً للفتل نزيح الساق الأفقية عن وضع توازنها بزاوية ونتركها دون سرعة ابتدائية فتهتز بدور $T_0 = 2\pi\ s$ احسب قيمة ثابت فتل سلك التعليق.

6. احسب قيمة التسارع الزاوي لنواس الفتل عند المرور بوضع $\theta = 0.5rad$



الحل:

$m_1 = 0.2kg$

$m_2 = 0.6kg$

$L = 1m$

الساق مهملة الكتلة

(1

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/جملة}}{Mgd_{جملة}}}$$

$$\boldsymbol{M_{جملة} = m_1 + m_2 = 0.8kg}$$

$$\boldsymbol{I_{\Delta/جملة} = I_{ساق} + I_{\Delta/m_1} + I_{\Delta/m_2}}$$

$$= 0 + m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(\frac{L}{2})^2$$

$$= 0.2(\frac{1}{2})^2 + 0.6(\frac{1}{2})^2$$

$$= 0.8 \times \frac{1}{4} = 0.2kgm^2$$

$$\boldsymbol{d = \frac{m_2\left(\frac{L}{2}\right) - m_1(\frac{L}{2})}{m_2 + m_1}}$$

$$= \frac{0.6\left(\frac{1}{2}\right) - 0.2(\frac{1}{2})}{0.8}$$

$$d = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4}m$$

نعوض في علاقة الدور:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{0.8(10)(\frac{1}{4})}}$$

$$\boldsymbol{T_0 = 2(s)}$$

(2

$$\underset{\text{بسيط}}{T_0} = \underset{\text{مركب}}{T_0}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2$$

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}} = 2$$

$$\sqrt{\ell} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\ell = 1m}$$

(3 السعات كبيرة $\theta_{max} = 0.4rad$

$$\boldsymbol{\acute{T}_0 = T_0\left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)}$$

$$= 2\left(1 + \frac{(0.4)^2}{16}\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{0.16}{16}\right)$$

$$= 2(1 + 0.01) = 2(1.01)$$

$$\acute{T}_0 = 2.02(s)$$

(4

a. نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعتين:

$E_{K_1} = 0 \quad , \quad \theta_1 = \theta_{max}$ ①

$\theta_2 = 0$ ②

$$\Delta E_K = \Sigma W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{R}}$$

$$\frac{1}{2} I_{\Delta}\omega^2 - 0 = Mgd(1 - cos\theta_{max})$$

حيث:

$W_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$$\omega^2 = \frac{2Mgd(1 - cos\theta_{max})}{I_{\Delta}}$$

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{2Mgd(1 - cos\theta_{max})}{I_{\Delta}}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \times 0.8 \times 10 \times \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2})}{0.2}}$$

$$= \sqrt{20(\tfrac{1}{2})}$$

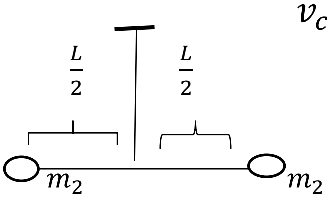
$$= \sqrt{10} = \pi rad.s^{-1}$$

b. حساب السرعة الخطية لمركز العطالة:

$$v_c = \omega.d = \pi \times \frac{1}{4}$$

$$v_c = \frac{\pi}{4} m.s^{-1}$$

(5



$$m_1 = m_2 = 0.2kg$$

$$T_0 = 2\pi(s)$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta/\text{جملة}}}{K}}$$

نحسب $I_{\Delta/\text{جملة}}$:

$$I_{\Delta/\text{جملة}} = I_{\text{ساق}} + 2I_{\Delta/m_1}$$

$$= 0 + 2m_1(\frac{L}{2})^2$$

$$= 2m_1\frac{L^2}{4}$$

$$\boldsymbol{I_{\Delta/\text{جملة}} = m_1\frac{L^2}{2}} = 0.2\frac{1}{2} = 0.1kg.m^2$$

نعوض في علاقة الدور:

$$2\pi = 2\pi\sqrt{\frac{0.1}{K}}$$

$$1 = \frac{0.1}{K}$$

$$K = 0.1m.Nrad^{-1}$$

(6

$$\boldsymbol{\propto = -\omega_0^2\theta}$$

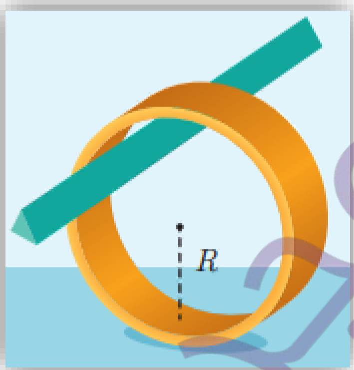
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1rad.s^{-1}$$

$$\propto = -1(0.5)$$

$$\propto = -0.5rad.s^{-2}$$

المسألة 4 ـــ 271

نعلق حلقة معدنية نصف قطرها $R = 12.5cm$ بمحور أفقي ثابت كما هو موضح بالشكل:



المطلوب:

1. استنتج عبارة الدور الخاص لاهتزاز هذا النواس من أجل السعات الصغيرة إذا علمت أن عزم عطالة الحلقة حول محور عمودي على مستويها ومار من مركز عطالتها $I_{\Delta/c} = M\,R^2$ ثم احسبه.

2. احسب طول النواس البسيط الموافق.

الحل:

$$R = 12.5cm$$

$$R = 12.5 \times 10^{-2}\,m$$

$$I_{\Delta/C} = MR^2$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\Delta}}{Mgd}}$$

$$I_{\Delta/0} = I_{\Delta/C} + md^2$$

$$= MR^2 + MR^2$$

$$I_{\Delta/C} = 2MR^2$$

$$d = R$$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\times 12.5\times 10^{-2}}{10}}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{25\times 10^{-2}}{10}}$$

$$T_0 = 2\times 5\times 10^{-1}$$

$$T_0 = 1(s)$$

2) T_0 مركب T_0 بسيط

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 1$$

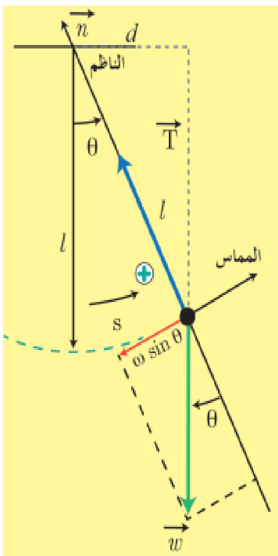
$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10}} = 1$$

$$4\pi^2\frac{\ell}{10} = 1$$

$$\boldsymbol{\ell = \frac{1}{4}m}$$

دراسة حركة النواس الثقلي البسيط

نواس ثقلي بسيط مكون من خيط مهمل الكتلة لايمتط طوله ℓ نعلق في نهايته كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها m نحرف الخيط عن وضع توازنه الشاقولي بزاوية θ ثم نتركه دون سرعة ابتدائية . ادرس حركة الكرة باستخدام العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني (دورة)



الجملة المدروسة: الكرة

القوى الخارجية المؤثرة في الكرة:

ثقل الكرة $\vec{w} = m\vec{g}$

توتر الخيط $\vec{T}$

طريقة أولى:

بتطبيق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني

$$\Sigma\bar{\Gamma} = I_\Delta\,\bar{\propto}$$

$$\Gamma_{\vec{T}/\Delta} + \Gamma_{\vec{W}/\Delta} = I_\Delta.\bar{\propto}$$

$\Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يلاقي محور الدوران

$$0 - mg\ell\sin\theta = m\ell^2\,(\theta)''_t$$

$$(\theta)''_t = -\frac{g}{\ell}\sin\bar{\theta}$$

$$\sin\theta \simeq \theta \Leftarrow \theta \le 0.24rad$$

$$\boldsymbol{(\theta)''_t = -\frac{g}{\ell}(\theta) \ldots\ldots (1)}$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حل جيبي من الشكل :

$$\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

للتأكد نشتق الحل مرتين:

$$\boldsymbol{(\theta)''_t = -\omega_0^2\bar{\theta} \ldots\ldots (2)}$$

بالموازنة بين (1) و (2) :

$$\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{\ell}} > 0}$$

وهذا محقق لأن ℓ , g موجبان .

فحركة النواس الثقلي البسيط هي حركة جيبية دورانية نبضها الخاص ω_0

علاقة الدور الخاص:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

وهي علاقة الدور الخاص للنواس البسيط بحالة السعات الصغيرة.

طريقة ثانية

باستخدام العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور المماس

$$-w_t + 0 = ma_t$$

$$-mg\sin\theta = ma_t$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_t = -g\sin\theta} \quad (1)$$

لاحظ أن a_t معدوم عند مرور الكرة في الشاقول

لكن:

$$\boldsymbol{a_t = (\theta)''_t.\ell} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد:

$$(\theta)''_t.\ell = -g\sin\theta$$

$$\boldsymbol{(\theta)''_t = -\frac{g}{\ell}\sin\theta}$$

ونتابع كما سبق في الطريقة الأولى.

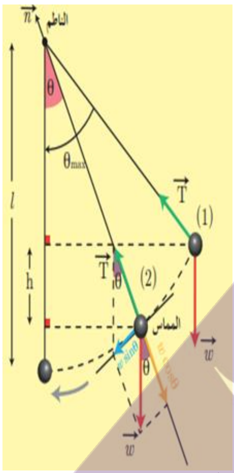
من الحادي عشر

$$v = \omega.r$$

$$(v)'_t = (\omega)'_t.\ell$$

$$a_t = (\theta)''_t.\ell$$

استنتاج العلاقة المحددة لسرعة كرة النواس عند مرور الخيط في وضع زاويته (θ)



نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

1- حيث يضع الخيط مع الشاقول θ_{max} .

$$\theta_1 = \theta_{max}$$

2- حيث يضع الخيط مع الشاقول

$$\theta_2 = \theta$$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{T}}$$

$E_{K_1} = 0$ لأنه ترك بدون سرعة ابتدائية

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$v^2 = 2gh$$

$$h = \ell[cos\theta - cos\theta_{max}]$$

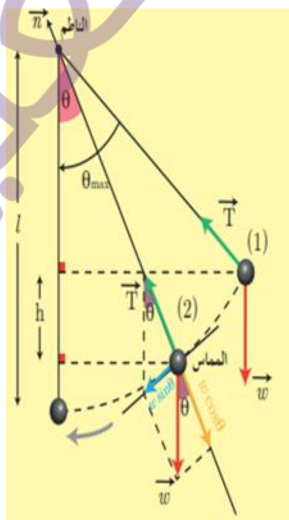
$$v^2 = 2g\ell[cos\theta - cos\theta_{max}]$$

$$v = \sqrt{2g\ell[cos\theta - cos\theta_{max}]}$$

وفي الشاقول $\theta = 0 \Leftarrow cos\theta = 1$

$$v = \sqrt{2g\ell[1 - cos\theta_{max}]}$$

استنتاج علاقة توتر خيط النواس لحظة مرور الخيط في وضع زاويته (θ)



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور له حامل وجهة $\vec{T}$ (الناظم):

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{\ell}$$

$$-W_C + T = ma_c$$

$$T = W_C + m\frac{v^2}{\ell}$$

$$T = mgcos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$$

لكن:

$$v^2 = 2g\ell[cos\theta - cos\theta_{max}]$$

$$\Longrightarrow T = mgcos\theta + m\frac{2g\ell[cos\theta - cos\theta_{max}]}{\ell}$$

$$T = mgcos\theta + 2mgcos\theta - 2mgcos\theta_{max}$$

$$T = 3mgcos\theta - 2mgcos\theta_{max}$$

$$T = mg[3cos\theta - 2cos\theta_{max}]$$

عند المرور بالشاقول تكون: $\theta = 0$

$$T = mg[3 - 2cos\theta_{max}]$$

يبلغ التوتر قيمة عظمى عند المرور بوضع التوازن الشاقولي

عند الوضعين الجانبيين $\theta = \theta_{max}$

$$T = mgcos\theta_{max}$$

يبلغ التوتر قيمة صغرى عند المرور بالوضعين الجانبيين

الطاقة الميكانيكية للنواس الثقلي البسيط:

- إن الطاقة الميكانيكية للنواس الثقلي البسيط ثابتة بإهمال القوى المبددة للطاقة إذ يهتز بسعة زاوية ثابتة θ_{max} إلى جانبي موضع توازنه الشاقولي.
- إن الطاقة الميكانيكية هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقالية والحركية $E = E_K + E_P$ حيث أن مبدأ قياس الطاقة الكامنة الثقالية هو المستوى الأفقي المار من مركز عطالة الكرة عند مرور النواس في وضع توازن الشاقولي.

انتبه:

$\vec{R}$

$w_{\vec{R}} = 0$ لأن نقطة تأثير $\vec{R}$ لا تنتقل

$\Gamma_{\vec{R}/\Delta} = 0$ لأن حامل $\vec{R}$ يلاقي محور الدوران

$\vec{T}$

$w_{\vec{T}} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$\Gamma_{\vec{T}/\Delta} = 0$ لأن حامل $\vec{T}$ يلاقي محور الدوران

ملاحظات لمسائل النواس الثقلي البسيط:

1 لحساب الدور:

سعات صغيرة

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

سعات كبيرة

$$\acute{T}_0 = T_0(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16})$$

2 عندما يُطلب سرعة ويعطى θ_{max} كبيرة:

$$\Delta E_K = \Sigma w_{\vec{F}}$$

$$v^2 = 2gh$$

$$h = \ell[cos\theta - cos\theta_{max}]$$

في الشاقول:

$$h = \ell[1 - cos\theta_{max}]$$

$$\Longrightarrow v^2 = 2g\ell[1 - cos\theta_{max}]$$

$$v = \sqrt{2g\ell[1 - cos\theta_{max}]}$$

3 إذا أعطيت السرعة عند المرور بالشاقول وطُلب θ_{max}

$$\Delta E_K = \Sigma w_{\vec{F}}$$

$$1 - cos\theta_{max} = \frac{v^2}{2g\ell}$$

4 حساب قيمة توتر الخيط:

$T = mgcos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$ (طبعاً بعد الاستنتاج)

في الشاقول:

$$\boldsymbol{T = mg + m\frac{v^2}{\ell}}$$

- **لا ننسى: في حالة السعات الصغيرة الحركة جيبية:**

$$\boldsymbol{\theta = \theta_{max}cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

- **السرعة الزاوية عند المرور بالشاقول**

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0\theta_{max}}$$

المسألة الثانية:

خيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l = 40cm$ نعلق في نهايته كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها m=100g .
يحرف الخيط عن وضع التوازن بزاوية $\theta_{max} > 0.24rad$ ونترك الكرة بدون سرعة ابتدائية فتكون سرعتها لحظة مرورها بالشاقول $v = 2m.s^{-1}$ المطلوب حساب:

1- قيمة الزاوية θ_{max}

2- استنتج علاقة توتر خيط النواس عند المرور بالشاقول واحسب قيمته

الحل:

$$\ell = 40cm = 4 \times 10^{-1}m$$

$$m = 100g$$

1) استنتاج θ_{max} :

نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

-1 حيث يضع الخيط مع الشاقول θ_{max} .

$$\theta_1 = \theta_{max}$$

-2 حيث يضع الخيط مع الشاقول $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{T}}$$

$E_{K_1} = 0$ لأنه ترك بدون سرعة ابتدائية

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg\ell(1 - cos\theta_{max})$$

لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$1 - cos\theta_{max} = \frac{v^2}{2g\ell}$$

$$= \frac{4}{2\times10\times4\times10^{-1}}$$

$$1 - cos\theta_{max} = \frac{1}{2} \Longrightarrow cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{3}rad$$

2)
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور له حامل وجهة $\vec{T}$ (الناظم)

$$-w_C + T = ma_c$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{\ell}$$

$$T = w_C + m\frac{v^2}{\ell}$$

$$\boldsymbol{T = mgcos\theta + m\frac{v^2}{\ell}}$$

في الشاقول: $\theta = 0$

$$\Longrightarrow T = mg + m\frac{v^2}{\ell}$$

$$= 0.1 \times 10 + 0.1 \times \frac{4}{4\times10^{-1}}$$

$$T = 1 + 1 = 2N$$

المسألة الثالثة:

نعلق كرة صغيرة نعدها نقطة مادية كتلتها $m = 0.5kg$ بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله $l = 1.6m$ لتؤلف نواساً بسيطاً ثم نزيح الكرة إلى مستوٍ أفقي يرتفع $h = 0.8m$ عن المستوي الأفقي المار منها وهي في موضع توازنها الشاقولي ليصنع خيط النواس مع الشاقول زاوية $\theta_{max} > 0.24rad$ ونتركها دون سرعة ابتدائية.

المطلوب:

1. استنتج بالرموز العلاقة المحددة لسرعة الكرة عند مرورها بالشاقول ثم احسب قيمتها موضحاً بالرسم.

2. استنتج قيمة الزاوية θ_{max} ثم احسب قيمتها.

3. احسب دور هذا النواس.

4. استنتج بالرموز العلاقة المحددة لشدة قوة توتر الخيط عند المرور بالشاقول ثم احسب قيمتها.

الحل:

1) نطبق نظرية الطاقة الحركية بين وضعين:

1- حيث يضع الخيط مع الشاقول

$$\theta_1 = \theta_{max}$$

2- حيث يضع الخيط مع الشاقول $\theta_2 = 0$

$$\Delta E_K = \sum W_{\vec{F}}$$

$$E_{K_2} - E_{K_1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{T}}$$

$E_{K_1} = 0$ لأنه ترك بدون سرعة ابتدائية

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh + 0$$

لأن حامل $\vec{T}$ يعامد الانتقال في كل لحظة

$$v^2 = 2gh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$= \sqrt{2 \times 10 \times 0.8}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$v = 4m.s^{-1}$$

2)

$$h = \ell(1 - cos\theta_{max})$$

$$1 - cos\theta_{max} = \frac{h}{\ell}$$

$$= \frac{0.8}{1.6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow cos\theta_{max} = \frac{1}{2}$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{3} rad$$

3)

$$\acute{T}_0 = T_0(1 + \frac{\theta^2_{max}}{16})$$

نحسب:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1.6}{10}} = 2\pi\sqrt{16 \times 10^{-2}}$$

$$= 2\pi \times 4 \times 10^{-1}$$

$$T_0 = 8\pi \times 10^{-1} = 2.5(s)$$

$$\acute{T}_0 = 2.5(1 + \frac{\frac{\pi^2}{9}}{16})$$

$$= 2.5(1 + \frac{10}{144})$$

$$= 2.5(\frac{154}{144})$$

$$\acute{T}_0 = 2.673(s)$$

4)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{W} + \vec{T} = m\vec{a}$$

بالإسقاط على محور له حامل وجهة $\vec{T}$ (الناظم)

$$-w_C + T = ma_c$$

$$: \ a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{\ell}$$

$$T = w_C + m\frac{v^2}{\ell}$$

$$T = mgcos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$$

$\theta = 0$ في الشاقول

$$\boldsymbol{T = mg + m\frac{v^2}{\ell}}$$

$$= 0.5 \times 10 + 0.5 \times \frac{16}{16\times10^{-1}}$$

$$= 5 + 5 = 10N$$

اختبر نفسي :

- اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1- قمت بزيارة بيت جدك وطلبت إليك جدتك تصحيح الميقاتية المعلقة على الجدار وهي مؤلفة من ساق منتهية بقرص قابل للحركة صعوداً أو هبوطاً فاتصلت بالساعة الناطقة فأشارت إلى السادسة تماماً عندما كانت الميقاتية تشير إلى السادسة وخمس دقائق ولتصحيح قياس الوقت يجب:

a. إيقاف الميقاتية، وخفض القرص بمقدار ضئيل ثم إعادة تشغيلها.

b. إيقاف الميقاتية، ورفع القرص بمقدار ضئيل ثم إعادة تشغيلها.

c. تصحيح عقرب الدقائق، وإعادته ليشير الوقت إلى السادسة تماماً.

d. إيقاف الميقاتية مدة خمس دقائق، ثم إعادة تشغيلها مرة أخرى.

الجواب هو : a ليزداد الدور.

2- ميقاتيان متماثلتان مضبوطتان عند سطح الأرض بالتوقيت

المحلي، نضع الأولى بالطابق الأرضي لناطحة سحاب، بينما نضع الثانية في الطابق الأخير، فإنه بعد شهر مع ثبات درجة الحرارة.

a. تشيران إلى التوقيت نفسه.

b. تقدم الثانية ويجب تعديلها.

c. تؤخر الثانية ويجب تعديلها.

d. تؤخر الأولى ويجب تعديلها.

الجواب هو : c لأن: رفع الميقاتية إلى الطابق الأخير يؤدي إلى نقصان g فيزداد الدور.

انتهى البحث الثالث

ميكانيك السوائل المتحركة

تذكرة:

1) الكتلة الحجمية = $\frac{m\ \text{كتلة}}{V\ \text{حجم}}$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

(ρ: $kg.m^{-3}$ ، m: kg ، V: m^3)

$1g = 10^{-3}\ kg$

$1\ Cm = 10^{-2} m$

$1Cm^2 = 10^{-4} m^2$

$1Cm^3 = 10^{-6}\ m^3$

$1L(\text{ليتر}) = 10^{-3} m^3$

$$\rho_{\text{ماء}} = 1\frac{g}{Cm^3} = 10^{+3} kg.m^{-3}$$

ومنه: دوماً : $\rho_{\text{ماء}} = 1000 Kg.m^{-3}$

2) حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة X الارتفاع

$$V = S.h$$

3) الضغط = $\frac{\text{القوة}}{\text{السطح}}$

$$P = \frac{F}{S}$$

(P: باسكال (Pa) ، F: N ، S: m^2)

تتميز السوائل بقوى تماسك ضعيفة نسبياً بين جزيئاتها فهي لا تحافظ على شكل معين وتتحرك جزيئاتها بحيث تأخذ شكل الوعاء الذي توضع فيه وهي تستجيب بسهولة للقوى الخارجية التي تحاول تغيير شكلها.

شروط وصف حركة السوائل:

يجب معرفة:

1. كثافة السائل.
2. ضغطه.
3. سرعته.
4. درجة حرارته.

تعاريف أساسية:

1- جسيم السائل: هو جزء من السائل أبعاده صغيرة جداً بالنسبة لأبعاد السائل وكبيرة بالنسبة لأبعاد جزيئات السائل.

2- الجريان المستقر: هو الجريان الذي تكون فيه سرعة جسيمات السائل ثابتة مع مرور الزمن في النقطة نفسها من خط الانسياب:

ولكن

إذا تغيرت السرعة من نقطة إلى أخرى بمرور الزمن (جريان مستقر غير منتظم)	إذا كانت السرعة ثابتة في جميع نقاط السائل (جريان مستقر منتظم)

ميزات السائل المثالي:

عدد مع الشرح ميزات السائل المثالي:

1- **غير قابل للانضغاط:** كتلته الحجمية ثابتة مع مرور الزمن.

2- **عديم اللزوجة:** قوى الاحتكاك الداخلي بين مكوناته مهملة عندما تتحرك وبالتالي لا يوجد ضياع بالطاقة.

3- **جريانه مستقر:** أي ان حركة جسيماته لها خطوط انسياب محددة.

4- **جريانه غير دوراني:** لا تتحرك جسيمات السائل حركة دورانية حول أي نقطة.

معادلة الاستمرارية:

- تزداد سرعة تدفق السائل في أنبوب بنقصان مساحة مقطع الأنبوب

- معدل التدفق الكتلي: Q هو كتلة كمية السائل التي تعبر مقطع الأنبوب في واحدة الزمن

$$Q = \frac{m}{\Delta t}$$

(Q: $Kg.s^{-1}$ ، m: Kg ، Δt: s)

- **معدل التدفق الحجمي** : $\acute{Q}$ هو حجم كمية السائل التي تعبر مقطع الأنبوب في واحدة الزمن

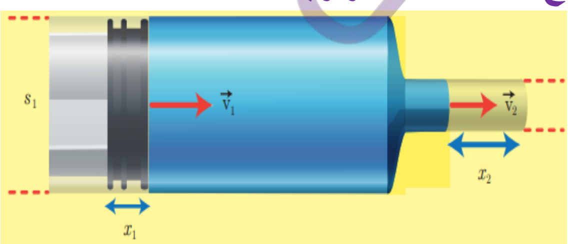
$$\grave{Q} = \frac{V}{\Delta t}$$

($\grave{Q}$: $m^3.s^{-1}$ ، V: m^3 ، Δt: S)

(سؤال دورة):

سائل يتحرك داخل أنبوب مساحة كل من مقطعيه تختلف عن الأخرى S_1 و S_2 وكمية السائل التي تدخل الأنبوب عند المقطع S_1 في مدة زمنية تساوي كمية السائل التي تخرج في المدة نفسها. (السائل لا يتجمع في الأنبوب يملوه تماماً).

استنتج معادلة الاستمرارية:



$$\grave{Q}_1 = \grave{Q}_2$$

$$\frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t} \Longrightarrow V_1 = V_2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

V_1: حجم كمية السائل التي تعبر المقطع S_1 خلال الفترة الزمنية Δt لمسافة X_1

V_2: حجم كمية السائل التي تعبر المقطع S_2 خلال الفترة الزمنية Δt لمسافة X_2

حيث:

$$V_1 = S_1.X_1 = S_1 v_1.\Delta t \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$V_2 = S_2.X_2 = S_2 v_2.\Delta t \ldots\ldots\ldots (3)$$

v_1 : سرعة السائل التي تعبر المقطع S_1

v_2 : سرعة السائل التي تعبر المقطع S_2

نعوض (2) و (3) في (1):

$$S_1 v_1.\Delta t = S_2 v_2.\Delta t$$

$$\boldsymbol{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$

أي أن : $\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}$ سرعة السائل تتناسب عكساً مع مساحة مقطع الأنبوب الذي يتدفق منه

$$\grave{Q} = S_1.v_1 = S_2 v_2 = S_3 v_3 = \cdots$$

ملاحظات مسائل:

1- معدل التدفق الكتلي (المنسوب الكتلي) $Q = \frac{m}{\Delta t}$

2- معدل التدفق الحجمي (معدل الضخ) (منسوب حجمي)

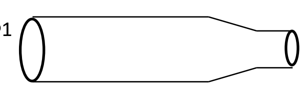
$\grave{Q} = \frac{V}{\Delta t}$ أو: $\grave{Q} = S.v$

3- العلاقة بين Q و $\grave{Q}$

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho V}{\Delta t} = \rho \grave{Q}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{Q = \rho \grave{Q}}$$

4- من أجل أنبوب :



$$\grave{Q} = S_1.v_1$$
$$\grave{Q} = S_2.v_2$$

أو : $S_1.v_1 = S_2.v_2$

إذا كان الأنبوب يتفرع إلى عدة فروع:

$$\grave{Q} = \grave{Q}_1 + \grave{Q}_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots$$

إذا كانت الفرع متماثلة المساحة وعددها N:

$$\boldsymbol{\grave{Q} = N\,\grave{Q}_1}$$

حل المسائل الآتية:

في جميع المسائل : $\rho_{\text{ماء}} = 1000 Kg.m^{-3}$

المسألة الأولى:

لملء خزان حجمه 600 L بالماء استعمل خرطوم مساحة مقطعه $5cm^2$ فاستغرقت العملية 300 s

المطلوب:

1- احسب معدل التدفق الحجمي $\grave{Q}$.

2- احسب سرعة تدفق الماء من فتحة الخرطوم

3- كم تصبح سرعة تدفق الماء من فتحة الخرطوم إذا نقص مقطعها ليصبح ربع ما كان عليه؟

الحل:

$$V = 600L = 600 \times 10^{-3} m^3$$
$$S = 5cm^2 = 5 \times 10^{-4} m^2$$
$$\Delta t = 300(s)$$

1) $\grave{Q} = \frac{V}{\Delta t} = \frac{600\times10^{-3}}{300} = 2 \times 10^{-3} m^3.s^{-1}$

2) $\grave{Q} = S.v$

$$\Longrightarrow v = \frac{2 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-4}} = 4m.s^{-1}$$

3) $S_1 v_1 = S_2 v_2$

لكن: $S_2 = \frac{1}{4} S_1$

$$S_1 v_1 = \frac{1}{4} S_1 v_2$$

$$\boldsymbol{v_2 = 4 v_1}$$

$$= 4 \times 4 = 16 m.s^{-1}$$

المسألة الثالثة:

ينتهي أنبوب ماء مساحة مقطعه *10 cm2* إلى رشاش الاستحمام وفيه 25 ثقباً متماثلاً مساحة مقطع كل ثقب $0.1\ cm^2$ فإذا علمت أن سرعة تدفق الماء عبر الأنبوب $50\ cm.s^{-1}$

1- احسب معدل التدفق الحجمي للماء.

2- احسب سرعة تدفق الماء من كل ثقب.

الحل:

$$S = 10cm^2 = 10 \times 10^{-4} m^2$$
$$N = 25 \text{ ثقب}$$
$$S_1 = 0.1cm^2 = 10^{-5} m^2$$
$$v = 50cm.s^{-1} = 50 \times 10^{-2} m.s^{-1}$$

1) $\grave{Q} = S.v$

$$\grave{Q} = 10^{-3} \times 50 \times 10^{-2}$$
$$= 5 \times 10^{-4} m^3.s^{-1}$$

(2 $\grave{Q} = \grave{Q}_1 + \grave{Q}_2 + \cdots \ldots\ldots + \grave{Q}_{25}$

وبما أن الثقوب متماثلة المساحة وعددها N:

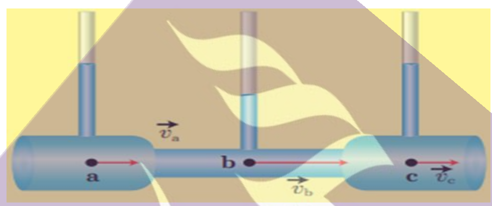
$$\grave{Q} = N\grave{Q}_1$$

$$\grave{Q} = NS_1v_1$$

$$v_1 = \frac{5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-5}} = 2m.s^{-1}$$

معادلة برنولي في الجريان المستقر

في الشكل المجاور سائل جريانه مستقر عبر أنبوب أفقي ذي مقاطع مختلفة.



$S_b < S_a \quad , \quad h_b < h_a \quad , \quad P_b < P_a$

نجد أن: $\Longrightarrow \quad v_b > v_a$

$$E_{K_b} > E_{K_a}$$

نص نظرية برنولي:

مجموع الضغط والطاقة الحركية لواحدة الحجوم والطاقة الكامنة الثقالية لواحدة الحجوم تساوي مقدار ثابت عند أية نقطة من نقاط خط الانسياب لسائل جريانه مستقر.

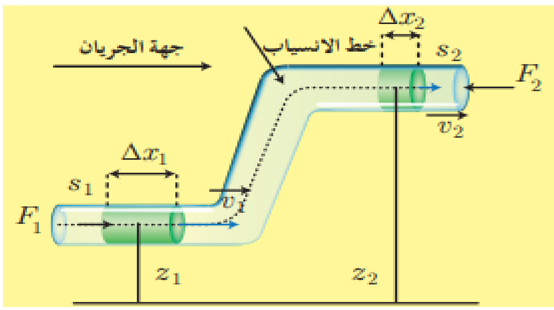
استنتاج معادلة برنولي: (سؤال امتحاني)

عندما تمر كمية صغيرة من السائل بين مقطعين حيث:

مساحة المقطع الأول S_1 والضغط P_1 وسرعة الجريان فيه v_1 والارتفاع عن مستوٍ مرجعي Z_1

مساحة المقطع الثاني S_2 والضغط P_2 وسرعة الجريان فيه v_2 والارتفاع Z_2

استنتج المعادلة المعبرة عن نظرية برنولي:



العمل الكلي لتحريك كتلة السائل من المقطع الأول إلى المقطع الثاني يساوي:

$$W_{total} = W_{\text{قوة الثقل}} + W_{\text{قوة ضغط السائل}}$$

عمل قوة ضغط السائل:

$$W_1 = F_1.\Delta X_1 = P_1S_1.\Delta X_1 = P_1.\Delta V$$

حيث: ΔV حجم كمية السائل التي تعبر المقطع S_1 في المدة الزمنية Δt

$$W_2 = -F_2.\Delta X_2 = -P_2S_2.\Delta X_2 = -P_2.\Delta V$$

حيث: ΔV حجم كمية السائل التي تعبر المقطع S_2 في المدة الزمنية Δt

عمل قوة الثقل: $W_{\vec{\omega}} = -mg(Z_2 - Z_1)$

يصبح **العمل الكلي**:

$$\boldsymbol{W_{total} = -mg(Z_2 - Z_1) + (P_1 - P_2)\Delta V}$$

ونعلم أنه حسب مصونية الطاقة:

$$W_{total} = E_{K_2} - E_{K_1}$$

$$-mg(Z_2 - Z_1) + (P_1 - P_2)\Delta V = \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_2v_1^2$$

$$P_1\Delta V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgZ_1 = P_2V + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgZ_2$$

بالقسمة على: ΔV حيث: $\rho = \frac{m}{\Delta V}$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gZ_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gZ_2$$

وهي معادلة برنولي: $\boxed{\boldsymbol{P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gZ = const}}$

ملاحظة: $\underbrace{P}_{\frac{J}{m^3}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\frac{J}{m^3}} + \underbrace{\rho gZ}_{\frac{J}{m^3}} = const$

حيث: $1P_a = \frac{N}{m^2} = \frac{N.m}{m^2.\,m} = \frac{J}{m^3}$

حالة خاصة: إذا كان الأنبوب أفقي حيث $Z_1 = Z_2$ تصبح معادلة برنولي:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\boldsymbol{P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)}$$

ينقص ضغط السائل عندما تزيد سرعته.

ملاحظات مسائل:

عندما يطلب سرعة نستخدم معادلة الاستمرارية:

$$\boldsymbol{S_1.v_1 = S_2v_2}$$

أو: $\boldsymbol{\grave{Q} = S_1.v_1} \quad , \quad \boldsymbol{\grave{Q} = S_1.v_1}$

عندما يطلب ضغط: نستخدم برنولي:

$$\boldsymbol{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gZ_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gZ_2}$$

لحساب P_1:

$$\boldsymbol{P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(Z_2 - Z_1)}$$

لحساب P_2 :

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) + \rho g(Z_1 - Z_2)$$

لحساب فرق الضغط :

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(Z_2 - Z_1)$$

لحساب العمل الميكانيكي:

$$W_T = -mg(Z_2 - Z_1) + (P_1 - P_2)V$$

أو:

$$W_T = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

حيث: $m = \rho V$

المسألة الثانية:

ترفع مضخة الماء من خزان أرضي عبر أنبوب مساحة مقطعه $s_1 = 10cm^2$ إلى خزان يقع على سطح بناء فإذا علمت أن مساحة مقطع الأنبوب الذي يصب في الخزان العلوي $s_2 = 5cm^2$ وأن معدل الضخ $\dot{Q} = 0.005m^3.s^{-1}$

المطلوب:

1- احسب سرعة الماء عند دخوله الأنبوب وعند فتحة خروجه من الأنبوب.

2- احسب قيمة ضغط الماء عند دخوله الأنبوب علماً أن الضغط الجوي $1 \times 10^5 Pa$ والارتفاع بين الفوهتين 20m

3- احسب العمل الميكانيكي اللازم لضخ 100 L من الماء إلى الخزان العلوي.

الحل:

$$S_1 = 10cm^2 = 10 \times 10^{-4}m^2$$
$$S_2 = 5cm^2 = 5 \times 10^{-4}m^2$$
$$\dot{Q} = 0.005m^3.s^{-1}$$

(1

$$\dot{Q} = S_1 v_1$$
$$v_1 = \frac{5 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-4}} = 5m.s^{-1}$$
$$\dot{Q} = S_2 v_2$$
$$v_2 = \frac{5 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-4}} = 10m.s^{-1}$$

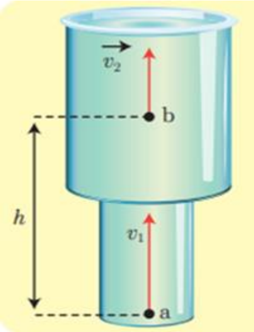
(2

$$P_0 = P_2 = 10^5 P_a$$
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g Z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g Z_2$$
$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(Z_2 - Z_1)$$
$$= 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000(100 - 25) + 1000(10)(20)$$
$$= 10^5 + 37.5 \times 10^3 + 2 \times 10^5$$
$$= 3 \times 10^5 + 37.5 \times 10^3$$
$$= 300 \times 10^3 + 37.5 \times 10^3$$
$$= 337.5 \times 10^3 P_a$$

(3

$$W_t = \Delta E_K = E_{K_2} - E_{K_1}$$
$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$
$$W_t = \frac{1}{2}\rho V(v_2^2 - v_1^2)$$
$$= \frac{1}{2} \times 1000 \times 100 \times 10^{-3}(100 - 25)$$
$$= 3750 \text{ J}$$

مسألة 7 عامة :



يجري أنبوب داخل الأنابيب الموضحة في الشكل من (a) إلى (b) حيث نصف قطر الأنبوب عند (a) $r_1 = 5cm$ ونصف قطر الأنبوب عند النقطة (b) $r_2 = 10cm$ والمسافة الشاقولية بين (a) و (b) $h = 50cm$

1- احسب سرعة جريان الماء عند النقطة (b) علماً أن سرعة جريان الماء عند النقطة (a) $v_1 = 4m.s^{-1}$

-احسب قيمة فرق الضغط $(\rho_{H2O} = 1000kg.m^{-3})$ $(P_a - P_b)$

الحل:

$$r_1 = 5cm = 5 \times 10^{-2}m$$
$$r_2 = 10cm = 10 \times 10^{-2}m$$
$$h = 0.5m \quad , \quad v_1 = 4m.s^{-1}$$

(1 حساب سرعة جريان الماء عند (b)

$$S_1 . v_1 = S_2 . v_2$$
$$\pi r_1^2 v_1 = \pi r_2^2 v_2$$
$$v_2 = \frac{r_1^2 v_1}{r_2^2}$$
$$= \frac{25 \times 10^{-4} \times 4}{10^{-2}} = 1m.s^{-1}$$

(2 حسب برنولي:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(Z_2 - Z_1)$$
$$= \frac{1}{2} \times 1000(1 - 16) + 1000 \times 10 \times 50 \times 10^{-2}$$
$$= -7500 + 5000$$
$$= -2500 P_a$$
$$P_1 - P_2 < 0 \Longrightarrow P_1 < P_2$$

تطبيقات على معادلة برنولي: (في جميع التطبيقات نبدأ من برنولي)

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\ \rho g Z_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\ \rho g Z_2$$

1- معادلة المانومتر:

السائل ساكن $\Longleftarrow$ $v_1=v_2=0$

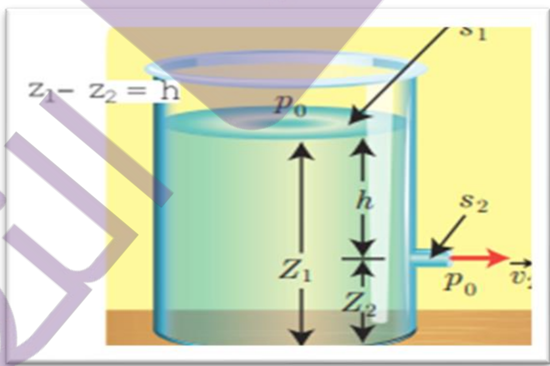
نعوض في معادلة برنولي :

$$P_1+\rho g Z_1=P_2+\rho g Z_2$$
$$P_1-P_2=\rho g(Z_2-Z_1)$$
$$\boldsymbol{P_1-P_2=\rho g h}$$

وهي معادلة المانومتر تستخدم لحساب فرق الضغط في السوائل الساكنة.

2-نظرية تورشيللي: سؤال دورات

يحوي خزان على سائل كتلته الحجمية ρ مساحة مقطعه S_2 كبيرة بالنسبة إلى فتحة جانبية مساحة مقطعها S_1 تقع قرب قعره وعلى عمق $Z_1-Z_2=h$ من السطح الحر للسائل، استنتج علاقة سرعة السائل من الفتحة الجانبية.



$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\ \rho g Z_1=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\ \rho g Z_2$$

السائل ساكن على السطح $\boldsymbol{v_1=0}$

السطح المفتوح والفتحة معرضتان للضغط

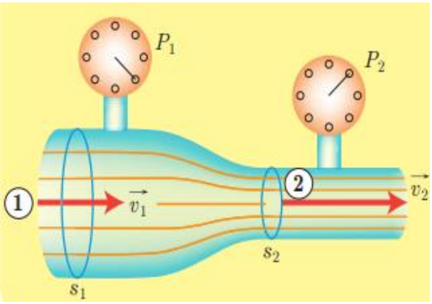
$$\boldsymbol{P_1=P_2=P_0}$$

نعوض في برنولي ونختصر:

$$\rho g Z_1=\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g Z_2$$
$$\frac{1}{2}\rho v_2^2=\rho g(Z_1-Z_2)$$
$$v_2^2=2g(Z_1-Z_2)$$
$$\boldsymbol{v_2=\sqrt{2gh}}$$

- إن سرعة خروج السائل تساوي السرعة التي يسقط بها جسم سائل سقوطاً حراً من ارتفاع h.
- تدعى العلاقة السابقة بنظرية تورشيللي وتنطبق على أي فتحة في الوعاء سواء في قعره كانت أم في جداره الجانبي.

3- أنبوب فنتوري: سؤال دورة 2024



أنبوب مساحة مقطعه S_1 يجري فيه سائل بسرعة v_1 في منطقة ضغطها P_1 فيصل لاختناق مساحته S_2 استنتج علاقة فرق الضغط بين الجذع الرئيس والاختناق في أنبوب فنتوري

$$Z_1=Z_2$$

نعوض في برنولي:

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$
$$P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho(v_2^2-v_1^2)$$

حسب الاستمرارية:

$$S_1.v_1=S_2 v_2$$
$$v_2=\frac{S_1 v_1}{S_2}$$
$$P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{S_1^2\,v_1^2}{S_2^2}-v_1^2\right)$$
$$\boldsymbol{P_1-P_2=\frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}-1\right)}$$

بما أن: $S_1>S_2$

$$\Longrightarrow\quad P_1-P_2>0$$
$$\Longrightarrow\quad P_1>P_2$$

- أي أن الضغط في الاختناق أقل من الضغط في الجذع الرئيسي. يستفاد من هذه الخاصية في الطب فقد تتناقص مساحة مقطع الشرايين في منطقة ما نتيجة تراكم الدهون والشحوم وهذا يعيق جريان الدم في هذه الشرايين ويتناقص ضغط الدم في المقاطع المتضيقة عن قيمته الطبيعية اللازمة لمقاومة الضغوط الخارجية.

اختبر نفسي:

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة مما يأتي

1- عندما تهب رياح أفقية عند فوهة مدخنة شاقولية فإن:

a. سرعة خروج الدخان من فوهة المدخنة:

A) تزداد B) تنقص C) تبقى دون تغير D) تنعدم

b. ويمكن تفسير النتيجة وفق:

A) مبدأ باسكال B) مبدأ برنولي

C) قاعدة أرخميدس D) معادلة الاستمرارية

الحل:

a. تزداد b. مبدأ برنولي

2- يتصف السائل المثالي بأنه:

a. قابل للانضغاط وعديم اللزوجة.

b. غير قابل للانضغاط ولزوجته غير مهملة.

c. غير قابل للانضغاط وعديم اللزوجة.

d. قابل للانضغاط ولزوجته غير مهملة.

الحل:

غير قابل للانضغاط وعديم اللزوجة.

3- خرطوم مساحة مقطعه عند فوهة دخول الماء فيه S_1 وسرعة جريان الماء عند تلك الفوهة v_1 فتكون سرعة خروج الماء v_2 من نهاية الخرطوم حيث أن مساحة المقطع $s_2 = \frac{1}{4}s_1$ مساوية:

A) v_1 B) $\frac{1}{4}v_1$ C) $4v_1$ D) $16v_1$

الحل:

$$s_2 = \frac{1}{4}s_1 \Rightarrow v_2 = 4v_1$$

ثانياً: أعط تفسيراً علمياً باستخدام العلاقات الرياضية المناسبة لكل مما يأتي:

1. اختلاف سرعة جريان الماء عبر مقاطع مختلفة المساحة في مجرى نهر جريانه أفقي.

الحل:

حسب معادلة الاستمرارية $s_1v_1 = s_2v_2$ تتناسب السرعة عكساً مع مساحة مقطع النهر.

2. عدم تقاطع خطوط الانسياب لسائل.

الحل:

خط الانسياب يمر في كل نقطة شعاع سرعة جسيم السائل في تلك النقطة، تقاطع خطوط الانسياب يعني وجود أكثر من سرعة للجسيم بالمكان نفسه وباتجاهات مختلفة.

3. ينقص مقطع عمود الماء المتدفق من الخرطوم عندما توجه فوهته للأسفل ويزداد مقطعه عندما توجه فوهته رأسياً للأعلى.

الحل:

عندما توجه فوهته للأسفل سرعة جريان الماء تزداد كلما اقترب من سطح الأرض فينقص ضغط الماء ويصبح الضغط الجوي المحيط بالماء أكبر فتنقص مساحة مقطع الماء عندما توجه فوهته للأعلى سرعة جريان الماء تنقص فيزداد الضغط للسائل ويصبح أكبر من الضغط الجوي فيزداد مقطعه.

4. يندفع الماء بسرعة كبيرة من ثقب صغير حدث في جدار خرطوم ينقل الماء.

الحل:

حسب معادلة الاستمرارية $s_1v_1 = s_2v_2$ تتناسب السرعة عكساً مع مساحة مقطع الأنبوب.

5. تستطيع خراطيم سيارات الإطفاء إيصال الماء لارتفاعات ومسافات كبيرة.

6. تكون مساحة فتحات الغاز في موقد الغاز صغيرة.

7. لجعل الماء المتدفق من فتحة خرطوم يصل إلى مسافات أبعد نغلق جزءاً من فتحة الخرطوم.

الحل:

على نفس السبب (5, 6, 7) حسب معادلة الاستمرارية.

انتهى البحث الرابع

سما المجد التعليمية

النسبية الخاصة

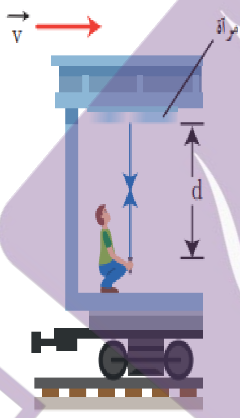
فرضيتا أينشتاين:

1- السرعة مفهوم نسبي تختلف باختلاف جملة المقارنة.

سرعة انتشار الضوء ثابتة في الوسط نفسه C مهما اختلفت سرعة المنبع الضوئي أو سرعة المراقب حيث $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$ في الخلاء.

1- القوانين الفيزيائية تبقى نفسها في جميع جمل المقارنة العطالية حيث التسارع معدوم.

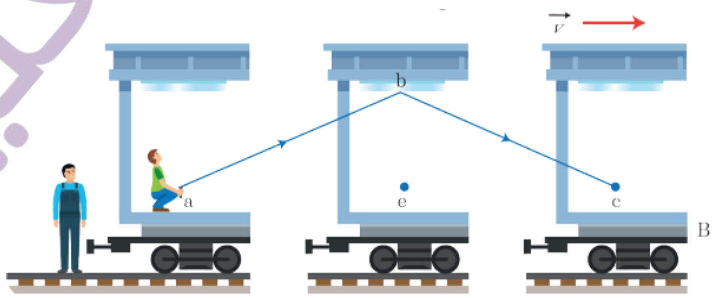
تمدد الزمن:



بفرض أن قطاراً يسير بسرعة ثابتة v مثبت على سقف إحدى عرباته مرآة مستوية ترتفع مسافة d عن منبع ضوئي بيد مراقب يقف ساكناً في العربة ذاتها يرسل المراقب ومضة ضوئية باتجاه المرآة ويسجل الزمن t_0 الذي يستغرقه الومضة الضوئية للعودة إلى المنبع. باعتبار سرعة الشعاع الضوئي c يكون :

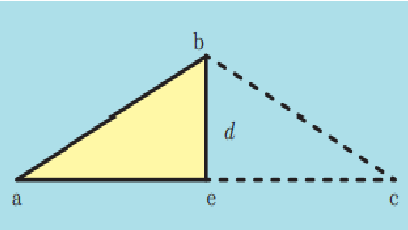
$$c = \frac{2d}{t_0} \Rightarrow d = \frac{ct_0}{2} \dots\dots\dots \text{①}$$

إما بالنسبة لمراقب خارجي يقف ساكناً خارج القطار على استقامة واحدة مع المنبع الضوئي لحظة إصدار الومضة الضوئية فإن الزمن الذي تستغرقه الومضة الضوئية للعودة إلى المنبع هو t فهل $t_0 = t$ ؟



إن المسافة التي تقطعها الومضة الضوئية للعودة إلى المنبع بالنسبة للمراقب الخارجي $(ab + bc)$.

لو طبقنا هنا الميكانيك الكلاسيكي لأضفنا سرعة القطار v إلى سرعة الضوء لكن وفق النظرية النسبية الخاصة فإن سرعة الضوء لا تتغير بتغير المراقب. فكيف قطع الضوء مسافة أكبر بالسرعة نفسها.



$$c = \frac{ab + bc}{t}$$

$$c = \frac{2ab}{t}$$

$$ab = \frac{ct}{2} \dots\dots (2)$$

المنبع انتقل من النقطة a إلى النقطة c:

$$v = \frac{ac}{t}$$

$$v = \frac{2ae}{t}$$

$$ae = \frac{vt}{2} \dots . (3)$$

بتطبيق نظرية فيثاغورث في المثلث القائم abe نجد:

$$t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

ومن العلاقة (1) :

$$t_0 = \frac{2d}{c} \dots\dots (5)$$

بقسمة العلاقة (4) إلى (5) نجد:

$$\frac{t}{t_0} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$\frac{t}{t_0} = \frac{c}{\sqrt{c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})}}$$

ندعو النسبة: $\gamma = \frac{t}{t_0}$ معامل لورينتس.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{t}{t_0} > 1$$

$$t = \gamma t_0$$

الخلاصة:

① المراقب الخارجي:

هو المراقب الساكن

(على سطح الأرض)

يستخدم تلسكوب أرضي للمراقبة

يقيس زمن **t**

② المراقب الداخلي:

هو المراقب المتحرك

(موجود داخل مركبة فضائية)

تتحرك بسرعة v قريبة من c

يقيس زمن t_0

يتمدد الزمن عندما يتحرك الجسم بسرعة قريبة من سرعة الضوء. $t = \gamma t_0$

حيث: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$ **معامل لورينتس**

$\Rightarrow \quad t > t_0$

حيث: t : الزمن الذي يقيسه المراقب الخارجي.

t_0 : الزمن الذي يقيسه المراقب الداخلي.

أي أن الزمن يتمدد عند الحركة.

أسئلة:

1- افترض أن صاروخين في الخلاء يتحرك كل منهما نحو الآخر بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء وفي لحظة ما أضاء الصاروخ الأول مصابيحه، إن سرعة ضوء الصاروخ الأول بالنسبة للصاروخ الثاني هي :

A) C B) أكبر من C C) أصغر من C D) معدومة

الجواب هو:

2- تتحرك مركبتان فضائيتان باتجاه واحد حيث سرعة كل منهما v قريبة من c ، في لحظة ما أضاءت المركبة الأولى مصابيحها فتكون سرعة الضوء بالنسبة للمركبة الثانية:

A) C B) $c+v$ C) $c-2v$ D) $c+2v$

الجواب هو:

3- بفرض أن أخوين توأمين أحدهما رائد فضاء طار بسرعة قريبة من C بقي رائد الفضاء في رحلته لمدة 20 ساعة حسب ميقاتية يحملها فيكون الزمن الذي انتظره أخوه التوأم على الأرض حتى يعود من رحلته:

A) 10 ساعات B) 20 ساعة C) 5 ساعات D) 30 ساعة

الجواب هو:

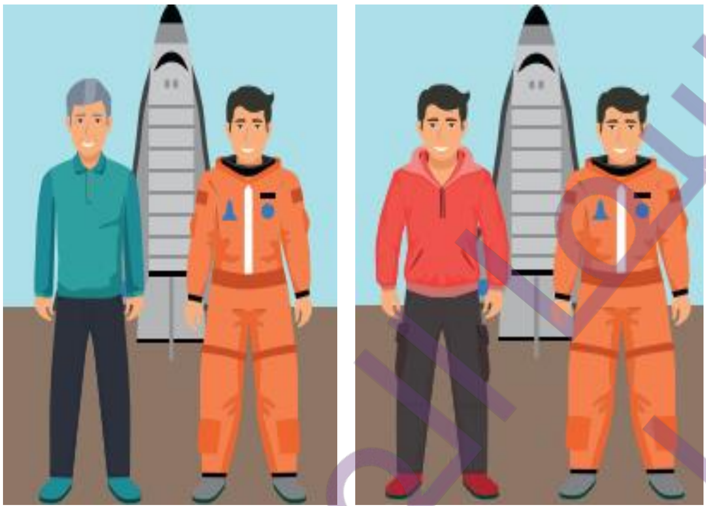
4- افترض أن طاقم سفينة فضاء تطير بسرعة قريبة من C يشاهدون تسجيلاً لمباراة كرة قدم مدتها ساعة ونص ويتابعهم مراقب أرضي بتلسكوب دقيق جداً، فيرى مدة المباراة:

A) $\frac{1}{2}$ ساعة B) 1 ساعة C) 2ساعة D) $\frac{3}{2}$ ساعة

الجواب هو:

تطبيق (مفارقة التوءمان):

بفرض أن أخوين أحدهما رائد فضاء طار بسرعة قريبة من سرعة الضوء في الخلاء $v = \frac{\sqrt{899}}{30}C$ وبقي رائد فضاء في رحلته سنة واحدة وفق ميقاتية يحملها فما الزمن الذي انتظره أخوه التوأم على الأرض ليعود رائد الفضاء من رحلته؟



الحل:

الزمن الذي سجلته الميقاتية التي يحملها رائد الفضاء:

$t_0 = 1 year$

الزمن الذي سجله المراقب الخارجي للرحلة (الأخ التوأم الذي بقي على الأرض): t

$t = \gamma t_0$

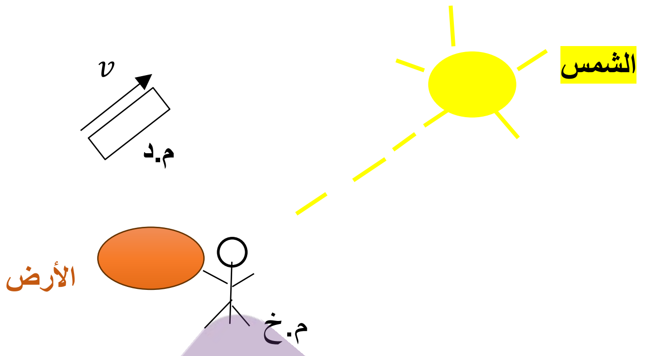
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\frac{\sqrt{899}}{30}c)^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{899}{900}}} = 30$$

$$t = 30 \times 1 = 30\ year$$

أي أن الأخ التوأم انتظر ثلاثين عاماً حتى انتهت رحلة أخيه التي استغرقت بالنسبة له عاماً واحداً.

تقلص الأطوال:



	مراقب خارجي	مراقب داخلي
الزمن الذي يقيسه	t	t_0
المسافة بين الأرض والشمس	L_0	L
مسافة= سرعة X الزمن	$L_0 = vt$	$L = vt_0$

$$\frac{L_0}{L} = \frac{vt}{vt_0} = \frac{t}{t_0} = \gamma$$

$$\frac{L_0}{L} = \gamma \Rightarrow \boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}}$$

المسافة تتقلص بالنسبة للمراقب الداخلي.

أما:

الطول الموازي لشعاع السرعة يتقلص بالنسبة لمراقب خارجي.

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

طول م.د ، مسافة م.خ (L_0)

مسافة (م.د) ، طول بالنسبة لـ م . خ (L)

أسئلة:

1- مراقبين الأول في محطة اطلاق على الأرض والثاني على متن مركبة فضائية طولها وهي ساكنة L_0 تسافر المركبة بسرعة قريبة من c فيكون طولها بالنسبة للمراقب الذي على متنها:

A) $L = \frac{L_0}{\gamma}$ B) $L_0 = \frac{L}{\gamma}$ C) γL_0 D) L_0

الجواب هو: ....

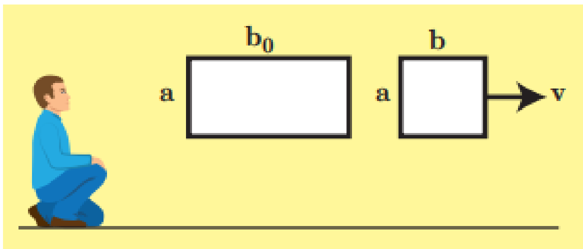
2- روبوت يحمل سارية طولها 12m يتحرك بسرعة قريبة من سرعة الضوء فإن طول السارية بالنسبة لمراقب ساكن يقف موازياً لشعاع السرعة لهذه السارية:

A) 24m B) 30m C) 12m D) 9m

الجواب هو: ....

المسألة الأولى:

جسم مستطيل الشكل طوله وهو ساكن b_0 يساوي ضعفي عرضه a يتحرك هذا الجسم بحيث يكون طوله موازياً لشعاع سرعته $\vec{v}$ بالنسبة لمراقب في الجملة الساكنة فيبدو له مربعاً احسب قيمة سرعة الجسم.



الحل:

طول الجسم وهو متحرك b = a أما طوله وهو ساكن

$$b_0 = 2a$$

نحسب γ

$$b = \frac{b_0}{\gamma}$$

$$a = \frac{2a}{\gamma} \Rightarrow \gamma = 2$$

حيث :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$4 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 4 - \frac{4v^2}{c^2} = 1$$

$$-3 = -\frac{4v^2}{c^2}$$

$$v^2 = \frac{3\,c^2}{4} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}\,c$$

الطاقة الكلية في الميكانيك النسبي:

الطاقة الكلية في الميكانيك النسبي هي مجموع الطاقة السكونية والطاقة الحركية $E = E_0 + E_K$

الطاقة السكونية: $E_0 = m_0 c^2$

الطاقة الحركية: $E_K = E - E_0$

الطاقة الكلية: $E = mc^2$

m الكتلة عند الحركة , m_0 الكتلة عند السكون

تكافؤ الكتلة – الطاقة:

الكتلة تزداد بزيادة السرعة في الميكانيك النسبي وتعطى بالعلاقة:

$$m = \gamma\, m_0$$

$$\gamma > 1 \Rightarrow m > m_0$$

من أين أتت هذه الزيادة في الكتلة:

$$E_K = mc^2 - m_0 c^2$$

$$E_K = (m - m_0)c^2$$

$$\Delta m = \frac{E_K}{c^2}$$

عندما يتحرك الجسم تزداد كتلته بمقدار يساوي طاقته الحركية مقسومة على رقم ثابت c^2أي أن الكتلة تكافئ الطاقة.

أسئلة:

1- يتحرك جسم بسرعة قريبة من سرعة الضوء وفي لحظة ما كانت طاقته الحركية مساوية ثلاث أضعاف طاقته السكونية فتكون طاقته الكلية:

A) $E = 4E_0$ B) $E = E_0$

C) $E = 3E_0$ D) $E = 2E_0$

الحل: $E = E_K + E_0 = 3E_0 + E_0 = 4E_0$

$$\Rightarrow E = 4E_0$$

وتكون قيمة γ:

A) 4 B) 5 C) 3 D) 2

الحل:

$$E = 4E_0$$

$$mc^2 = 4\, m_0 c^2 \quad \Rightarrow m = 4m_0$$

$$\Rightarrow \gamma = 4$$

2- يتحرك جسيم كتلته السكونية m_0 بسرعة قريبة من سرعة الضوء فتصبح طاقته الحركية مساوية أربعة أضعاف طاقته السكونية فتكون كتلة هذا الجسيم في الميكانيك النسبي:

A) $m = 5m_0$ B) $m = 4m_0$

C) $m = \frac{1}{4}\, m_0$ D) $m = \frac{1}{5}\, m_0$

الحل:

$$E = E_K + E_0$$

$$= 4E_0 + E_0 = 5\, E_0$$

$$E = 5E_0 \quad \Rightarrow mc^2 = 5m_0\, c^2$$

$$m = 5m_0$$

3- يقف جسم ساكن عند مستو مرجعي، ما قيمة طاقته الحركية،

A) 0 B) $2E_0$ C) E_0 D) $3E_0$

فكر أيضاً.... **ما قيمة طاقته الكامنة الثقالية بالنسبة للمستوي نفسه، هل طاقته الكلية معدومة.**

الحل: الجسم ساكن وبالتالي $E_K = 0$

وطاقته الكامنة الثقالية معدومة $E_P = 0$ بالنسبة للمستوي المرجعي (الارتفاع عنه معدوم)

أما طاقته الكلية النسبية

$$E = E_K + E_0 = 0 + E_0 = E_0$$

الطاقة الكلية تساوي الطاقة السكونية.

تطبيق:

يتحرك إلكترون في أنبوبة تلفاز بطاقة حركية 27×10^{-16}J

1. احسب النسبة المئوية للزيادة في كتلة الإلكترون نتيجة طاقته الحركية.

2. احسب طاقته السكونية.

علماً أن: $m_e = 9 \times 10^{-31} kg \;,\; c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$

الحل:

1)

$$E_K = m.c^2 - m_0.c^2$$

$$E_K = (m - m_0)c^2$$

$$m - m_0 = \frac{E_K}{c^2}$$

$$m - m_0 = \frac{27 \times 10^{-16}}{(3 \times 10^8)^2} = 3 \times 10^{-32} kg$$

$$\text{النسبة المئوية} = \frac{3\times10^{-32}}{9\times10^{-31}} \times 100 = 3.33\%$$

2) طاقة الإلكترون السكونية:

$$E_0 = m_0.c^2$$

$$E_0 = 9 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2$$

$$E_0 = 81 \times 10^{-15}\text{J}$$

سؤال امتحاني:

انطلاقاً من علاقة الطاقة الحركية في الميكانيك النسبي استنتج علاقة الطاقة الحركية في الميكانيك الكلاسيكي.

الحل:

$$E_K = (m - m_0)c^2$$

$$= (\gamma m_0 - m_0)c^2$$

$$\boldsymbol{E_K = (\gamma - 1)m_0 c^2}$$

ولكن: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$

وحسب دستور التقريب

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow E_K = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) m_0 c^2$$

في الميكانيك الكلاسيكي

$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1 \Leftarrow v^2 << c^2 \quad \Leftarrow v << c$$

$$\boldsymbol{E_K = \frac{1}{2} m_0 v^2}$$

سؤال امتحاني:

انطلاقاً من علاقة كمية الحركة في الميكانيك النسبي استنتج علاقة كمية الحركة في الميكانيك الكلاسيكي:

في الميكانيك النسبي $P = mv = \gamma m_0 v$

$$P = \left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) m_0 v$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \simeq 1$$

$$\Rightarrow P = m_0 v$$

وهي علاقة كمية الحركة في الميكانيك الكلاسيكي.

ملاحظة: إن أثر النظرية النسبية الخاصة يهمل من أجل السرعات الصغيرة بالنسبة إلى سرعة انتشار الضوء في الخلاء وتؤول عندها العلاقات الفيزيائية إلى شكلها الكلاسيكي.

اختبر نفسي

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1- افترض أن صاروخين في الخلاء يتحرك كل منهما نحو الآخر بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء وفي لحظة ما أضاء الصاروخ الأول مصابيحه إن سرعة ضوء الصاروخ الأول بالنسبة للصاروخ الثاني هي:

a) c b) أكبر من c c) أصغر من c d) معدومة

الجواب: C

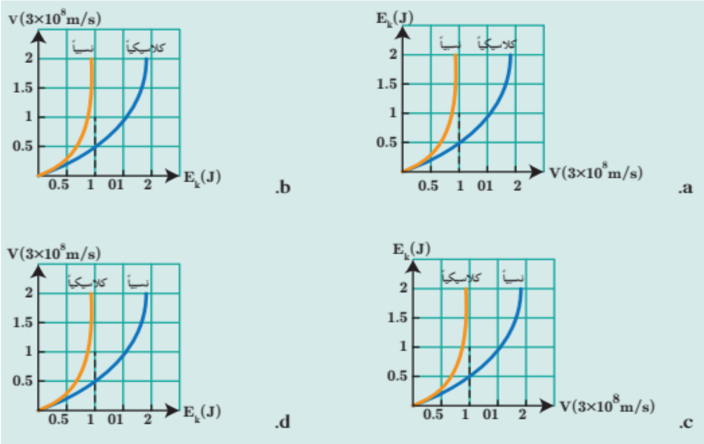
2- افترض أن طاقم سفينة فضاء تطير بسرعة قريبة من سرعة انتشار الضوء في الخلاء يشاهدون تسجيلاً لمباراة كرة قدم مدتها ساعة ونصف ويتابعهم مراقب أرضي بتلسكوب دقيق جداً فيرى مدة المباراة:

a) هي نفسها b) أكبر c) أصغر d) معدومة

الجواب: أكبر

3- المنحني البياني الذي يمثل العلاقة بين الطاقة الحركية لجسم ما وسرعته هي:

الجواب: المنحني a



سؤال:

يحاول العلماء عند دراستهم خصائص الجسيمات تحريكها بسرعات كبيرة جداً باستخدام المسرعات هل يمكن أن تصل سرعة هذه الجسيمات إلى سرعة انتشار الضوء في الخلاء تماماً؟ ولماذا؟

الجواب:

لا لأن الجسيم كلما اقتربت سرعته من سرعة الضوء زادت كتلته وبالتالي سيحتاج لقوة أكبر لتحريكه ودفعه وعندما تتناهى سرعته على سرعة الضوء في الخلاء يحتاج إلى إعطاءه قوة لا نهائية وهذا غير ممكن.

المسألة الثانية

يتحرك إلكترون بسرعة $v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c$ ، $(m_e = 9\times 10^{-31}kg)$

احسب قيمة كمية حركة لإلكترون وفق الميكانيك الكلاسيكي ثم وفق الميكانيك النسبي.

الحل: $v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c$ ، $m_e = m_0 = 9\times 10^{-31}kg$

حساب كمية الحركة وفق 1- الميكانيك الكلاسيكي:

$$P = m_0 v = 9\times 10^{-31}\times \frac{2\sqrt{2}}{3}\times 3\times 10^{8}$$

$$P = 18\sqrt{2}\times 10^{-23} kgm.s^{-1}$$

2- وفق الميكانيك النسبي:

$$P = mv = \gamma m_0 v = \gamma m_0 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}c$$

نحسب γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(\frac{2\sqrt{2}}{3}c)^2}{c^2}}} = 3$$

$$\Rightarrow P = 3 \times 9 \times 10^{-31} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3 \times 10^{8}$$

$$P = 54\sqrt{2} \times 10^{-23} kgm.s^{-1}$$

الحساب وفق الميكانيك النسبي هو الأدق لأنه يأخذ بعين الاعتبار مقدار الزيادة في الكتلة عند الحركة.

المسألة الثالثة:

تبلغ الكتلة السكونية لبروتون $m_P = 1.67 \times 10^{-27} kg$ وطاقته الكلية تساوي ثلاثة أضعاف طاقته السكونية.

المطلوب حساب:

1. قيمة طاقته السكونية:
2. طاقته الحركية في الميكانيك النسبي:
3. كتلته في الميكانيك النسبي:

الحل:

$$E_0 = m_0 c^2 = m_p c^2 = 1.67 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16}$$

$$E_0 = 15.03 \times 10^{-11} J$$

$$E_k = E - E_0 = 3E_0 - E_0 = 2E_0 = 2 \times 15.03 \times 10^{-1}$$

$$E_k = 30.06 \times 10^{-11} J$$

$$m = \gamma m_0 = 3 \times 1.67 \times 10^{-27} = 5.01 \times 10^{-27} kg$$

مسألة 8 عامة:

تخيل أن مركبة فضاء لها شكل مستطيل تقوم برحلة إلى نجم "الشعرى" وفق مسار مستقيم بحيث يكون شعاع سرعة المركبة دوماً موازياً لطول المركبة فتسجل أجهزة المركبة المسافرة القياسات الآتية:

طول المركبة 100 m عرض المركبة 25 m المسافة المقطوعة 4 سنة ضوئية زمن الرحلة $\frac{8}{\sqrt{3}}$ سنة وتسجل أجهزة المحطة الأرضية قياساتها لتلك الرحلة باستخدام تيلسكوب دقيق، احسب كلاً من سرعة المركبة وطولها وعرضها في أثناء الرحلة والمسافة التي قطعها وزمن الرحلة وفق قياسات المحطة الأرضية.

(سرعة الضوء في الخلاء $c = 3 \times 10^{8} m.s^{-1}$)

أجهزة المركبة (مراقب داخلي)	المراقب الخارجي
$L_0 = 100m$	L = طول المركبة
$d = 25m$	$\grave{d}$ = عرض المركب
$\grave{L} = 4L.y$	$\grave{L}_0$ = مسافة الرحلة
$t_0 = \frac{8}{\sqrt{3}} year$	t = الزمن
	v = سرعة المركبة

الحل:

$$v = \frac{\text{مسافة}}{\text{زمن}} = \frac{4c}{\frac{8}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

نحسب γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\frac{3}{4}c^2}{c^2}}} = 2$$

طول المركبة: $L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{100}{2} = 50m$

عرض المركبة: $\grave{d} = d = 25m$

مسافة الرحلة:

$$\grave{L} = \frac{\grave{L}_0}{\gamma} \Rightarrow \grave{L}_0 = \grave{L}.\gamma = 4 \times 2 = 8L.y$$

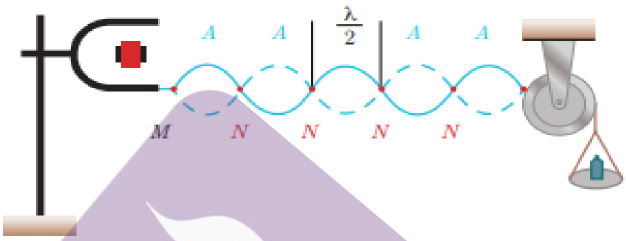
زمن الرحلة: $t = \gamma t_0 = 2 \times \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} L.y$

انتهى درس النسبية الخاصة

الأمواج المستقرة

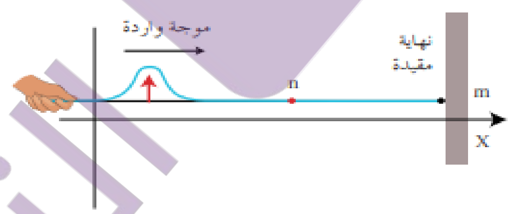
الأمواج المستقرة العرضية:

الدراسة التجريبية للأمواج المستقرة العرضية في وتر:



عندما تعمل الهزازة (الرنانة) تتشكل على طول الوتر أمواج عرضية جيبية متقدمة وتكون معادلة مطال موجة واردة جيبية بالاتجاه الموجب للمحور $\overrightarrow{x'x}$ عندما تصل إلى النقطة n من وسط الانتشار والتي فاصلتها $\bar{x}$ عن النهاية المقيد m في اللحظة t معطاة بالعلاقة

$$\bar{y}_{1(t)} = Y_{max} \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{\bar{x}}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots (1)$$

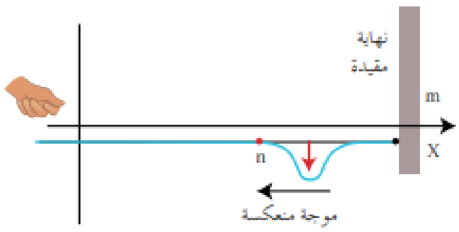


وعندما تصل الأمواج الجيبية إلى النهاية المقيدة m للوتر تنعكس فتولد الموجة المنعكسة المتقدمة الجيبية بالاتجاه السالب للمحور $\overrightarrow{x'x}$ في النقطة n في اللحظة t مطالاً يُعطى بالعلاقة :

$$\bar{y}_{2(t)} = Y_{max} \cos\left(\omega t + 2\pi \frac{\bar{x}}{\lambda} + \bar{\varphi}\right) \quad \ldots\ldots (2)$$

تتعرض لفرق في الطور $\bar{\varphi}$ بسبب الانعكاس وهو متأخر في الطور عن الموجة الواردة إلى n .

تنعكس الإشارة عن النهاية المقيدة أو عن النهاية الطليقة بسرعة الانتشار نفسها والتواتر نفسه وبالسعة نفسها– عند إهمال الضياع في الطاقة – وينشأ فرق في الطور $\bar{\varphi}$ بين الموجة الواردة والموجة المنعكسة في الوسط (الوتر):



1- إذا كانت النهاية مقيدة فإن جهة الإشارة المنعكسة تعاكس جهة الإشارة الواردة أي يتولد بالانعكاس فرق طور $\bar{\varphi} = \pi\, rad$ (تعاكس بالطور).

2 - إذا كانت النهاية طليقة فإن جهة الإشارة المنعكسة نفسها للإشارة الواردة أي فرق الطور $\bar{\varphi} = 0\, rad$ (توافق بالطور).

تنشأ موجة مستقرة عرضية:

من تدخل موجة جيبية واردة مع موجة جيبية منعكسة على نهاية مقيدة تعاكسها بجهة الانتشار ولها التواتر نفسه والسعة نفسها.

ماذا ينتج عن تداخلها:

عقد اهتزاز	بطون اهتزاز
نقاط ساكنة تنعدم فيها سعة الاهتزاز رمزها N	نقاط تهتز بسعة عظمى يرمز لها A
لأنها نقاط ناتجة عن التقاء موجة واردة مع موجة منعكسة على تعاكس دائم	لأنها نقاط ناتجة عن التقاء موجة واردة مع موجة منعكسة على توافق دائم

- المسافة ما بين عقدتين متتاليتين $\frac{\lambda}{2}$.
- المسافة ما بين بطنين متتالين $\frac{\lambda}{2}$.
- المسافة ما بين عقدة اهتزاز وبطن اهتزاز يليها مباشرة $\frac{\lambda}{4}$.
- المغزل:هو الاهتزاز المتشكل ما بين عقدتين متتاليتين طوله يساوي $\frac{\lambda}{2}$.
- عدد العقدة = عدد المغازل + 1 .
- عدد البطون = عدد المغازل.

تدعى موجة مستقرة لأنها تبدو تهتز مراوحة في مكانها.

الدراسة النظرية للأمواج المستقرة العرضية:

نستنتج معادلة المطال المحصل لاهتزاز نقطة n التي تخضع لتأثير موجتين الواردة والمنعكسة معاً:

$$\bar{y}_{n(t)} = \bar{y}_{1(t)} + \bar{y}_{2(t)}$$

$$\bar{y}_{n(t)} = X_{max}[\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\bar{x}) + \cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + \bar{\varphi})]$$

بما أن: $cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

نجد: $\bar{y}_{n(t)} = 2Y_{max}\cos(\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + \frac{\varphi}{2})\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2})$

في الانعكاس على نهاية مقيدة يكون

فرق الطور $\varphi = \pi rad$

نعوض:

$$\bar{y}_{n(t)} = 2Y_{max}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x} + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

وبما أن: $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$ تصبح العلاقة:

$$\bar{y}_{n(t)} = 2y_{max}\sin(\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x})\sin(\omega t)$$

$$\boldsymbol{\bar{y}_{n(t)} = Y_{max/n}\sin(\omega t)}$$

باعتبار $Y_{max/n}$ **سعة الموجة المستقرة في النقطة** n:

$$\boxed{Y_{max/n} = 2y_{max}\left|\sin\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x}\right|}$$

سؤال دورات:

انطلاقاً من $\bar{y}_{n(t)} = 2y_{max}\sin(\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x})\sin(\omega t)$ استنتج العلاقة المحددة لكل من أبعاد العقد وبطون الاهتزاز المتشكلة في وتر مشدود.

1- استنتاج العلاقة المحددة لأبعاد العقد:

عقد الاهتزاز N : نقاط سعة اهتزازها معدومة دوماً تحدد أبعادها $\bar{x}$ عن النهاية المقيدة بالعلاقة:

$$Y_{max/n} = 0 \Rightarrow sin\frac{2\pi}{\lambda}x = 0$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi$$

$$\boxed{x = n\frac{\lambda}{2}}$$

حيث: $n = 0,1,2,3, \dots \dots$

أي أن النقاط التي تبعد عن النهاية المقيدة التي يحصل عندها انعكاس وحيد أعداد صحيحة موجبة من نصف طول الموجة يصلها اهتزاز وارد واهتزاز منعكس عل تعاكس دائم فتكون ساكنة دوماً وتؤلف عقد اهتزاز N وتكون المسافة بين كل من عقدتين متتاليتين $\frac{\lambda}{2}$

2- استنتاج العلاقة المحددة لأبعاد البطون:

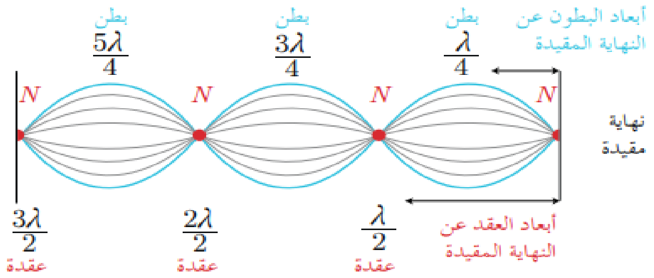
بطون الاهتزاز A: نقاط سعة اهتزازها عُظمى دوماً تحدد أبعادها $\bar{x}$ عن النهاية المقيدة بالعلاقة:

$$Y_{max/n} = 2Y_{max} \Rightarrow \left|sin\frac{2\pi}{\lambda}\bar{x}\right| = 1$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

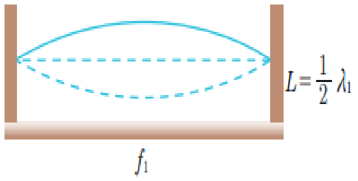
$$\boxed{x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}}$$

حيث: $n = 0,1,2,3, \dots \dots$

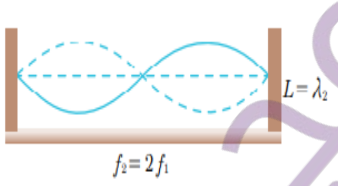


أي أن النقاط التي تبعد عن النهاية المقيدة – التي يحصل عندها انعكاس وحيد أعداد فردية من ربع طول الموجة يصلها اهتزاز وارد واهتزاز منعكس على توافق دائم فتكون سعة الاهتزاز فيها عُظمى دوماً وتؤلف بطون اهتزاز A وتكون المسافة بين كل من بطنين متتاليتين $\frac{\lambda}{2}$ والمسافة بين كل عقدة وبطن يليها $\frac{\lambda}{4}$

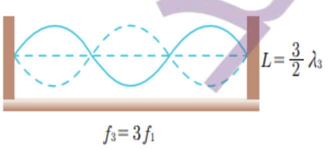
الاهتزازات الحرة في وتر مرن:



- عندما نزيح الوتر المرن المشدود من منتصفه ونتركه فإنه يهتز اهتزازات حرة بتواتره الخاص f_1 مولداً موجة مستقرة نتيجة انعكاسها بالنقطتين الثابتتين ويتشكل مغزل واحد ونسمي الصوت الناتج بالصوت الأساسي f_1



- عندما ننقر الوتر المرن المشدود من ربعه وألمس منتصفه برأس قلم يهتز الوتر بمغزلين.



- عندما ننقر الوتر المرن المشدود من سدسه وألمسه من ثلثه برأس قلم يهتز الوتر بثلاثة مغازل.

- يمكن أن يهتز الوتر المرن اهتزازات حرة بتواترات خاصة مختلفة عندما تتغير شروط التجربة فيتشكل فيه مغزلان أو أكثر وتسمى الأصوات الناتجة بالمدروجات .

- الوتر المرن المثبت من طرفيه يمكن أن يؤلف هزازة ذات تواترات خاصة متعددة تُعطى بالعلاقة $f = nf_1$

حيث : $n = 1,2,3,4, \dots \dots \dots$

- نولد الاهتزاز العرضي بإزاحة الوتر عن وضع توازنه ويكون ذلك:

بالنقر بالريشة (كالعود) ، أو بالإصبع (كالقانون)، أو بالضرب بمطرقة (كالبيانو)، أو بالالتصاق بالقوس (كالكمان).

- **يمكن توليد الاهتزاز العرضي فيزيائياً** باستخدام سلك نحاسي مشدود بقوة شد مناسبة بأن نمرر فيه تياراً جيبياً متناوباً مناسباً ونحيط الوتر بمغناطيس نضوي خطوط حقله عمودية على السلك وفي وضع مناسب في المنتصف مثلاً ليهتز بالتجاوب مكوناً مغزلاً واحداً ويكون تواتر الوتر النحاسي مساوياً لتواتر التيار المتناوب.

الاهتزازات القسرية في وتر مرن:

1- تجربة ملد على نهاية مقيدة:

1 - نصل وتر نهايته مقيدة مع رنانة كهربائية، نجعل الرنانة تعمل لتتشكل أمواج مستقرة على طول الوتر.

2- تواتر الهزازة f، تواتر الوتر الأساسي وليكن

$$f_1 = 10HZ$$

من أجل

- $f < 10HZ$: يهتز الوتر بسعة صغيرة.
- $f = 10HZ$: تتشكل موجة مستقرة واضحة بسعة عُظمى.
- $10 < f < 20HZ$ يهتز بمغزلين غير واضحين.
- $f = 20HZ$ يهتز بمغزلين واضحين.

نستنتج:

تتولد أمواج في الوتر مهما كانت قيمة تواتر الهزازة ولكن:

$$f \neq nf_1 \quad ①$$

يحدث اهتزازات قسرية في الوتر بسعة صغيرة نسبياً من رتبة سعة الهزازة.

1- متى تتشكل أمواج مستقرة على طول الوتر.

2- وما هما شرطا حدوث التجاوب بين الوتر والرنانة استنتج العلاقة المحددة لتواتر الصوت البسيط الصادر عن الوتر، اكتب علاقة تواتر المدروج الثاني مبيناً دلالات الرموز.

3- ماذا يتكون عند النهاية المقيدة وكيف تعلل ذلك.

الحل:

2- يحدث التجاوب إذا تحقق:

A: تواتر الهزازة يساوي إلى مضاعفات صحيحة للتواتر الأساسي للوتر $\boldsymbol{f = nf_1}$

B: طول الوتر يساوي عدد صحيح موجب من نصف طول الموجة $\boldsymbol{L = n\frac{\lambda}{2}}$

الاستنتاج:

طول الوتر يساوي عدد صحيح من نصف طول الموجة

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

$$n = 1,2,3, \dots \dots$$

ولكن: $\lambda = \frac{v}{f}$

ومنه : $L = n\frac{v}{2f}$

$$\Longrightarrow f = n\frac{v}{2L}$$

n: عدد صحيح موجب $n = 1,2,3, \dots \dots$

يمثل عدد المغازل أو رتبة الصوت أو عدد المدروجات .

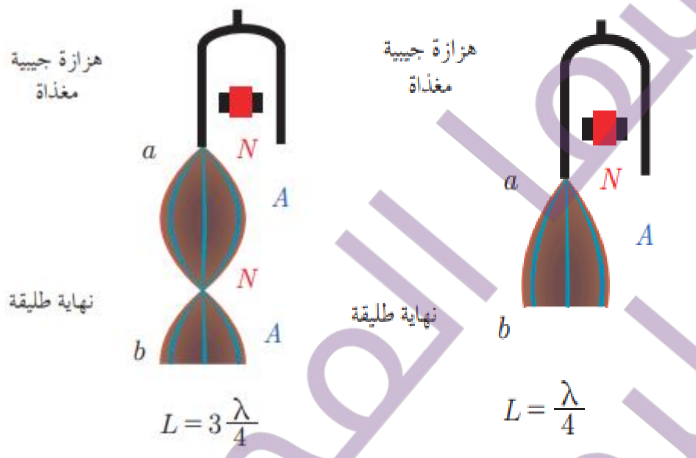
$n = 2 \Longrightarrow f = 2\frac{v}{2L} = 2f_1$ تواتر مدروج ثاني.

v: سرعة انتشار الاهتزاز.

L: طول الوتر.

- يتكون عند النهاية المقيدة عقدة اهتزاز بسبب وصول الاهتزاز الوارد والمنعكس على تعاكس دائم.

2- تجربة ملد على نهاية طليقة:



نأخذ وتر نهايته طليقة يتدلى شاقولياً ثم نصله بأحد شعبتي رنانة كهربائية، نجعل الرنانة تعمل لتتشكل أمواج مستقرة على طول الوتر.

يتكون في النهاية الطليقة بطن اهتزاز نتيجة وصول الاهتزاز الوارد والمنعكس على توافق دائم.

يحدث التجاوب إذا تحقق:

a: تواتر الهزازة يساوي إلى مضاعفات فردية صحيحة من التواتر الأساسي $f = (2n-1)f_1$

b: طول الوتر يساوي عدد صحيح فردي من ربع طول الموجة $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$

الاستنتاج:

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} = (2n-1)\frac{v}{4f}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f = (2n-1)\frac{v}{4L}}$$

n=1,2,3,......... عدد صحيح موجب يمثل عدد العقد أو عدد البطون.

$(2n-1)$ عدد فردي يمثل رتبة المدروج .

$(2n-1) = 3 \Rightarrow f = 3\frac{v}{4L}$ $\Leftarrow$ مدروج ثالث.

تطبيقات الأمواج المستقرة:

1- العوامل التي تتوقف عليها سرعة انتشار الاهتزاز العرضي في وتر مشدود .

إن سرعة انتشار الاهتزاز العرضي في الوتر المهتز تتناسب:

a. طرداً مع الجذر التربيعي لقوة الشد F_T

b: عكساً مع الجذر التربيعي لكتلة وحدة الطول من الوتر المتجانس وتسمى الكتلة الخطية μ

أي: $$v = const\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

إن قيمة هذا الثابت في الجملة الدولية يساوي الواحد $(const = 1)$

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

حيث أن : $\mu = \frac{m(kg)}{L\,(m)} \longrightarrow kg.m^{-1}$

2- العلاقة المحددة لتواتر الصوت الصادر عن هذا الوتر بدلالة قوة الشد و دلالات الرموز.

$$f = n\frac{v}{2L}$$

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

f: تواتر الصوت البسيط الصادر عن الوتر.

n: رتبة المدروج أو عدد المغازل.

F_T : قوة الشد

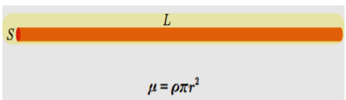
μ : الكتلة الخطية

كذلك : $$\boldsymbol{f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T.L}{m}}}$$

ملاحظة:

$m = \rho V$

$m = \rho.S.L$



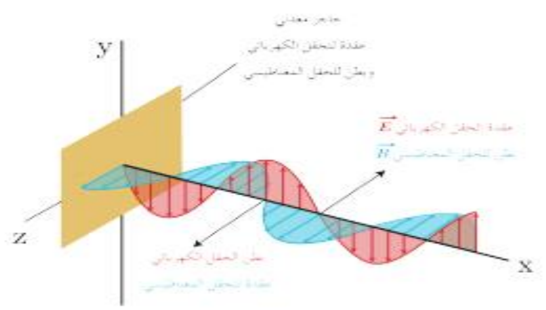
$$\Rightarrow \mu = \frac{\rho.S.L}{L}$$

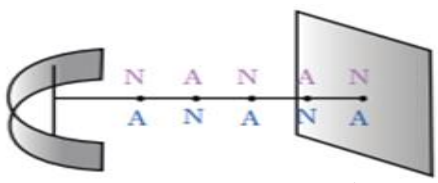
$$\boldsymbol{\mu = \rho\,.S = \rho\pi r^2}$$

الكتلة الخطية

الكتلة الحجمية

الأمواج الكهرطيسية المستقرة:





تشكل الأمواج المستقرة الكهرطيسية

- تتولد الأمواج الكهرطيسية المستوية هوائي مرسل يوضع في محرق عاكس بشكل قطع مكافئ دوارني.

- تتألف الموجة الكهرطيسية المستوية من حقلين متعامدين: حقل كهربائي $\vec{E}$ و حقل مغناطيسي $\vec{B}$.

- عندما تلاقي الأمواج الكهرطيسية الواردة حاجزاً معدنياً ناقلاً مستوياً عمودياً على منحى الانتشار ويبعد عن الهوائي المرسل بعداً مناسباً تنعكس عنه وتتداخل الأمواج الكهرطيسية الواردة مع الأمواج الكهرطيسية المنعكسة لتؤلف أمواجاً كهرطيسية مستقرة.

1- نكشف عن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ بوساطة هوائي مستقبل نضعه موازياً للهوائي المرسل يمكن تغيير طوله وعند وصل طرفي الهوائي المستقبل براسم اهتزاز مهبطي وتغيير طول الهوائي حتى يرتسم على شاشة راسم الاهتزاز خط بياني بسعة **عظمى** فيكون اصغر طول للهوائي المستقبل مساوياً $\frac{\lambda}{2}$.

2- نكشف عن الحقل المغناطيسي $\vec{B}$ بوساطة حلقة نحاسية عمودية على $\vec{B}$ فيولد فيها توتراً نتيجة تغير التدفق المغناطيسي الذي يجتازها.

- عندما ننقل كلاً من الكاشفين بين الهوائي المرسل والحاجز نجد الآتي:

1 - توالي مستويات العقد N يدل فيها الكاشف على دلالة صغرى ومستويات للبطون A يدل فيها الكاشف على دلالة عظمى متساوية الأبعادعن بعضها قيمتها $\frac{\lambda}{2}$ بين كل مستويين لهما الحالة الاهتزازية نفسها.

2- مستويات عقد الحقل الكهربائي هي مستويات بطون للحقل المغناطيس وبالعكس.

3- الحاجز الناقل المستوي عقدة للحقل الكهربائي وبطن للحقل المغناطيسي.

- تتمتع هذه الأمواج بطيفٍ واسعٍ من التواترات يشمل الأمواج الطويلة مثل الأمواج الراديوية والرادارية والمكروية إلى الأمواج القصيرة مثل الضوء المرئي والأشعة السينية وأشعة غاما والأشعة الكونية.

ملاحظات مسائل:

- سعة الموجة المستقرة في النقطة (n)

$$Y_{max/n} = \underbrace{2y_{max}}_{\text{سعة المنبع}}\left|\sin\left(\frac{2\pi}{\underbrace{\lambda}_{\text{طول الموجة}}}\underbrace{x}_{\text{بُعد النقطة}}\right)\right|$$

- تحديد أبعاد عقد وبطون الاهتزاز:

أبعاد العقد: $x = n\frac{\lambda}{2}$

أبعاد البطون: $x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

n=0,1,2,.........

- وتر مشدود بقوة شد F_T ، كتلته m وطوله L.

$\mu = \frac{m}{L} \longrightarrow$ الكتلة الخطية

طول الوتر $\boxed{L = n\frac{\lambda}{2}}$

n=1,2,......... عدد المغازل أو رتبة المدروج.

- عدد أطوال الموجة = $\frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول الموجة}} = \frac{L}{\lambda}$

- عدد المغازل = $\frac{\text{طول الوتر}}{\text{طول المغزل}} = \frac{L}{\frac{\lambda}{2}}$

لحساب تواتر الهزازة:

$$f = n\frac{v}{2L} \quad ، \quad f = \frac{v}{\lambda} \quad ، \quad f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

لحساب سرعة انتشار الاهتزاز:

$$v = \lambda f \quad ، \quad v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad ، \quad v = \sqrt{\frac{F_T.L}{m}}$$

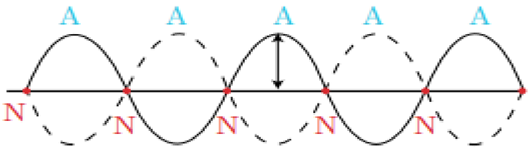
نحسب طول الموجة الجديد من: $L = \underbrace{n'}_{\text{عدد مغازل جديد}}\underbrace{\frac{\lambda'}{2}}_{\text{طول موجة جديد}}$

لحساب F_T أو m

$$v = \sqrt{\frac{F_T.L}{m}} \qquad f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

تطبيق:

وتر مشدود طوله $L = 1m$ كتلته $m = 6g$ مشدود بقوة F_T يهتز بالتجاوب مع رنانة تواترها $f = 50HZ$ مكوناً خمسة مغازل المطلوب حساب:



1- الكتلة الخطية للوتر.

2- قوة شد الوتر F_T المطبقة على الوتر.

3- سرعة انتشار الاهتزاز العرضي على طول الوتر.

4- عدد أطوال الموجة المتكونة.

الحل:

1) $\mu = \frac{m}{L} = \frac{6\times10^{-3}}{1} = 6\times10^{-3}kgm^{-1}$

2): عندما يهتز الوتر بالتجاوب يكون:

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$$F_T = \frac{4L^2F^2\mu}{n^2} = \frac{4\times(1)^2\times(50)^2\times6\times10^{-3}}{(5)^2}$$

$$F_T = 2.4N$$

3): $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{2.4}{6\times10^{-3}}}$

4): عدد أطوال الموجة $= \frac{L}{\lambda} = \frac{L\,f}{v} = \frac{1\times50}{20} = 2.5$

حل المسائل الآتية: (في جميع المسائل $g = 10m.s^{-1}$)

المسألة الأولى:

يُصدر وتر صوتاً أساسياً تواتره $250Hz$ إذا نقص طول الوتر حتى النصف $(L' = \frac{L}{2})$ وازدادت قوة الشد حتى مثليها $(F'_T = 2F_T)$ فإن تواتر صوته الأساسي يصبح :

(A $\grave{f} = \frac{f}{\sqrt{2}}$ (B $\grave{f} = \frac{f}{2\sqrt{2}}$

(C $\grave{f} = \sqrt{2}f$ (D $\grave{f} = 2\sqrt{2}f$

الجواب هو: $\grave{f} = 2\sqrt{2}f$

طريقة الحل: $f = 250HZ$

n=1 $\Leftarrow$ يصدر صوت أساسي

$n = 1 \Leftarrow$ صوت أساسي $\grave{F}_T = 2\grave{F}_T$, $\grave{L} = \frac{L}{2}$

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

عند أنقاص طول الوتر إلى النصف تبقى μ نفسها:

$$\grave{\mu} = \frac{\grave{m}}{\grave{L}} = \frac{\frac{1}{2}m}{\frac{1}{2}L} = \frac{m}{L} = \mu$$

$$\grave{f} = \frac{n}{2\grave{L}}\sqrt{\frac{\grave{F}_T}{\mu}} = \frac{n}{2\times\frac{L}{2}}\sqrt{\frac{2F_T}{\mu}}$$

$$\grave{f} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \times 2\sqrt{2}$$

$$\grave{f} = f \times 2\sqrt{2} = 500\sqrt{2}HZ$$

المسألة الثانية:

وتر طوله $L = 0.7m$ وكتلته $m = 7\ g$ شد بقوة قدرها $F_T = 49N$ فإن تواتر صوته الأساسي هو:

(A $f = 150HZ$ (B $f = 25HZ$

(C $f = 100HZ$ (D $f = 50HZ$

الجواب هو: $f = 50HZ$

طريقة الحل: $f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T.L}{m}}$

$$f = \frac{1}{2\times0.7}\sqrt{\frac{49\times7\times10^{-1}}{7\times10^{-3}}} = \frac{1}{2\times7\times10^{-1}}\times 7\times10^{+1} = \frac{100}{2} = 50HZ$$

المسألة الثالثة:

تهتز شعبتا رنانة كهربائية بتواتر $f = 30HZ$ نصل إحدى الشعبتين بخيط مرن طوله $L = 2m$

1- يشد الخيط بقوة شدتها $F_T = 7.2N$ فيهتز مكوناً مغزلاً واحداً. استنتج كتلة الخيط.

2- احسب قوتي الشد التي تجعل الخيط يهتز بمغزلين ثم بثلاثة مغازل مع الرنانة نفسها؟

الحل:

:(1 $f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T.L}{m}}$

نربع $f^2 = \frac{n^2}{4L^2}\frac{F_T.L}{m} \Longrightarrow$

$$m = \frac{n^2F_T.L}{4L^2.f^2} = \frac{n^2F_T}{4L.f^2}$$

$$m = \frac{1\times7.2}{4\times2\times900} = 10^{-3}kg$$

:(2 الرنانة نفسها $\Leftarrow f = 30HZ$

مغزلين $\Leftarrow n = 2$

$$F_T = \frac{4L^2m.f^2}{n^2.L} = \frac{4L\ m.f^2}{n^2}$$

$$F_T = \frac{4\times2\times10^{-3}\times900}{4} = 1.8N$$

ثلاثة مغازل $\Leftarrow n = 3$

$$F_T = \frac{4\times2\times10^{-3}\times900}{9} = 0.8N$$

إنقاص قوة الشد تؤدي إلى زيادة عدد المغازل.

المسألة الرابعة:

احسب سرعة انتشار اهتزاز عرضي في وتر قطر مقطعه $0.1mm$ وكثافة مادته 0.8 ، مشدود بقوة شدتها $F_T = 100\pi N$

الحل: $D = 0.8 \Rightarrow \rho = D\times1000$

$$\rho = 800kgm^{-3}\ ,v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{F_T}{\rho.\pi r^2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{100\pi}{800\pi\times\frac{1}{4}\times10^{-8}}} = \frac{10^4}{\sqrt{2}}m.s^{-1}$$

المسألة الخامسة:

وتر آلة موسيقية طوله $L = 1m$ وكتلته $m = 20g$ مثبت من طرفيه ومشدود بقوة $F_T = 2N$

المطلوب:

1 - سرعة انتشار الاهتزاز على طول الوتر.

2 - تواتر الصوت الأساسي الذي يمكن أن يصدر عنه.

3 - التواترات الخاصة لمدروجاته الثلاثة الأولى.

الحل:

(1 $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{F_T.L}{m}} = \sqrt{\frac{2\times1}{2\times10^{-2}}}$

$$v = 10m.s^{-1}$$

2) $$f_1 = \frac{n}{2L}v = \frac{1}{2\times1}\times 10 = 5HZ$$

3) $$f = \frac{n}{2L}v$$

$$n = 2 \Rightarrow f = 2\frac{v}{2L} = 2\times 5 = 10HZ$$

وهو المدروج الثاني

$$n = 3 \Rightarrow f = 3\times\frac{v}{2L} = 15HZ$$

وهو المدروج الثالث:

$$n = 4 \Rightarrow f = 4f_1 = 20HZ$$

المسألة السادسة:

خيط مرن أفقي طوله $L = 1m$ وكتلته $m = 10g$ نربط أحد طرفيه برنانة كهربائية شعبتاها أفقيتان تواترها $f = 50HZ$ ونشد الخيط على محز بكرة بثقل مناسب لتكون نهايته مقيدة فإذا علمت أن طول الموجة المتكونة $40cm$ المطلوب:

1- ما عدد المغازل المتكونة على طول الخيط؟

2- احسب السعة بنقطة تبعد 20cm ثم بنقطة تبعد 30cm عن النهاية المقيدة للخيط إذا كانت سعة اهتزاز المنبع $Y_{max} = 1cm$

3- احسب الكتلة الخطية للخيط واحسب قوة شد هذا الخيط وسرعة انتشار الاهتزاز فيه.

4- احسب قوة شد الخيط التي تجعله يهتز بمغزلين وحدد أبعاد العقد ولبطون عن النهاية المقيدة في هذه الحالة.

5- نجعل طول الوتر نصف ما كان عليه هل تتغير كتلته الخطية باعتبار أنه متجانس.

الحل:

$$f = 50HZ$$

$$m = 10^{-2}kg \quad , \quad L = 1m \quad , \quad \lambda = 0.4m$$

1): $$n = \frac{L}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ مغازل}$$

2): حساب السعة بنقطة تبعد:

$$x = 0.2m \Rightarrow Y_{max/n} = 2y_{max}\left|\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|$$

$$Y_{max/n} = 2\times10^{-2}\left|\sin\left(\frac{2\pi}{0.4}\times 0.2\right)\right|$$

$$= 2\times10^{-2}\,sin\pi = 0$$

النقطة التي تبعد $20cm$ تمثل عقدة اهتزاز

$$x = 0.3m \Rightarrow Y_{max/n} = 2y_{max}\left|\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right|$$

$$= 2\times10^{-2}\left|\sin\left(\frac{2\pi}{0.4}\times 0.3\right)\right|$$

$$= 2\times10^{-2}\,m$$

النقطة تمثل بطن اهتزاز.

3): $$\mu = \frac{m}{L} = \frac{10^{-2}}{1} = 10^{-2}kgm^{-1}$$

حساب قوة شد الخيط :

$$f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

$$50 = \frac{5}{2\times1}\sqrt{\frac{F_T}{10^{-2}}} \Rightarrow F_T = 4N$$

$$v = \lambda . f = 0.4\times 50 = 20m.s^{-1}$$

4): من اجل مغزلين: $n = 2$

بنفس الطريقة $\Leftarrow$ $F_T = 25N$

نحسب طول الموجة الجديد: $L = \grave{n}\,\frac{\grave{\lambda}}{2}$

$$\Rightarrow \grave{\lambda} = \frac{2L}{\grave{n}} = \frac{2\times1}{2} = 1m$$

أبعاد العقد:

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

أول عقدة $n = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

ثاني عقدة $n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}m$

ثالث عقدة $n = 2 \Rightarrow x_3 = 1m$

أبعاد البطون:

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

أول بطن $n = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}m$

ثاني بطن $n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}m$

المسألة السابعة:

وتر طوله $L = 1.5m$ وكتلته $m = 15g$ نجعله يهتز بالتجاوب بواسطة هزازة تواترها $f = 100HZ$ يتشكل فيه ثلاث مغازل. المطلوب:

1.حساب موجة الاهتزاز. 2.الكتلة الخطية للوتر.

3. سرعة انتشار الاهتزاز في الوتر.

4. مقدار قوة الشد المطبقة على الوتر.

5. بعد أماكن عقد وبطون الاهتزاز عن نهايته المقيدة.

الحل:

$$L = 1.5m\,,\; m = 15g \quad , \quad f = 100HZ$$

ثلاث مغازل $\Leftarrow$ $n = 3$

1) احسب طول الموجة:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 1.5 = 3\frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

2) $\mu = \frac{m}{L} = \frac{15\times10^{-2}}{1.5} = 10^{-2}kgm^{-1}$

3) $v = \lambda.f = 1\times100 = 100m.s^{-1}$

4) مقدار قوة الشد $F_T = v^2.\mu = 100N$

5) بُعد أماكن عقد وبطون الاهتزاز

أماكن العقد: $x = n\frac{\lambda}{2}$

اول عقدة $n = 0 \Longrightarrow x_1 = 0m$

ثاني عقدة $n = 1 \Longrightarrow x_2 = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}m$

ثالث عقدة $n = 2 \Longrightarrow x_3 = 2\times\frac{1}{2} = 1m$

رابع عقدة $n = 3 \Longrightarrow x_4 = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}m$

أماكن البطون: $n = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$

اول بطن $n = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{4}m$

ثاني بطن $n = 1 \Longrightarrow x_2 = 3\times\frac{1}{4} = \frac{3}{4}m$

ثالث بطن $n = 2 \Longrightarrow x_2 = 5\times\frac{1}{4} = \frac{5}{4}m$

انتبه:

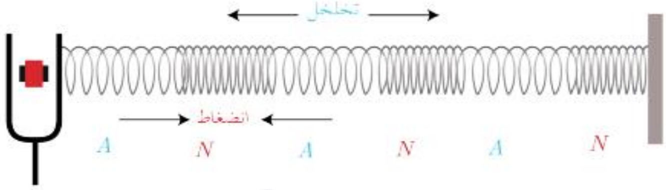
يزداد عدد المغازل :

1. بزيادة طول الوتر.
2. بزيادة تواتر الهزازة.
3. نقصان قوة الشد

سما المجد التعليمية

الأمواج المستقرة الطولية:

أولاً: الأمواج المستقرة الطولية في نابض:



- **تعليل** تشكل أمواج مستقرة على طول النابض.
نتيجة تداخل الأمواج الطولية الواردة مع الأمواج الطولية المنعكسة وينتج عن تداخلهما:

① حلقات ساكنة تدعى عقد الاهتزاز سعة الاهتزاز فيها معدومة تصلها الأمواج الواردة والمنعكسة على تعاكس دائم .

② حلقات أوسع اهتزاز تدعى بطون الاهتزاز وسعة الاهتزاز فيها **عظمى** تصلها أمواج واردة مع أمواج منعكسة على توافق دائم.

- إن بطون الاهتزاز هي عقد للضغط :
لأننا لا نلاحظ تضاغطاً بين حلقات النابض أو تخلخل فيها أي يبقى الضغط ثابت.

- إن عقد الاهتزاز هي بطون للضغط:
لأن عقد الاهتزاز تبقى في مكانها – تتحرك الحلقات المجاورة على الجانبين في جهتين متعاكستين دوماً فتتقارب خلال نصف دور ثم تتباعد خلال نصف الدور.

ثانياً: الأعمدة الهوائية:

عمود هوائي مفتوح | عمود هوائي مغلق

$L = 2\frac{\lambda}{2}$ $L = \frac{\lambda}{2}$ $L = 3\frac{\lambda}{4}$ $L = \frac{\lambda}{4}$

عند التجاوب $L = n\frac{\lambda}{2}$

n=1,2,3 (رتبة المدروج)

$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$

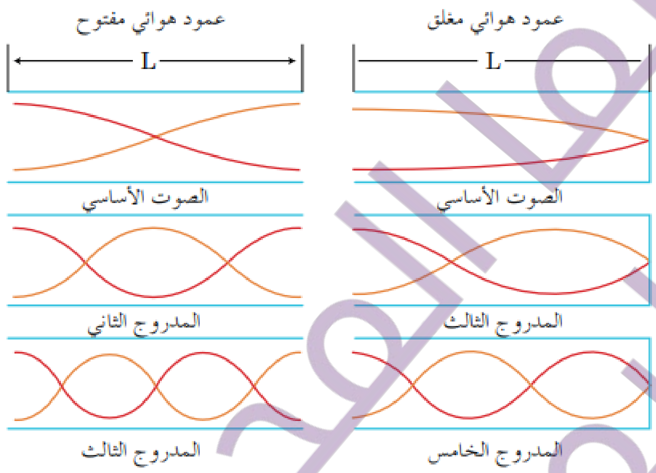
n عدد عقد أو عدد بطون

(2n-1) رتبة المدروج

(مدروجات فردية)

النتائج عن الدراسة التجريبية:

- يحدث تضخيم وتقوية للصوت في أثناء انتقاله عبر الأنابيب نتيجة حدوث انعكاسات متكررة داخله فيتولد عنها أمواج مستقرة ذات نغمات صوتية واضحة وتزداد وضوحاً في الأنابيب الضيقة.
- تتولد أمواج مستقرة طولية في هواء الأنبوب ونسمع صوتاً شديداً عالياً عندما يكون تواتر الرنانة يساوي تواتر الهواء في عمود الأنبوب.
- تتكون عقدة اهتزاز عند سطح الماء الساكن لأنه يمنع الحركة الطولية للهواء (حيث يُعتبر نهاية مغلقة) وبطن اهتزاز تقريباً عند فوهة الأنبوب (نهاية مفتوحة).
- طول أقصر عمود هوائي فوق سطح الماء يحدث عنده التجاوب (الرنين الأول) يساوي $L_1 = \frac{\lambda}{4}$.
- طول العمود الهوائي فوق سطح الماء يحدث عنده التجاوب (الرنين الثاني) يساوي $L_2 = \frac{3\lambda}{4}$

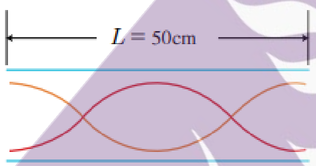


- المسافة بين مستويي الماء الموافقين للصوتين الشديدين المتتاليين $\Delta L = \frac{\lambda}{2}$
- في العمود الهوائي مفتوح الطرفين يتشكل عند كل طرف مفتوح بطن للاهتزاز فيكون طول العمود الهوائي في هذه الحالة $L = n\frac{\lambda}{2}$
- عند استخدام رنانة تواترها كبير نحصل على عمود هوائي طوله قصير.
- يتناسب تواتر الرنانة المستخدم عكساً مع طول العمود الهوائي.
- تتشابه الأعمدة الهوائية المفتوحة بأنفاق عبور السيارات.

- تُعطى سرعة الصوت في هواء الأنبوب بالعلاقة: $\boldsymbol{v = \lambda f}$
- في العمود الهوائي المغلق لا يمكن الحصول على المدروجات ذات العدد الزوجي.
- تعمل القناة السمعية في أذن الإنسان التي تنتهي بغشاء الطبل كأنها عمود هوائي مغلق في حالة رنين (تجاوب)يؤدي إلى زيادة حساسية الأذن للتواترات من $2000Hz$ إلى $5000Hz$ في حين يمتد المدى الكامل لتواترات الصوت التي تسمعها الأذن البشرية من $20Hz$ إلى $20000Hz$.

تطبيق:

أنبوب هوائي مفتوح الطرفين طوله $\boldsymbol{L = 50cm}$ يُصدر الرنين الثاني باستخدام رنانة تواترها غير معلوم. فإذا كانت سرعة انتشار الصوت في شروط التجربة $\boldsymbol{v = 340m.s^{-1}}$ احسب تواتر الرنانة.



الحل:

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

$$0.5 = 2\frac{\lambda}{2} = \lambda = 0.5m$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0.5} = 680HZ$$

تطبيق:

1- يبلغ طول القناة السمعية في الأذن البشرية $\boldsymbol{L = 3cm}$ والتي تؤدي إلى غشاء الطبل وهي عبارة عن عمود هوائي مغلق، فإذا علمت أن سرعة انتشار الصوت في القناة $\boldsymbol{v = 348m.s^{-1}}$ أوجد قيمة أصغر تواتر يحدث عنده التجاوب (الرنين الأول).

2- إذا علمت أن الضغط الناتج عن محادثة عادية $\boldsymbol{P = 0.02Pa}$ ومساحة غشاء الطبل $\boldsymbol{S = 0.50cm^2}$ أوجد القوة الضاغطة المؤثرة في غشاء الطبل.

الحل:

1- القناة السمعية هي أنبوب مغلق $v = 348m.s^{-1}$

رنين أول $\Leftarrow$ $L = \frac{\lambda}{4}$

$$\lambda = 4L = 4 \times 0.03 = 0.12m$$

2- $v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{348}{0.12} = 2900HZ$

$$F = P.S = 0.02 \times 0.5 \times 10^{-4} = 10^{-6}N$$

حل المسائل الآتية: (في جميع المسائل $g = 10m.s^{-1}$)

المسألة الأولى:

يُصدر أنبوب صوتي مختلف الطرفين صوتاً أساسياً تواتره $\boldsymbol{f = 435HZ}$ فما تواترات الأصوات الثلاثة التي تليه؟

الحل:

أنبوب صوتي مختلف الطرفين

الصوت الأساسي: $f = 435HZ$

$$f = (2n-1)\frac{v}{4L} = 1 \times \frac{v}{4L}$$

تواتر الصوت الأساسي $f = 1 \times 435 = 435HZ$

مدروج ثالث $\Rightarrow (2n-1) = 3 \Rightarrow f_3 = 3 \times 435 = 1305HZ$

مدروج خامس $\Rightarrow (2n-1) = 5$

$$f = 5 \times 435 = 2175HZ$$

مدروج سابع $\Rightarrow (2n-1) = 7$

$$f = 7 \times 435 = 3045HZ$$

المسألة الثانية:

تهتز رنانة تواترها $\boldsymbol{f = 345HZ}$ فوق عمود هوائي مغلق حدد البعد الذي يحدث عنده الرنين الأول عندما تكون درجة حرارة الهواء في العمود $\boldsymbol{t = 20°C}$ حيث سرعة انتشار الصوت في هذه الحالة $\boldsymbol{v = 340m.s^{-1}}$

الحل:

عمود هوائي مغلق $\Leftarrow$ $L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$

رنين أول: $(2n-1) = 1$

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{v}{4f} = \frac{340}{4 \times 345}$$

$$L = 0.24m$$

المسألة الثالثة:

استعملت رنانة تواترها $\boldsymbol{f = 445HZ}$ فوق عمود رنين مغلق لتحديد سرعة انتشار الصوت في غاز الهيليوم. فإذا كان البُعد بين صوتين شديدين متتاليين (رنينين مُتعاقبين) $\boldsymbol{L = 110cm}$ احسب سرعة انتشار الصوت في غاز الهيليوم.

الحل:

البعد بين صوتين شديدين $L = \frac{\lambda}{2}$

$$110 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 220cm$$

$$\lambda = 2.2m$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow v = \lambda . f = 2.2 \times 445$$

$$= 979 m.s^{-1}$$

المسألة الرابعة:

إذا كانت سرعة انتشار الصوت في الهواء $v = 330 m.s^{-1}$ المطلوب:

1- احسب تواتر الصوت الأساسي الذي يصدره عمود هوائي طوله $L = 2m$ إذا كان مغلقاً ثم إذا كان مفتوحاً.

2- احسب تواتر المدروج الثالث في كل حالة.

الحل:

1- عمود هوائي مغلق: $f = (2n-1)\frac{v}{4L}$

أساسي $\Rightarrow f = \frac{v}{4L} = \frac{330}{4\times2} = 41.25HZ$

ثالث $\Rightarrow f_3 = 3 \times 41.25 = 125.25HZ$

عمود هوائي مفتوح: $L = n\frac{\lambda}{2}$

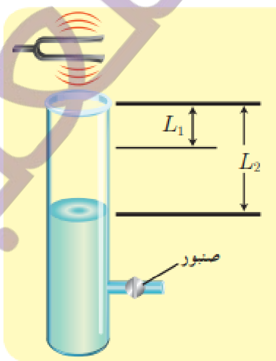
أساسي: $f = n\frac{v}{2L} = 1 \times \frac{330}{2\times2}$

$$f = 82.5HZ$$

2- مدروج ثالث $n = 3$

$$\Rightarrow f = 3 \times 82.5 = 247.5HZ$$

المسألة الخامسة:



أنبوب أسطواني مملوء بالماء وله صنبور عند قاعدته تهتز رنانة فوق طرفه العلوي المفتوح وعند إنقاص مستوى الماء في الأنبوب سُمع صوت شديد يبعد مستوى الماء فيه عن طرفه العلوي بمقدار $L_1 = 17cm$ وباستمرار إنقاص مستوى الماء سُمع صوت شديد ثانٍ يبعد مستوى الماء فيه عن طرفه العلوي $L_2 = 49cm$ فإذا علمت أن سرعة انتشار الصوت في شروط التجربة $v = 340m.s^{-1}$ احسب تواتر الرنانة المستخدمة.

الحل:

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 0.49 - 0.17$$

$$\Delta L = 0.32$$

$$\Delta L = \frac{3\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

$$0.32 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2 \times 0.32$$

$$\lambda = 0.64m$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0.64} = 531.25HZ$$

ثالثاً: المزمار

أنبوب أسطواني أو موشوري مقطعه ثابت وصغير بالنسبة إلى طوله. جدرانه خشبية أو معدنية لكي لا تشارك في الاهتزاز يحتوي غاز يهتز بالتجاوب مع منبع صوتي.

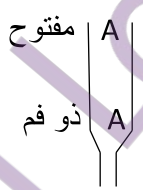
المزمار يتكون من

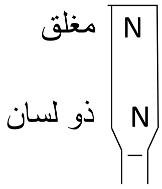
- أنبوب
  - نهاية مغلقة (N)
  - نهاية مفتوحة (A)
- منبع صوتي
  - منبع ذو فم (A)
  - ذو لسان (N)

تصنف المزامير من الناحية الاهتزازية إلى نوعين:

1 متشابه الطرفين

- ذو فم نهايته مفتوحة (A ، A)
- ذو لسان نهاية مغلقة (N ،N)





2 مختلف الطرفين

- ذو فم مغلق (N ، A)
- ذو لسان مفتوح (A ، N)

- لكي نحصل على مزمار منبعه ذو لسان ومختلف الطرفين نجعل نهايته مفتوحة يتشكل فيها بطن اهتزاز.

- لكي نحصل على مزمار منبعه ذو فم ومختلف الطرفين نجعل نهايته مغلقة يتشكل فيها عقدة اهتزاز.

- كيف نولد أمواج مستقرة طولية في أنبوب هواء المزمار.
عندما تهتز طبقة الهواء المجاورة للمنبع ينتشر هذا الاهتزاز طولياً في هواء المزمار لينعكس على النهاية، تتداخل الأمواج الواردة مع الأمواج المنعكسة داخل الأنبوب فيتشكل عند النهاية المغلقة عقدة اهتزاز وعند النهاية المفتوحة بطن اهتزاز.

علل تشكل بطن اهتزاز عند النهاية المفتوحة:
الانضغاط الوارد إلى طبقة الهواء الأخيرة يزيحها إلى الهواء الخارجي، فتسبب انضغاطاً فيه وتخلخل وراءها، يستدعي تهافت هواء المزمار ليملأ الفراغ وينتج عن ذلك تخلخل ينتشر من نهاية المزمار إلى بدايته وهو منعكس الانضغاط الوارد.

قوانين المزمار:

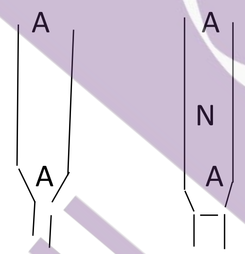
1- المزمار متشابه الطرفين:

- استنتج العلاقة المحددة لتواتر الصوت البسيط الصادر عن مزمار متشابه الطرفين ومدروجاته

طول الأنبوب يساوي عدد صحيح من نصف طول الموجة

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

n=1,2,3,...



$$L = \frac{\lambda}{2} \qquad L = 2\frac{\lambda}{2}$$

$$L = n\frac{v}{2F}$$

$$\boldsymbol{f = n\frac{v}{2L}}$$

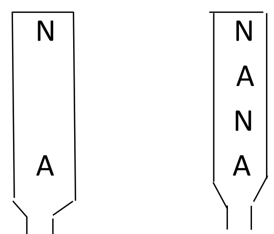
f : تواتر الصوت البسيط
v: سرعة انتشار الصوت
L: طول المزمار
n: رتبة الصوت

كيف يصدر المزمار مدروجاته المختلفة:
نزيد نفخ الهواء فيه تدريجياً أو بتغير طول اللسان إذا كان منبعه ذو لسان.

المزمار مختلف الطرفين

استنتج العلاقة المحددة لتواتر الصوت البسيط الصادر عن المزمار ومدروجاته:

طول المزمار يساوي عدد فردي من ربع طول الموجة



$$L = \frac{\lambda}{4} \qquad L = 3\frac{\lambda}{4} \qquad L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

$\lambda = \frac{v}{F}$ وحيث (n=1,2,3 عدد عقد أو عدد بطون)

$$L = (2n-1)\frac{v}{4F}$$

$$\boldsymbol{f = (2n-1)\frac{v}{4L}}$$

f : تواتر الصوت البسيط
v : سرعة انتشار الصوت
(2n-1) : رتبة المدروج (فردية فقط) أو (رتبة صوت)

ملاحظات مسائل:

مختلف الطرفين	متشابه الطرفين
$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$	$L = n\frac{\lambda}{2}$
$f = (2n-1)\frac{v}{4L}$	$f = n\frac{v}{2L}$
(2n-1) رتبة مدروج	n رتبة مدروج

n عدد عقد أو عدد بطون

1) تواتر الصوت الذي يصدره المزمار يتناسب طرداً مع سرعة انتشار الصوت في غاز المزمار. يمكن تغيير هذه السرعة بزيادة درجة الحرارة في تغيير طبيعته.

أ) تتناسب سرعة انتشار الصوت في غاز معين طرداً مع الجذر التربيعي لدرجة حرارته المطلقة T (كلفن).

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_{1(K)}}{T_2(K)}} = \sqrt{\frac{t_1(C^\circ)+273}{t_2(C^\circ)+273}}$$

ب) اختلاف نوع الغاز $\Leftarrow$ اختلاف كثافة الغاز بالنسبة للهواء $\Leftarrow$ انتشار الصوت.

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

$$D = \frac{M}{29}$$

M: الكتلة المولية للغاز

2) المزمار يصدر الصوت نفسه $\Leftarrow$ التواتر نفسه.

3) صوت موافق للصوت الذي يصدره مزمار آخر $\Leftarrow$ يساويه بالتواتر.

4) إذا بقيت درجة الحرارة نفسها $\Leftarrow$ السرعة بقيت نفسها (مع ثبات نوع الغاز).

5) عدد اطوال الموجة = $\frac{L}{\lambda}$

6) هواء درجة حرارته 15c° تكون سرعته الصوت فيه $340m.s^{-1}$ وفي الدرجة 0c° تكون السرعة $330m.s^{-1}$

7 إذا ذكر أنه تتشكل عدد من العقد داخل المزمار نرسم ويحسب من الرسم إما طول الموجة أو طول المزمار حسب المعلوم والمجهول.

حل المسائل الآتية: (في جميع المسائل $g = 10m.s^{-1}$)

المسألة الأولى:

مزمار متشابه الطرفين L=1m يصدر صوتاً تواتره $f = 170HZ$ يحوي هواء في درجة حرارة معينة حيث سرعة انتشار الصوت $v = 340m.s^{-1}$

المطلوب:

1- احسب عدد أطوال الموجة التي يحويها المزمار.

2- احسب طول مزمار آخر مختلف الطرفين يحوي الهواء يصدر صوتاً أساسياً موافقاً للصوت السابق في درجة الحرارة نفسها.

الحل:

1- عدد أطوال الموجة التي يحويها المزمار:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{170} = 2m$$

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

2- مختلف $f = f$ متشابه ⟸ موافق

$$170 = (2n-1)\frac{v}{4\acute{L}}$$

أساسي $\Longrightarrow (2n-1) = 1$

في الدرجة نفسها $\Longrightarrow v = 340m.s^{-1}$

$$170 = \frac{430}{4\acute{L}}$$

$$4\acute{L} = 2 \Longrightarrow \acute{L} = \frac{1}{2}m$$

المسألة الثانية:

مزمار ذو فم نهايته مفتوحة طوله L=3m فيه هواء درجة حرارته 0°C حيث سرعة انتشار الصوت فيه $v = 330m.s^{-1}$ وتواتر الصوت الصادر F=110Hz

المطلوب:

1. احسب البعد بين بطنين متتاليين ثم استنتج رتبة الصوت.

2. نسخن المزمار إلى الدرجة t=819°C استنتج طول الموجة المتكونة ليصدر المزمار الصوت السابق.

3. احسب طول مزمار آخر ذي فم نهايته مغلقة يحوي الهواء في الدرجة 0°C تواتر مدروجه الثالث يساوي تواتر الصوت الصادر عن المزمار السابق (في الدرجة 0°C)

الحل:

1- البعد هو $\frac{\lambda}{2}$:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{110} = 3m$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2} = 1.5m$$

رتبة الصوت:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \Longrightarrow 3 = n\frac{3}{2} \Longrightarrow n = 2$$

مدروج ثاني

2- $t_1 = 0°C \Longrightarrow v_1 = 330m.s^{-1} \Longrightarrow \lambda_1 = 3m$

$t_2 = 819°C \Longrightarrow v_2 = ? \Longrightarrow \lambda_2 = ?$

الصوت نفسه ⟸ f نفسه

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 = \frac{v_1}{f} \\ \lambda_2 = \frac{v_2}{f}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1(K)}{T_2(K)}}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{t_1(c)+273}{t_2(c)+273}} = \sqrt{\frac{0+273}{819+273}}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{273}{1092}} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \lambda_2 = 2\lambda_1 = 6m$$

3- مختلف $f = f$ متشابه

$$110 = (2n-1)\frac{v}{4\acute{L}}$$

مدروج ثالث $\Longrightarrow (2n-1) = 3$

في الدرجة $0°C \Longrightarrow v = 330m.s^{-1}$

$$110 = 3\frac{330}{4\acute{L}} \Longrightarrow 4\acute{L} = 9$$

$$L = 2.25m$$

المسألة الثالثة:

مزمار ذو فم نهايته مفتوحة طوله L=3.4m مملوء بالهواء يصدر صوتاً تواتره f=1000Hz حيث سرعة انتشار الصوت في هواء المزمار $v = 340m.s^{-1}$ في درجة حرارة التجربة:

1- احسب عدد أطوال الموجة التي يحويها المزمار.

2- إذا تكونت داخله عقدة واحدة فقط في منتصف المزمار في الدرجة نفسها من الحرارة فاحسب تواتر الصوت البسيط عندئذ.

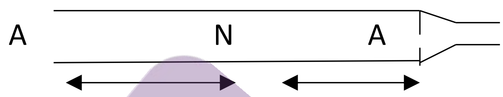
3 - إذا كانت سرعة انتشار الصوت في الهواء $v = 340m.s^{-1}$ في الدرجة 0°C فاحسب درجة حرارة التجربة.

الحل:

-1 $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{1000} = 0.34m$

$\frac{L}{\lambda} = \frac{3.4}{0.34} = 10$ موجات

-2 إذا تكونت داخله عقدة واحدة فقط احسب تواتر الصوت البسيط عندئذ نحسب طول الموجة الجديد من الرسم



$L = \frac{\grave{\lambda}}{4} + \frac{\grave{\lambda}}{4}$

$L = \frac{\grave{\lambda}}{2} \Rightarrow \grave{\lambda} = 2L$

$\grave{\lambda} = 2 \times 3.4 = 6.8m$

في الدرجة نفسها $\Leftarrow$ v بقيت ثابتة

وتغير التواتر $\grave{\lambda} = \frac{v}{\grave{f}}$

$\grave{f} = \frac{340}{6.8} = 50HZ$

-3 $t_1 = 0°C \Rightarrow v_1 = 330m.s^{-1}$

$t_2 = °C \Rightarrow v_2 = 340m.s^{-1}$

$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{t_1(c)+273}{t_2(c)+273}}$

$\frac{330}{340} = \sqrt{\frac{0+273}{819+273}} \Rightarrow t_2 = 15°C$

المسألة الرابعة:

يصدر مزمار ذو فم نهايته مفتوحة صوتاً بإمرار هواء بدرجة $t = 15°C$ فيتكون داخله عقدتان للاهتزاز البعد بينهما $50cm$

المطلوب:

-1 طول موجة صوت البسيط الصادر عن المزمار.

-2 طول المزمار.

-3 توتر الصوت البسيط الصادر عن المزمار.

-4 طول المزمار آخر ذي فم نهايته مغلقة يعطي في الدرجة t=15°C صوتاً أساسياً مواقتاً للصوت الصادر عن المزمار السابق.

سرعة انتشار الصوت في الهواء بالدرجة t=0°C تساوي $v = 331m.s^{-1}$

الحل:

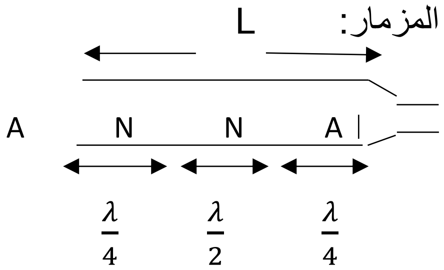
-1 حساب λ :

$\frac{\lambda}{2} = 50cm \Rightarrow \lambda = 100cm = 1m$

-2 حساب طول المزمار:

طريقة1:

من الرسم



$L = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$

$L = \lambda = 1m$

طريقة 2: $L = n\frac{\lambda}{2}$

عقدتان $\Rightarrow n = 2 \Rightarrow L = \lambda = 1m$

-2 تواتر الصوت البسيط الصادر:

$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{t_1(c)+273}{t_2(c)+273}} = \sqrt{\frac{273}{15+273}} = \sqrt{\frac{273}{298}}$

$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{273}{298}} \Rightarrow v_2 = 340m.s^{-1}$

$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow f = \frac{340}{1} = 340HZ$

-3 f مختلف $=$ f متشابه

$340 = (2n-1)\frac{v}{4\grave{L}}$

أساسي $\Rightarrow (2n-1) = 1$

في الدرجة $15° \Rightarrow v = 340m.s^{-1}$

$340 = 1\frac{340}{4\grave{L}} \Rightarrow \grave{L} = \frac{1}{4}m$

المسألة الخامسة:

-1 لدينا مزمار متشابه الطرفين طوله $L = 3.32m$ يصدر صوتاً تواتره $f = 1024Hz$ وهو يحوي هواء بدرجة $t = 15°C$ بسرعة $v = 340m.s^{-1}$ احسب عدد أطوال الموجة التي يحويها المزمار.

-2 نريد أن يحوي المزمار نصف عدد أطوال الموجة السابقة وهو يصدر الصوت السابق نفسه بتغيير درجة حرارة هوائه فقط لتصبح $\grave{t}$ احسب قيمة $\grave{t}$

-3 إذا تكوّن في طرفي المزمار بطنان للاهتزاز وعقدة واحدة فقط في منتصفه بدرجة الحرارة t=15°C بتغيير قوة النفخ عند منبعه الصوتي. احسب تواتر الصوت الصادر عنه حينئذ.

الحل:

-1 احسب عدد أطوال الموجة

عدد أطوال الموجة $= \frac{L}{\lambda}$

نحسب λ :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{1024}$$

$$\Longrightarrow \frac{L}{\lambda} = \frac{3.33}{0.33} = 10 \text{ موجات}$$

-2 إذا حوى نصف عدد أطوال الموجة السابق $\Longleftarrow$ تغير λ

ومنه:

$$\frac{L}{\lambda} = 5 \Longrightarrow \frac{L\,f}{\acute{v}} = 5$$

بقيت f نفسها لأنه يصدر نفس الصوت

$$\acute{v} = \frac{L\,f}{5} = \frac{3.32\times1024}{5}$$

$$\acute{v} = 680 m.s^{-1}$$

$$\frac{v}{\acute{v}} = \sqrt{\frac{t+273}{\acute{t}+273}} \Longrightarrow \frac{340}{680} = \sqrt{\frac{15+273}{\acute{t}+273}}$$

$$\Longrightarrow \acute{t} = 879C^{\circ}$$

-3 بطنان للاهتزاز في طرفيه وعقدة في منتصفه

$$L = n\frac{\lambda}{2} \Longrightarrow \acute{f} = \frac{v}{2L}$$

$$= \frac{340}{2\times3.32} = 51.2HZ$$

المسألة السادسة:

استعمل عمود هوائي مغلق لقياس سرعة انتشار الصوت بوساطة رنانة تواترها $f = 392Hz$ فسُمِع أول صوت شديد عندما كان طول عمود الهواء مساوياً $L_1 = 23.15cm$ وسُمِع الصوت الشديد الثاني عندما كان طول عمود الهواء مساوياً $L_2 = 66.3cm$ احسب سرعة انتشار الصوت في هذه الحالة. هل درجة الحرارة في العمود الهوائي أكبر أم أصغر من درجة حرارة الغرفة؟ (والتي تساوي $t = 20°C$)

الحل:

عمود هوائي مغلق

$f = 392Hz$ $\qquad$ $L_1 = 21cm$

احسب سرعة انتشار الصوت $\qquad$ $L_2 = 65.3cm$

- عند سماع أول صوت شديد $\quad L_1 = \frac{\lambda}{4}$

- عند سماع ثاني صوت شديد $\quad L_2 = 3\frac{\lambda}{4}$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 3\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

كذلك $\rightarrow \Delta L = 65.3 - 21 = 44.3cm$

$$\Delta L = 0.443m$$

لكن $\quad \Delta L = \frac{\lambda}{2} \Longrightarrow$

$$\lambda = 2 \times 0.443 = 0.886m$$

$$v = \lambda . f = 0.886 \times 392 = 347.3$$

سرعة انتشار الصوت في الدرجة $20°$ هي تقريباً $340m.s^{-1}$

$$t_{\text{في العمود}} > t_{\text{في الغرفة}} \Longleftarrow v_{\text{في العمود}} > v_{\text{في الغرفة}}$$

المسألة السابعة:

مزمار ذو فم نهايته مغلقة يحوي غاز الأكسجين سرعة انتشار الصوت فيه $v = 324m.s^{-1}$ يصدر صوتاً أساسياً تواتره $f = 162Hz$

-1 احسب طول هذا المزمار.

-2 نستبدل بغاز الأكسجين في المزمار غاز الهيدروجين في درجة الحرارة نفسها احسب تواتر الصوت الأساسي الذي يصدره هذا المزمار في هذه الحالة.

الحل: المزمار ذو فم نهاية مغلقة

يحوي أوكسجين $\quad v_{o2} = 324m.s^{-1}$

أساسي $(2n-1) = 1$ ، $\quad$ f = 162Hz

-1 حساب طول هذا المزمار

$$L = (2n-1)\frac{v}{4\,f} = 1 \times \frac{324}{4\times162} = \frac{1}{2}m$$

-2 $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f_{O2} = (2n-1)\frac{v_{O2}}{4L} \\ f_{H2} = (2n-1)\frac{v_{H2}}{4L} \end{array}\right\}$$

$$\frac{f_{O2}}{f_{H2}} = \frac{v_{O2}}{v_{H2}} = \sqrt{\frac{M_{H2}}{M_{O2}}}$$

حيث: $\quad D = \frac{M}{29}$

$$\frac{f_{O2}}{f_{H2}} = \sqrt{\frac{2}{32}} = \frac{1}{4} \Longrightarrow f_{H2} = 4f_{O2}$$

$$= 4 \times 162 = 648HZ$$

اختبر نفسي:

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

-1 في الأمواج المستقرة العرضية المسافة بين عقدتين متتاليتين تساوي:

a. $\frac{\lambda}{4}$ $\qquad$ b. $\frac{\lambda}{2}$ $\qquad$ c. λ $\qquad$ d. 2λ

الجواب هو: $\frac{\lambda}{2}$

2- فرق الطور φ بين الموجة الواردة والموجة المنعكسة على نهاية مقيدة تساوي بالراديان:

a. $\varphi = 0$ b. $\varphi = \frac{\pi}{3}$ c. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ d. $\varphi = \pi$

الجواب هو: $\varphi = \pi rad$

3- في تجربة ملد مع نهاية طليقة يُصدر وتراً طوله L صوتاً أساسياً طول موجته λ تساوي:

a. $4L$ b. $2L$ c. L d. $\frac{L}{2}$

الجواب هو: $4L$

4- وتر مهتز طوله L وسرعة انتشار الموجة العرضية على طوله v وقوة شده L_T فإذا زدنا قوة شده أربع مرات لتصبح سرعة انتشاره $\acute{v}$ تساوي:

a. $\frac{v}{4}$ b. $\frac{v}{2}$ c. $2v$ d. $4v$

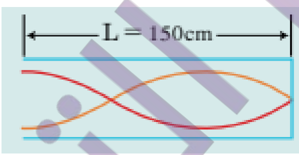
الجواب هو: $4v$

5- وتر مُهتز طوله L وكتلته m وكتلته الخطية μ نقسمه إلى قسمين متساويين فإن الكتلة الخطية لكل قسم تساوي:

a. 2μ b. μ c. $\frac{\mu}{2}$ d. 4μ

الجواب هو: μ

6- يُمثل الشكل انبوباً هوائياً مغلقاً طوله L=150cm فإن طول الموجة الصوتية λ تساوي:



a. 50cm b. 250cm c. 200cm d. 150cm

الجواب هو: $L = \frac{3}{4}\lambda \Rightarrow$

$$150 = \frac{3}{4}\lambda \Rightarrow \lambda = 200cm$$

7- طول العمود الهوائي المفتوح الذي يُصدر نعمته الأساسية يُعطى بالعلاقة:

a. $L = \frac{\lambda}{4}$ b. $L = \frac{\lambda}{2}$ c. $L = \lambda$ d. $L = 2\lambda$

الجواب هو: $L = \frac{\lambda}{2}$

8- طول العمود الهوائي المغلق الذي يصدر نغمته الأساسية يُعطى بالعلاقة:

a. $L = \frac{\lambda}{4}$ b. $L = \frac{\lambda}{2}$ c. $L = \lambda$ d. $L = 2\lambda$

الجواب هو: $L = \frac{\lambda}{4}$

9- وتران متجانسان من المعدن نفسه مشدودان بقوة الشد نفسها قطر الوتر الأول 1mm وقطر الوتر الثاني 2mm فإذا كانت انتشار اهتزاز عرضي في الوترين $v_1 . v_2$ على الترتيب فإن:

a. $v_1 = v_2$ b. $v_1 = 2v_2$ c. $v_1 = 4v_2$ d. $2v_1 = v_2$

الجواب هو: $v_1 = 2v_2$

10- مزمار متشابه الطرفين L وسرعة انتشار الصوت في هوائه v فتواتر صوته البسيط الأساسي الذي يصدره يُعطى بالعلاقة:

a. $f = \frac{v}{2L}$ b. $f = \frac{v}{4L}$ c. $f = \frac{4v}{L}$ d. $f = \frac{2v}{L}$

الجواب هو: $f = \frac{v}{2L}$

11 -مزمار ذو فم نهايته مفتوحة عندما يهتز هواؤه بالتجاوب يتكون عند نهايته المفتوحة:

a. بطن ضغط b. بطن اهتزاز

c. عقدة اهتزاز d. جميع ما سبق صحيح

الجواب هو: بطن اهتزاز

12- مزمار متشابه الطرفين طوله L يصدر صوتاً أساسياً مواقتاً للصوت الأساسي لمزمار آخر مختلف الطرفين طوله $\grave{L}$ في الشروط نفسها فإن:

a. $L = \grave{L}$ b. $L = 2\grave{L}$ c. $L = 3\grave{L}$ d. $L = 4\grave{L}$

الجواب هو: $L = 2\grave{L}$

13- يصدر أنبوب صوتي مختلف الطرفين صوتاً أساسياً 435Hz فإن تواتر الصوت التالي الذي يمكن أن يصدره يساوي:

a. 145Hz b. 217Hz c. 870Hz d. 1305Hz

الجواب هو: $f = 435HZ$ أساسي

أساسي $\Rightarrow (2n-1) = 3 \Rightarrow f = 3 \times 435$

$$f = 1305Hz$$

14- في تجربة ملد مع نهاية مقيدة تتكون أربعة مغازل عند استخدام وتر طوله $L = 2m$ وهزازة تواترها $f = 435Hz$ فتكون سرعة انتشار الاهتزاز v مقدرة بـ $m.s^{-1}$ تساوي:

a. 345 b. 290 c. 1742 d. 870

الجواب هو: n=4 , $L = 2m$, $f = 435H$

$$f = n\frac{v}{2L} \Rightarrow 435 = 4\frac{v}{2 \times 2}$$

$$\Rightarrow v = 435m.s^{-1}$$

15- إذا كانت سرعة انتشار الصوت في غاز الهدروجين v_1 و $(H = 1)$ سرعة انتشار الصوت في غاز الأوكسجين v_2

a. $v_1 = v_2$ b. $v_1 = 4v_2$

c. $v_1 = 8v_2$ d. $v_1 = 16v_2$

الجواب هو: $\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{32}{2}}=4$

$$v_1=4v_2$$

16- طول الموجة المستقرة هو:

a. المسافة بين بطنين متتالين أو عقدتين متتاليتين.

b. مثلي المسافة بين بطنين متتاليين أو عقدتين متتاليتين.

c. نصف المسافة بين بطنين متتاليين أو عقدتين متتاليتين.

d. نصف المسافة بين بطن وعقدة تليه مباشرة.

الجواب هو: مثلي المسافة بين بطنين متتاليين أو عقدتين متتاليتين.

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

1- نُثبت بإحدى شعبتي رنانة كهربائية تواترها f طرف وتر طوله مناسب ومشدود بثقل مناسب كتلته m لتتكون أمواج مستقرة عرضية بثلاثة مغازل ولكي نحصل على مغزلين نجري التجربتين الآتيتين:

a. نستبدل الرنانة السابقة برنانة أخرى تواترها $\acute{f}$ مع الكتلة السابقة نفسها m استنتج العلاقة بين التواترين f ، $\acute{f}$

b. نستبدل الكتلة السابقة m بكتلة أخرى $\grave{m}$ مع الرنانة السابقة نفسها f استنتج العلاقة بين الكتلتين m ، $\grave{m}$.

الحل: المقادير $(L \,.\, F_T \,.\, \mu)$ ثابتة

$$\left.\begin{array}{l} f = const\ \ n \\ \acute{f} = const\ \ \acute{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f}{\acute{f}}=\frac{n}{\acute{n}}=\frac{3}{2}$$

$$\acute{f}=\frac{2}{3}f$$

استبدلت الكتلة المعلقة $\Leftarrow$ بقيت ثابتة $(F \,, L \,,\ \mu)$ وتغيرت قوة الشد

$$\left.\begin{array}{l} f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \\ f = \frac{\grave{n}}{2L}\sqrt{\frac{\grave{F}_T}{\mu}} \end{array}\right\} \Rightarrow 1=\frac{n\sqrt{F_T}}{\grave{n}\sqrt{\grave{F}_T}}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\grave{n}}=\sqrt{\frac{\grave{F}_T}{F_T}}=\sqrt{\frac{\grave{m}g}{mg}}=\sqrt{\frac{\grave{m}}{m}}$$

$$\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{\grave{m}}{m}} \Rightarrow \frac{9}{4}=\frac{\grave{m}}{m}$$

$$\Rightarrow \grave{m}=\frac{9}{4}m$$

2- إذا تكونت ثلاثة مغازل لأمواج مستقرة عرضية في وتر مشدود بقوة مناسبة وأردنا الحصول على خمسة مغازل بتغيير قوة الشد فقط، فهل نزيد تلك القوة أو ننقصها؟ ولماذا؟

الحل: عدد المغازل يتناسب عكساً مع الجذر التربيعي لقوة الشد. لذلك ننقص قوة الشد.

3- علل ما يأتي:

a -لا يحدث للطاقة في الأمواج المستقرة كما في الأمواج المنتشرة.

b - تُسمى الأمواج المستقرة بهذا الاسم.

الحل:

a. لأن الأمواج الواردة والأمواج المنعكسة تنقل الطاقة في اتجاهين متعاكسين.

b. لأن نقاط الوسط تهتز مراوحة في مكانها فتأخذ شكلاً ثابتاً وتظهر ساكنة.

4- في الأمواج المستقرة العرضية هل يهتز البطن الأول والبطن الثالث على توافق أم على تعاكس فيما بينهما؟

الحل:

يهتز البطن الأول والبطن الثالث التالي على توافق فيما بينهما لأن المسافة بينهما هي λ

انتهى البحث الأمواج